Κεφάλαιο 4

Μετασχηματισμός Fourier

4.1 Ορισμός μετασχηματισμού Fourier

Για σήματα που δεν είναι περιοδικά υπό ορισμένες προϋποθέσεις που παρουσιάζονται παρακάτω ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Οι συνθήκες Dirichlet εξασφαλίζουν την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier:

- Το σήμα είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο σε όλη τη διάρκειά του,
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$
- Σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα, το σήμα έχει πεπερασμένη μεταβολή.
- Το πλήθος των ασυνεχειών του σήματος είναι πεπερασμένο. Επιπλέον οι ασυνέχειες, αν υπάρχουν, είναι πεπερασμένου εύρους.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίδεται από τη σχέση

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής Dirac είναι $F(\omega) = 1, \forall \omega$.

Παράδειγμα 4.1.1. Το σήμα

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha + i\omega}, \alpha > 0.$$

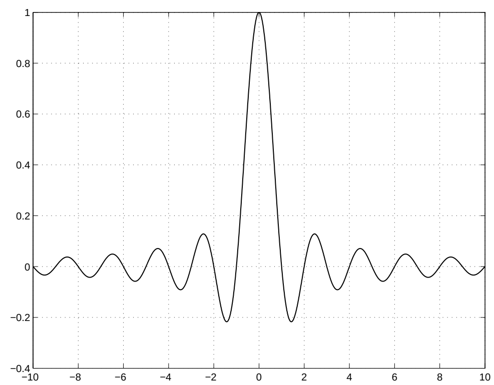
Παράδειγμα 4.1.2. Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} < |t| \end{cases}$$

έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega\frac{T}{2}} - e^{-i\omega\frac{T}{2}}}{i\omega} = T\frac{\sin\omega\frac{T}{2}}{\omega\frac{T}{2}} = T\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}.$$

Στο Σχήμα 4.1 δίδεται γραφικά η συνάρτηση sinc.



Σχήμα 4.1: Η συνάρτηση sinc

4.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

Γραμμικότητα Ο μετασχηματισμός ενός γραμμικού συνδυασμού δύο σημάτων ισούται με τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier.

Χρονική μετατόπιση Εάν $F(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός του σήματος $f(t)$, τότε ο μετασχηματισμός του σήματος $f(t-t_0)$ είναι

$$e^{-i\omega t_0} F(\omega).$$

Αντιστροφή του χρόνου Εάν $F(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός του σήματος $f(t)$, τότε ο μετασχηματισμός του σήματος $f(-t)$ είναι $F(-\omega)$.

Σχέση συζυγίας Για πραγματικά σήματα $f(t)$ ισχύει $F(-\omega) = \bar{F}(\omega)$. Εάν το σήμα είναι επιπλέον άρτιο, τότε ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι πραγματικός, ενώ εάν το σήμα είναι περιττό,τότε ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι καθαρά φανταστικός.

Αλλαγή της κλίμακας του χρόνου Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $f(\alpha t)$ θα είναι

$$\frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Μετατόπιση συχνότητας Ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $f(t)$ με τη φανταστική εκθετική συνάρτηση $e^{i\omega_0 t}$ συνεπάγεται τη μετατόπιση στη συχνότητα $F(\omega-\omega_0)$.

Δυϊκότητα Εάν $F(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός του σήματος $f(t)$, τότε ο μετασχηματισμός του σήματος $F(t)$ είναι $2\pi f(-\omega)$.

Παραγώγιση Ο μετασχηματισμός Fourier της παραγώγου ενός σήματος ισούται με $i\omega F(\omega)$.

Ολοκλήρωση Ο μετασχηματισμός Fourier του αορίστου ολοκληρώματος ενός σήματος

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

ισούται με

$$\frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega).$$

Περιοδικό σήμα Ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού σήματος με ανάπτυγμα σε σειρά Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{in\omega_0 t}$$

είναι

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\delta(\omega - n\omega_0).$$

Συνέλιξη Ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης δύο σημάτων ισούται με το γινόμενο των δύο αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier.

