Κεφάλαιο 6

Μετασχηματισμός Fourier σημάτων διακριτού χρόνου

6.1 Ορισμός μετασχηματισμού Fourier

Ως αποτέλεσμα της δειγματοληψίας ενός σήματος $x(t)$ λαμβάνεται το σήμα των δειγμάτων $x(nT)$. Το φάσμα συχνοτήτων του σήματος των δειγμάτων θα είναι περιοδικό, με περίοδο τη συχνότητα της δειγματοληψίας $\frac{2\pi}{T}$,

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - \frac{2\pi n}{T}).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$X_s(\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-in\omega T}.$$

Κανονικοποιώντας ως προς την περίοδο της δειγματοληψίας, δηλαδή θέτοντας $T = 1$, προκύπτει το διακριτό σήμα $x(n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(n)$ είναι κατά τα ανωτέρω μια περιοδική συνάρτηση της συχνότητας ω με περίοδο 2π,

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}.$$

Η ύπαρξη του μετασχηματισμού προϋποθέτει ότι οι τιμές του σήματος ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίδει το αρχικό σήμα

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{i\omega n} d\omega.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του κρουστικού σήματος $\delta(n)$ είναι ίσος με 1 για κάθε συχνότητα ω.

Παράδειγμα 6.1. Το σήμα

$$x(n) = \alpha^n u(n), \quad |\alpha| < 1,$$

έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-i\omega n} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-i\omega}}, \quad |\alpha| < 1.$$

Παράδειγμα 6.2. Το σήμα

$$x(n) = u(n) - u(n - N), \quad N > 0,$$

έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N} e^{-i\omega n} = \frac{1 - e^{-i\omega N}}{1 - e^{-i\omega}} = e^{-i\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}, \quad N > 0.$$

6.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier έχει τις ακόλουθες ιδιότητες, παρόμοιες με τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνεχών σημάτων.

1. Γραμμικότητα
   Κάθε γραμμικός συνδυασμός σημάτων μετασχηματίζεται στον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των μετασχηματισμών Fourier των σημάτων.

2. Χρονική μετατόπιση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) e^{-i\omega n} = e^{-i\omega n_0} X(\omega)$$

3. Αντιστροφή του χρόνου
   Εάν $X(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός του σήματος $x(n)$, τότε ο μετασχηματισμός του σήματος $x(-n)$ είναι $X(-\omega)$.

4. Σταθερή τιμή

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).$$

5. Σχέση συζυγίας
   Για πραγματικά σήματα $x(n)$ ισχύει $X(-\omega) = \overline{X}(\omega)$. Εάν το σήμα είναι επιπλέον άρτιο, τότε ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι πραγματικός, ενώ εάν το σήμα είναι περιττό,τότε ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι καθαρά φανταστικός.

6. Μετατόπιση συχνότητας
   Ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(n)$ με το φανταστικό εκθετικό σήμα $e^{i\omega_0 n}$ συνεπάγεται τη μετατόπιση στη συχνότητα $X(\omega - \omega_0)$.

7. Παραγώγιση στη συχνότητα
   Με παραγώγιση ως προς τη συχνότητα προκύπτει

$$iX'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-i\omega n}$$

   που δίδει το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $nx(n)$.

8. Συνέλιξη
   Η συνέλιξη $y(n)$ της $h(n)$ με την $x(n)$ έχει μετασχηματισμό Fourier

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega),$$

   όπου $H(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $h(n)$.

9. Πολλαπλασιασμός
   Ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου δύο σημάτων, $x(n)$ και $y(n)$, δίδεται ως εξής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(u)Y(\omega - u)du,$$

   όπου $X(\omega)$ και $Y(\omega)$ είναι οι δύο αντίστοιχοι μετασχηματισμοί.

10. Εσωτερικό γινόμενο

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\overline{Y}(\omega)d\omega.$$

11. Ενέργεια
    Η ενέργεια ενός σήματος διατηρείται μετά το μετασχηματισμό,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

    Πρόκειται για τη σχέση του Parseval για διακριτά σήματα.

