Κεφάλαιο 8

Μετασχηματισμός Laplace

8.1 Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier για τα σήματα συνεχούς χρόνου. Ο μετασχηματισμός Laplace του συνεχούς σήματος $x(t)$ ορίζεται ως εξής

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt,$$

όπου s είναι μιγαδική μεταβλητή. Εάν θέσουμε $s = i\omega$, δηλαδή εάν περιορισθούμε στο φανταστικό άξονα, λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος. Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής s για τις οποίες το ολοκλήρωμα υπάρχει, ονομάζεται περιοχή σύγκλισης. Πρόκειται για το σύνολο των τιμών της μεταβλητής s για τις οποίες υπάρχει το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\Re[s]t}dt < \infty$$

Επομένως η περιοχή σύγκλισης ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο με λωρίδες παράλληλες στο φανταστικό άξονα. Για σήματα πεπερασμένης διάρκειας και απόλυτα ολοκληρώσιμα η περιοχή σύγκλισης είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Για αιτιατά σήματα, η περιοχή σύγκλισης είναι ένα δεξιό ημιεπίπεδο οριζόμενο από $\Re[s] > \gamma$. Ικανή συνθήκη γι' αυτό είναι $|x(t)| \leqslant \mu e^{\gamma t}, t \geqslant 0$.

Παράδειγμα 8.1.1. Εάν $x(t) = e^{i\omega_0 t}u(t)$, τότε $|x(t)| \leqslant 1, t \geqslant 0$. Άρα υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα για $\Re[s] > 0$. Εάν όμως $x(t) = e^{i\omega_0 t}, \forall t$, τότε το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει, αφού θα απαιτούνταν για τη σύγκλιση για $t < 0$ να είναι $\Re[s] < 0$. Δεν μπορεί επομένως να συγκλίνει ταυτόχρονα για $t \geqslant 0$ και $t < 0$.

Ο μετασχηματισμός Laplace θα μπορούσε να συνδεθεί και με το μετασχηματισμό Z μέσω της απεικόνισης $z = e^s$, που απεικονίζει ευθείες παράλληλες στο φανταστικό άξονα από το επίπεδο s σε κύκλους με κέντρο την αρχή στο επίπεδο z. Ο ίδιος ο φανταστικός άξονας απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου z.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίδει το αρχικό σήμα

$$x(t) = \frac{1}{i2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)e^{st}ds,$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε μια ευθεία παράλληλη στο φανταστικό άξονα που ανήκει στην περιοχή σύγκλισης.

Ο μετασχηματισμός Laplace του κρουστικού σήματος $\delta(t)$ ορίζεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο και είναι 1.

Παράδειγμα 8.1.2. Ας θεωρήσουμε το σήμα

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace θα είναι

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \frac{1}{s+\alpha},$$

με περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > -\alpha$. Εάν θέσουμε $\alpha = 0$ λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace του βηματικού σήματος

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re[s] > 0.$$

Παράδειγμα 8.1.3. Ας θεωρήσουμε το σήμα

$$x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace θα είναι

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = -\int_0^{\infty} e^{(\alpha+s)t}dt = \frac{1}{s+\alpha},$$

με περιοχή σύγκλισης $\Re[s] < -\alpha$.

Παράδειγμα 8.1.3. Ας είναι ο μετασχηματισμός Laplace

$$X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)},$$

με $\alpha > \beta$. Μπορούμε να αναλύσουμε σε κλάσματα ως εξής

$$X(s) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s+\beta}\right).$$

Εάν $\Re[s] > -\beta$,

$$x(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}u(t).$$

Εάν $-\beta > \Re[s] > -\alpha$,

$$x(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}u(t) + e^{-\beta t}u(-t)).$$

Εάν $\Re[s] < -\alpha$,

$$x(t) = \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\beta-\alpha}u(-t).$$

8.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Ας έλθουμε τώρα σε μερικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

1. Γραμμικότητα
   Εάν $X_1(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x_1(t)$ με περιοχή σύγκλισης R_1 και $X_2(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x_2(t)$ με περιοχή σύγκλισης R_2, τότε ο μετασχηματισμός Laplace ενός γραμμικού συνδυασμού των δύο $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ είναι $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ με περιοχή σύγκλισης που εγκλείει την τομή $R_1 \bigcap R_2$.