Γινόμενο Ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου δύο σημάτων προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)Y(\omega - \nu) d\nu$$

Ενέργεια Η ενέργεια του σήματος παραμένει αναλλοίωτη με το μετασχηματισμό,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Πρόκειται για τη σχέση του Parseval για συνεχή σήματα.

Συνέπεια των παραπάνω ιδιοτήτων είναι ο ακόλουθος πίνακας μετασχηματισμών Fourier.

$f(t)$	$F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\sin\omega_0 t$	$i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$

Παράδειγμα 4.2.1. Ο μετασχηματισμός Fourier της μοναδιαία βηματικής συνάρτησης $u(t)$ είναι

$$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega),$$

αφού προκύπτει ως ολοκλήρωμα της κατανομής Dirac. Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος πρόσημο

$$f(t) = 2u(t) - 1 \;\; \text{είναι} \;\; F(\omega) = \frac{2}{i\omega}.$$

Παράδειγμα 4.2.2. Το σήμα

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$$

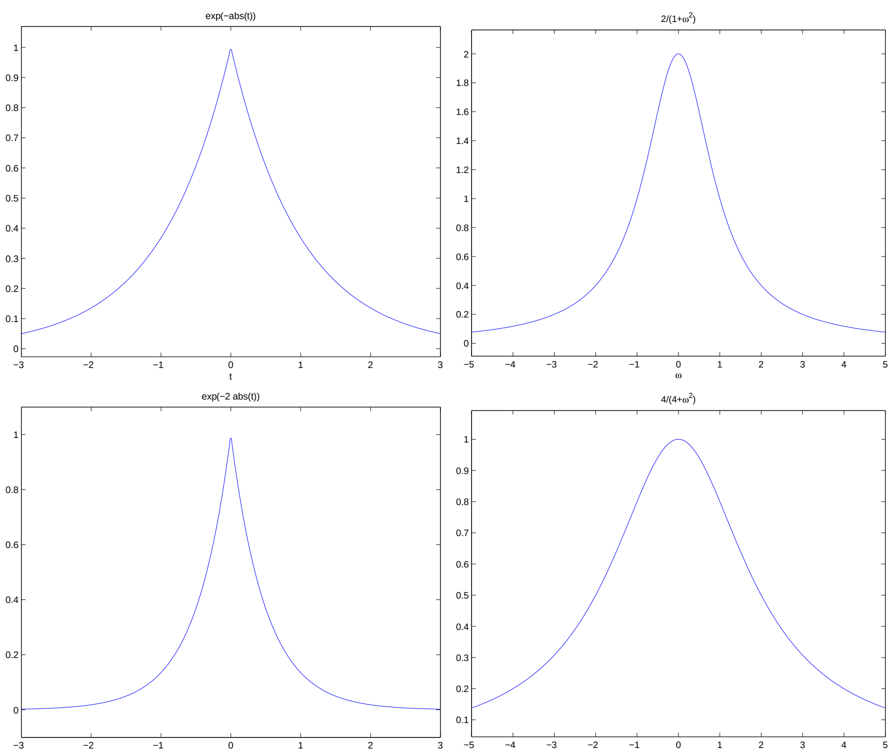
γράφεται $x(t) = x_1(t) + x_1(-t)$, για $t \neq 0$, όπου

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t).$$

Άρα, λόγω γραμμικότητας, θα έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Στο Σχήμα 4.2 δίδεται τόσο το σήμα, όσο και ο μετασχηματισμός Fourier για δύο τιμές της παραμέτρου α. Επιδεικνύεται επομένως και η ιδιότητα της αλλαγής της κλίμακας του χρόνου. Η μείωση της χρονικής έκτασης του σήματος συνεπάγεται μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων. Κατά



Σχήμα 4.2: Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος του Παραδείγματος 4.2.2 για δύο τιμές του α.