Ακολουθούν παραδείγματα αναλυτικών εκφράσεων για το μετασχηματισμό Fourier.

Παράδειγμα 6.3. Ας είναι το σήμα

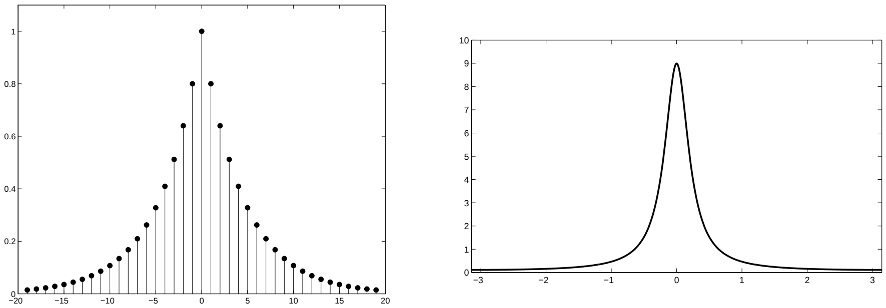
$$x(n) = \alpha^{|n|}, \quad |\alpha| < 1.$$

Μπορεί να γραφεί

$$x(n) = \alpha^n u(n) + \alpha^{-n}u(-n) - \delta(n).$$

Με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της αντιστροφής του χρόνου βρίσκεται ότι

$$X(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}} + \frac{1}{1-\alpha e^{i\omega}} - 1 = \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega + \alpha^2}.$$



Σχήμα 6.1: Το σήμα του Παραδείγματος 6.3 και ο μετασχηματισμός του.

Στο Σχήμα 6.1 δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier.

Παράδειγμα 6.4. Ας είναι το σήμα

$$x(n) = u(n+N) - u(n-N-1), \quad N \geqslant 0.$$

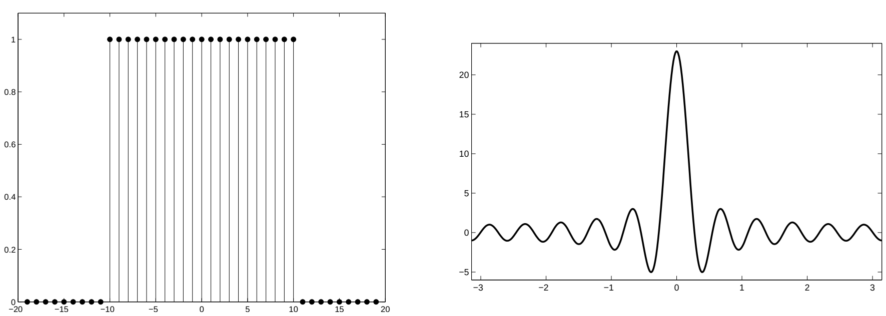
Ισχύει ότι

$$x(n) = u(n+N) - u(n-2N-1+N),$$

που έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X(\omega) = e^{-i\omega N} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{i\omega N} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Στο Σχήμα 6.2 δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier.



Σχήμα 6.2: Το σήμα του Παραδείγματος 6.4 και ο μετασχηματισμός του.

Δίδονται στη συνέχεια μετασχηματισμοί που εμπλέκουν τις γενικευμένες συναρτήσεις. Σε όλες τις περιπτώσεις δίδονται οι μετασχηματισμοί στο κύριο διάστημα $[-\pi, \pi]$, όντας περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π.