2. Χρονική μετατόπιση

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt = e^{-st_0}X(s),$$

   με την ίδια περιοχή σύγκλισης.

3. Αντιστροφή χρόνου
   Αν $X(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ με περιοχή σύγκλισης R_+, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(-t)$ είναι $X(-s)$, με περιοχή σύγκλισης την αντίθετη της αρχικής, που συμβολίζουμε R_-. Εάν ένα σήμα είναι άρτιο, $x(t) = x(-t)$, τότε $X(s) = X(-s)$. Εάν ένα σήμα είναι περιττό, $x(t) = -x(-t)$, τότε $X(s) = -X(-s)$. Και στις δύο περιπτώσεις η περιοχή σύγκλισης θα είναι $R_+ \bigcap R_-$.

4. Αλλαγή κλίμακας χρόνου
   Αν $X(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(at)$ είναι $\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$, με περιοχή σύγκλισης ώστε το $\frac{s}{a}$ να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του $X(s)$.

5. Μετατόπιση στο μιγαδικό επίπεδο

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0t}x(t)e^{-st}dt = X(s-s_0),$$

   με περιοχή σύγκλισης ώστε το $s - s_0$ να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του $X(s)$.

6. Συνέλιξη
   Ο μετασχηματισμός Laplace της $y(t)$, που προκύπτει ως συνέλιξη της $h(t)$ με τη $x(t)$ έχει ως εξής

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

   όπου $H(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $h(t)$. Εάν $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ενός συστήματος, η $H(s)$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $Y(s)$ εγκλείει την τομή, $R_1 \bigcap R_2$, των περιοχών σύγκλισης των δύο μελών της συνέλιξης.

7. Παραγώγιση στο χρόνο
   Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = sX(s).$$

8. Παραγώγιση στο μιγαδικό επίπεδο
   Ισχύει ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)e^{-st}dt = -\frac{dX(s)}{ds}.$$
9. Ολοκλήρωση στο χρόνο
   Ισχύει ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right) e^{-st}dt = \frac{X(s)}{s}.$$

Παράδειγμα 8.2.1. Ας θεωρήσουμε το σήμα (Σχήμα 4.2)
$$x(t) = e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t).$$
Ο μετασχηματισμός Laplace θα είναι
$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha} + \frac{1}{-s+\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - s^2},$$
με περιοχή σύγκλισης $\alpha > \Re[s] > -\alpha$. Άρα θα πρέπει να είναι $\alpha > 0$.

Παράδειγμα 8.2.2. Ας θεωρήσουμε το σήμα
$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)u(t).$$
Ο μετασχηματισμός Laplace με περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > 0$ θα είναι
$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega_0} + \frac{1}{s + i\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Παράδειγμα 8.2.3. Ας θεωρήσουμε το σήμα
$$x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)u(t).$$
Ο μετασχηματισμός Laplace με περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > 0$ θα είναι
$$X(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega_0} - \frac{1}{s + i\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Παράδειγμα 8.2.4. Ας θεωρήσουμε το σήμα (Σχήμα 2.6(a))
$$x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha + i\omega_0 t} + e^{-\alpha - i\omega_0 t}\right)u(t).$$
Ο μετασχηματισμός Laplace με περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > -\alpha$ θα είναι
$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + \alpha - i\omega_0} + \frac{1}{s + \alpha + i\omega_0}\right) = \frac{s + \alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}.$$

Παράδειγμα 8.2.5. Ας θεωρήσουμε το σήμα

$$x(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{-\alpha+i\omega_0 t} - e^{-\alpha-i\omega_0 t}\right)u(t).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace με περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > -\alpha$ θα είναι

$$X(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s+\alpha-i\omega_0} - \frac{1}{s+\alpha+i\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}.$$