συνέπεια, λόγω δυϊκότητας, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{\alpha^2 + t^2}$$

είναι

$$X(\omega) = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\omega|}.$$

Παράδειγμα 4.2.3. Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{\sin \alpha t}{t}$$

είναι, λόγω δυϊκότητας,

$$X(\omega) = \begin{cases} \pi, & |\omega| \leqslant \alpha \\ 0, & |\omega| > \alpha \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.2.4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του

$$X(\omega) = \frac{1}{(\alpha + i\omega)^2}$$

προκύπτει ως η συνέλιξη του σήματος του Παραδείγματος 4.1.1 με τον ευαυτό του. Οπότε βρίσκουμε

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = te^{-\alpha t}, \alpha > 0.$$

Παράδειγμα 4.2.5. Το σήμα $s(t) = m(t)\cos\omega_c t$ συνιστά διαμόρφωση του πλάτους ενός φέροντος ημιτονοειδούς σήματος για τη μετάδοση του σήματος $m(t)$. Η συχνότητα ω_c του φέροντος σήματος είναι κατά πολύ μεγαλύτερη της μέγιστης συχνότητας του σήματος $m(t)$. Τυπικά το εύρος συχνοτήτων του σήματος θα μπορούσε να είναι 10 kHz, ενώ η φέρουσα συχνότητα είναι εκατοντάδες kHz. Ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι

$$S(\omega) = \frac{1}{2}(M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)).$$

Έχουμε επομένως μετατόπιση στη συχνότητα. Ο δέκτης αυτού του σήματος συντονίζεται στη φέρουσα συχνότητα που σημαίνει ότι αρχικά πολλαπλασιάζει με το φέρον σήμα $p(t) = s(t)\cos\omega_c t$. Άρα

$$P(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}(M(\omega - 2\omega_c) + M(\omega + 2\omega_c)).$$

Με κατάλληλο φίλτρο μπορεί να εξαχθεί το σήμα $m(t)$.

4.3 Μετασχηματισμός Fourier και γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Ας υποθέσουμε ότι στην είσοδο ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος δίδεται ένα καθαρά φανταστικό εκθετικό σήμα με συχνότητα ω. Η απόκριση του συστήματος θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) c e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = ce^{i\omega t} H(\omega).$$

Επομένως η απόκριση είναι επίσης ένα καθαρά φανταστικό εκθετικό σήμα με την ίδια συχνότητα, και αλλάζει ο συντελεστής που είναι πολλαπλασιασμένος με $H(\omega)$. Άρα δεν υπάρχει αλλαγή της συχνότητας, αλλά του πλάτους και της φάσης, ανάλογα με τη συχνότητα. Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier του συστήματος προϋποθέτει την ευστάθεια του συστήματος.

Εάν στην είσοδο ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος δοθεί ένα περιοδικό σήμα με ανάπτυγμα σε σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{in\omega_0 t},$$

η απόκριση θα είναι επίσης ένα περιοδικό σήμα

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) H(n\omega_0) e^{in\omega_0 t}.$$

Τέλος επανερχόμαστε στη γενική σχέση της συνέλιξης και στη σχέση που συνδέει την είσοδο και την έξοδο στο πεδίο των συχνοτήτων

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega).$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης $H(\omega)$ δείχνει ότι το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα λειτουργεί ως φίλτρο στις συχνότητες. Η απόκριση στις συχνότητες ονομάζεται επίσης φάσμα του συστήματος. Εφόσον το φάσμα του συστήματος είναι μια μιγαδική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με το μέτρο και το όρισμα, που ορίζει τη συνάρτηση της φάσης. Περιοριζόμενοι σε πραγματικά σήματα γνωρίζουμε ότι για τις αρνητικές συχνότητες η απόκριση είναι συζυγής αυτής που προκύπτει για τις αντίστοιχες θετικές συχνότητες. Επομένως το μέτρο θα είναι μια άρτια συνάρτηση και η φάση θα είναι μια περιττή συνάρτηση. Και για τα δύο είναι αρκετό να παρασταθούν μόνο για τις θετικές συχνότητες. Το $|H(\omega)|^2$ ονομάζεται φάσμα ισχύος του συστήματος. Η πληροφορία που περιέχεται στη φάση είναι πολύ σημαντική. Στο Σχήμα 4.3 δίδεται μία εικόνα που αποκαταστάθηκε μόνο με την πληροφορία της φάσης, όπου φαίνεται ότι στη φάση περιέχεται πληροφορία για τις απότομες αλλαγές του σήματος της εικόνας.