$x(n)$	$X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 n}, \lvert\omega_0\rvert \leqslant \pi$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 n, \lvert\omega_0\rvert \leqslant \pi$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$
$\sin\omega_0 n, \lvert\omega_0\rvert \leqslant \pi$	$i\pi(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))$
$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-i\omega}}+\pi\delta(\omega)$

6.3 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Εάν θεωρηθεί ένα διακριτό και περιοδικό σήμα, τότε αφενός το φάσμα των συχνοτήτων θα είναι μια περιοδική συνάρτηση, κι αφετέρου, αφού και το σήμα είναι περιοδικό, το φάσμα των συχνοτήτων θα είναι διακριτό. Σε αυτή την περίπτωση ορίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier ορίζεται για οποιοδήποτε διακριτό σήμα πεπερασμένης διάρκειας, υποθέτοντας έμμεσα ότι είναι περιοδικό, με καθορισμένη περίοδο.

Ας είναι

$$x(n), n = 0, \ldots, N-1$$

οι τιμές του σήματος. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier θα είναι

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, \ldots, N-1.$$

Οι δείκτες k αντιστοιχούν στις συχνότητες $\frac{2\pi k}{N}$. Επειδή

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = N\delta(n),$$

ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίδεται από τη σχέση

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0, \ldots, N-1.$$

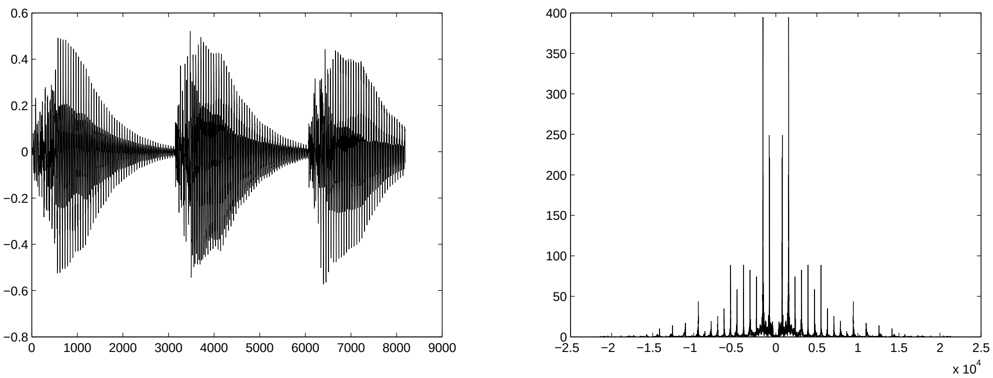
Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμικός. Για πραγματικά σήματα έχει ιδιότητες συμμετρίας

$$\Re[X(k)] = \Re[X(N-k)], \Im[X(k)] = -\Im[X(N-k)], k = 1, \ldots, N-1$$

Η κυκλική ολίσθηση του σήματος κατά m δείγματα έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή στη φάση με πολλαπλασιασμό με $e^{-i\frac{2\pi}{N}km}$. Η κυκλική συνέλιξη δύο σημάτων ίδιας διάρκειας έχει ως αποτέλεσμα το γινόμενο των δύο διακριτών μετασχηματισμών Fourier. Ισχύει επίσης το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας του Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

Με δοσμένο ότι τα σήματα είναι πρακτικά πάντοτε πεπερασμένης διάρκειας ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier για τα διακριτά σήματα. Για τον υπολογισμό υπάρχει γρήγορος αλγόριθμος: Fast Fourier Transform (FFT). Στο Σχήμα 6.3 δίδονται τμήμα ενός σήματος μουσικής και η αρμονική του ανάλυση μέσω του FFT.



Σχήμα 6.3: Τμήμα σήματος μουσικής και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier αυτού.

6.4 Μετασχηματισμός Fourier και γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Η σχέση που συνδέει την είσοδο και την έξοδο στο πεδίο των συχνοτήτων είναι η ακόλουθη

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega).$$

Επομένως το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα λειτουργεί ως φίλτρο στις συχνότητες. Η απόκριση στις συχνότητες ονομάζεται, όπως και στην περίπτωση των συνεχών συστημάτων, φάσμα του συστήματος. Εφόσον το φάσμα του συστήματος είναι μια μιγαδική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με το μέτρο και το όρισμα, που ορίζει τη συνάρτηση της φάσης. Περιοριζόμενοι σε πραγματικά σήματα γνωρίζουμε ότι για τις αρνητικές συχνότητες η απόκριση είναι συζυγής αυτής που προκύπτει για τις αντίστοιχες θετικές συχνότητες. Επομένως το μέτρο θα είναι μια άρτια συνάρτηση και η φάση θα είναι μια περιττή συνάρτηση. Και για τα δύο είναι αρκετό να παρασταθούν μόνο για τις θετικές συχνότητες. Το $|H(\omega)|^2$ ονομάζεται φάσμα ισχύος του συστήματος.