Παράδειγμα 8.2.6. Ας θεωρήσουμε το σήμα

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του $y(t) = tx(t)$ θα είναι

$$Y(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του $t^n x(t)$ θα είναι

$$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}.$$

8.3 Μετασχηματισμός Laplace και γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα αιτιατά συστήματα με άπειρη κρουστική απόκριση, που δίδονται από μία διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)\frac{d^k y(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{M} b(k)\frac{d^k x(t)}{dt}.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο για το μετασχηματισμό Laplace προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι ίση με το λόγο δύο πολυωνύμων της μιγαδικής μεταβλητής s,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)s^k}{\sum_{k=0}^{N} a(k)s^k}$$

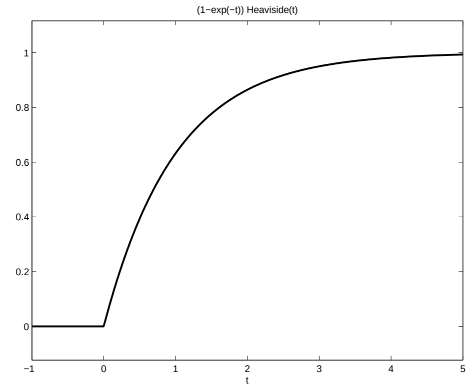
Οι ρίζες του $B(s)$ ονομάζονται μηδενικά του συστήματος, ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή ονομάζονται πόλοι του συστήματος.

Παράδειγμα 8.3.1. Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha y(t) + u(t), t \geqslant 0, y(0) = 0, \alpha > 0.$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace βρίσκουμε

$$sY(s) = -\alpha Y(s) + \frac{1}{s},$$



Σχήμα 8.1: Η βηματική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης του Παραδείγματος 8.3.1.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right).$$

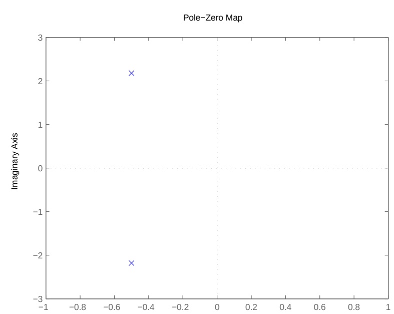
Άρα η απόκριση θα είναι

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})u(t).$$

Παράδειγμα 8.3.2. Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(s+\alpha+i\omega_0)(s+\alpha-i\omega_0)},$$

έχει δύο πόλους: $-\alpha + i\omega_0, -\alpha - i\omega_0$.



Σχήμα 8.2: Οι πόλοι του συστήματος δεύτερης τάξης του Παραδείγματος 8.3.2.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ενός συστήματος είναι η ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace πάνω στο φανταστικό άξονα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

Άρα θα πρέπει η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα. Είναι φανερό από τον ορισμό της ευστάθειας, ότι όλα τα συστήματα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση είναι ευσταθή. Οπότε, για τα συστήματα που ορίζονται μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης, η συνθήκη ευστάθειας μπορεί να εκφρασθεί με βάση τη θέση των ριζών του πολυωνύμου $A(s)$. Ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς όπως παραπάνω είναι ευσταθές, εάν, και μόνο εάν,

$$A(s) \neq 0 \quad \text{για} \quad \Re[s] \geqslant 0,$$

δηλαδή εάν όλοι οι πόλοι έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Για ένα σύστημα πρώτης τάξης (Παράδειγμα 8.3.1) η συνθήκη της ευστάθειας είναι $\alpha < 0$. Για ένα σύστημα δεύτερης τάξης με δύο μιγαδικές ρίζες, όπως αυτό του Παραδείγματος 8.3.2, η συνθήκη της ευστάθειας είναι επίσης $\alpha < 0$.