Συχνά είναι προτιμότερο το φάσμα του σήματος να παρασταθεί γραφικά σε ένα λογαριθμικό διάγραμμα τόσο για τις αποκρίσεις, όσο και για τις συχνότητες. Αυτός ο τρόπος παράστασης διευκολύνει στην περίπτωση που συνδυάζονται συστήματα στη σειρά. Συγκεκριμένα για το μέτρο δίδεται η γραφική παράσταση του

$$20 \log_{10} |H(\omega)|$$

Η ποσότητα αυτή μετριέται σε decibels (db) και παριστάνεται σε λογαριθμικό άξονα και για τις συχνότητες. Η γραφική παράσταση που προκύπτει ονομάζεται διάγραμμα Bode.

Παράδειγμα 4.3.1. Αν η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0,$$

τότε η απόκριση στις συχνότητες είναι (βλέπε Παράδειγμα 4.1.1)

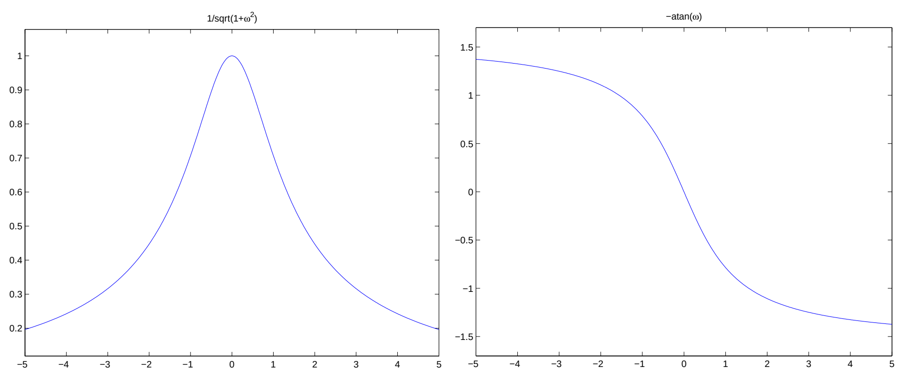
$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

Σχήμα 4.3: Μια εικόνα και η αναπαράστασή της μόνο με την πληροφορία της φάσης.

Το μέτρο και η φάση θα είναι

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \quad \text{και} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\alpha}.$$

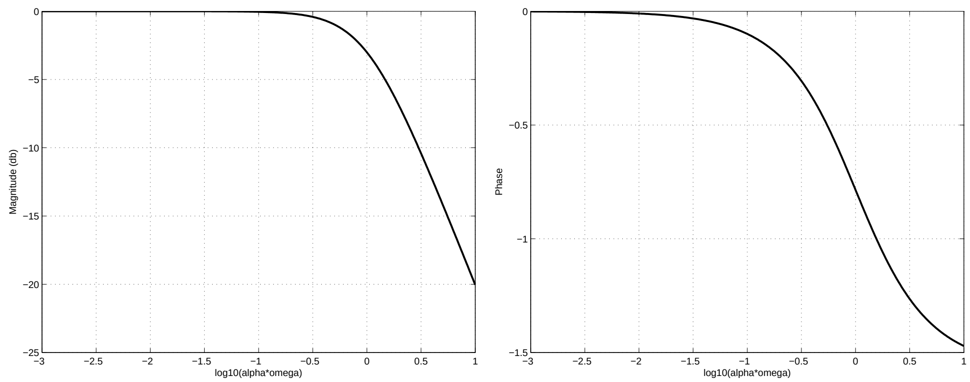
Το μέτρο και η φάση παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 4.4. Δίδονται ακόμη τα διαγράμματα Bode στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.4: Το μέτρο και η φάση της απόκρισης του συστήματος του Παραδείγματος 4.3.1.

Ένα φίλτρο ονομάζεται ιδανικό εάν διατηρεί αναλλοίωτες ορισμένες συχνότητες, ενδεχόμενα με γραμμική μεταβολή της φάσης, ενώ αποκόπτει τέλεια όλες τις άλλες συχνότητες. Ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο, με συχνότητα αποκοπής ω_c, έχει απόκριση στις συχνότητες

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



Σχήμα 4.5: Το διάγραμμα Bode για το μέτρο και τη φάση της απόκρισης του συστήματος του Παραδείγματος 4.3.1.