Θεωρούμε στη συνέχεια γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα όπου η σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος δίδεται μέσω μιας εξίσωσης διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k).$$

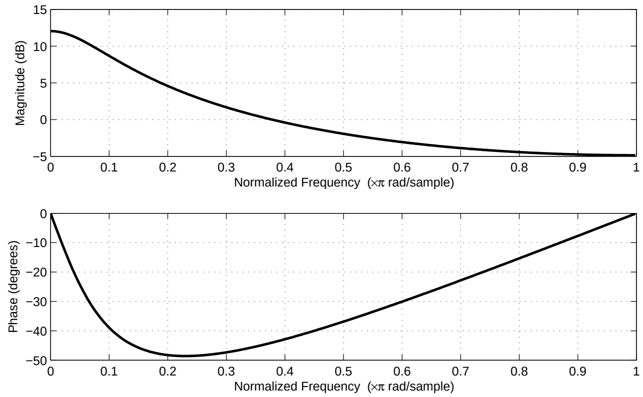
Τότε θα ισχύει

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)e^{-i\omega k}Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b(k)e^{-i\omega k}X(\omega).$$

Άρα

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)e^{-i\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a(k)e^{-i\omega k}}.$$

Θα θεωρήσουμε ιδιαίτερα την περίπτωση όπου $b(0) = 1, M = 0$, οπότε η απόκριση στις συχνότητες προκύπτει ως το αντίστροφο ενός πολυωνύμου του $e^{-i\omega}$. Ο βαθμός του πολυωνύμου ταυτίζεται με την τάξη της εξίσωσης διαφορών και κατ' επέκταση του συστήματος. Το σύστημα πρώτης τάξης παρουσιάσθηκε στο Παράδειγμα 6.1. Στο Σχήμα 6.4 δίδονται τα διαγράμματα του μέτρου και της φάσης για την απόκριση στη συχνότητα για $\alpha = 0,75$.



Σχήμα 6.4: Τα διαγράμματα μέτρου και φάσης για ένα σύστημα πρώτης τάξης.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια συστήματα δεύτερης τάξης. Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το πολυώνυμο του παρανομαστή έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$H(\omega) = \frac{1}{(1-\alpha_1 e^{-i\omega})(1-\alpha_2 e^{-i\omega})}, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \quad |\alpha_1| < 1, \quad |\alpha_2| < 1.$$

Η απόκριση στις συχνότητες μπορεί να γραφεί

$$H(\omega) = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(1-\alpha_1 e^{-i\omega})} - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1-\alpha_2)(1-\alpha_2 e^{-i\omega})}$$

Η κρουστική απόκριση αυτού του συστήματος είναι

$$h(n) = \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\alpha_1 - \alpha_2} u(n).$$

Η κρουστική απόκριση δίδεται στο Σχήμα 6.5 για $\alpha_2 = 0,975$ και $\alpha_2 = 0,75$. Για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων δίδονται τα διαγράμματα μέτρου και φάσης στο Σχήμα 6.6.

Στην περίπτωση μιας διπλής ρίζας η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

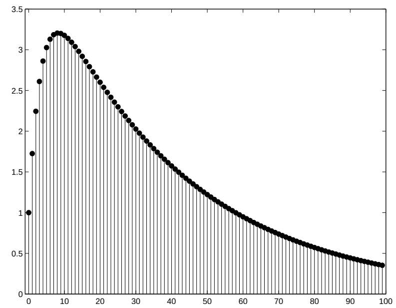
$$h(n) = (n+1)\alpha^n u(n).$$

Στην περίπτωση δύο συζυγών μιγαδικών ριζών θα έχουμε

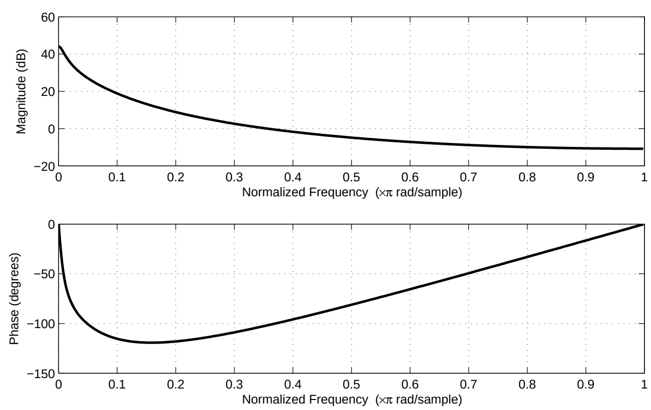
$$H(\omega) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-i\omega} + r^2 e^{-i2\omega}}, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi,$$

που γράφεται

$$H(\omega) = \frac{1}{(1-re^{i\theta}e^{-i\omega})(1-re^{-i\theta}e^{-i\omega})}.$$



Σχήμα 6.5: Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος δεύτερης τάξης με δύο πραγματικές ρίζες.



Σχήμα 6.6: Τα διαγράμματα μέτρου και φάσης για ένα σύστημα δεύτερης τάξης με δύο πραγματικές ρίζες.

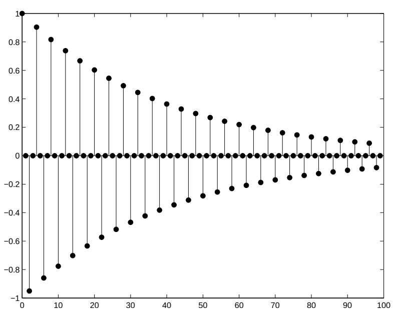
Η ανάλυση σε δύο κλάσματα, αφού οι ρίζες διαφέρουν, δίδει

$$H(\omega) = \frac{1}{2i\sin\theta}\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}e^{-i\omega}} - \frac{e^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}e^{-i\omega}}\right)$$

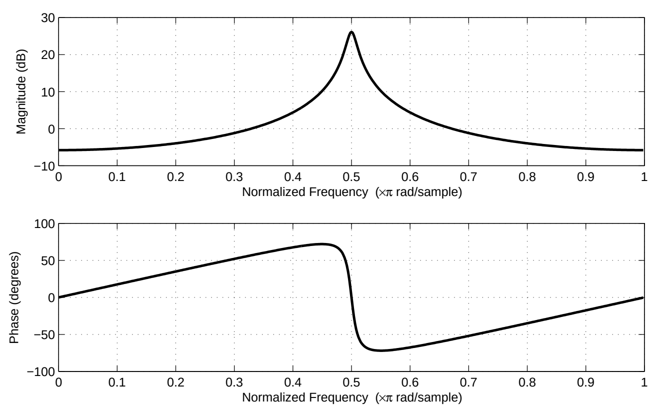
Η κρουστική απόκριση αυτού του συστήματος είναι

$$h(n) = r^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} u(n).$$

Η κρουστική απόκριση δίδεται στο Σχήμα 6.7 για $r = 0,975$ και $\theta = \frac{\pi}{2}$. Για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων δίδονται τα διαγράμματα μέτρου και φάσης στο Σχήμα 6.8.



Σχήμα 6.7: Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος δεύτερης τάξης με δύο μιγαδικές ρίζες.



Σχήμα 6.8: Τα διαγράμματα μέτρου και φάσης για ένα σύστημα δεύτερης τάξης με δύο μιγαδικές ρίζες.