Επομένως η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}.$$

Η κρουστική αυτή απόκριση δεν υλοποιείται ακριβώς. Σε σχέση με προσεγγίσεις αυτής της απόκρισης είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθούν άλλα φίλτρα που μπορούν να υλοποιηθούν ακριβώς, και επιπλέον να είναι αιτιατά, εάν αυτό απαιτείται. Σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού φίλτρου ορίζεται εκεί όπου η απόκριση είναι -3 decibels ως προς την απόκριση στη συχνότητα 0, δηλαδή μειώνεται κατά το ήμισυ. Για το σύστημα του Παραδείγματος 4.3.1 η συχνότητα αποκοπής είναι α. Σημειώνεται ότι η απόκριση στη συχνότητα 0 είναι

$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt.$$

Συστήματα όπως αυτά που παρουσιάζονται στη συνέχεια θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την υλοποίηση ενός βαθυπερατού φίλτρου. Υποθέτουμε ότι η σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος δίδεται μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b(k)\frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

Τότε θα ισχύει

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)(i\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b(k)(i\omega)^k X(\omega).$$

Άρα

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)(i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a(k)(i\omega)^k}.$$

Θα θεωρήσουμε ιδιαίτερα την περίπτωση όπου $b(0) = 1, b(k) = 0, 1 \leqslant k \leqslant M$, οπότε η απόκριση στις συχνότητες προκύπτει ως το αντίστροφο ενός πολυωνύμου του $i\omega$. Ο βαθμός του πολυωνύμου ταυτίζεται με την τάξη της διαφορικής εξίσωσης και κατ΄ επέκταση του συστήματος.

Το σύστημα πρώτης τάξης παρουσιάσθηκε στο Παράδειγμα 4.3.1. Θα εξετάσουμε στο ακόλουθο παράδειγμα την περίπτωση ενός συστήματος δεύτερης τάξης.

Παράδειγμα 4.3.2. Ας είναι

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(i\omega) + (i\omega)^2},$$

με $\zeta > 0$, η απόκριση στις συχνότητες ενός συστήματος. Εάν $\zeta = 1$

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n + i\omega)^2},$$

οπότε η κρουστική απόκριση είναι

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t).$$

Εάν $\zeta \neq 1$, το πολυώνυμο του παρανομαστή έχει δύο διακριτές ρίζες,

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \ \text{ και } \ c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(i\omega - c_1)(i\omega - c_2)} = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{1}{i\omega - c_1} - \frac{1}{i\omega - c_2} \right).$$

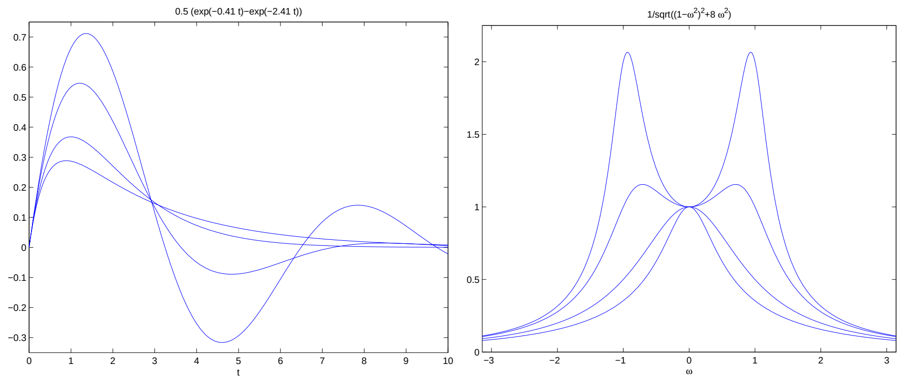
Εάν $\zeta > 1$, οι ρίζες είναι πραγματικές και η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(e^{c_1 t} - e^{c_2 t} \right) u(t).$$

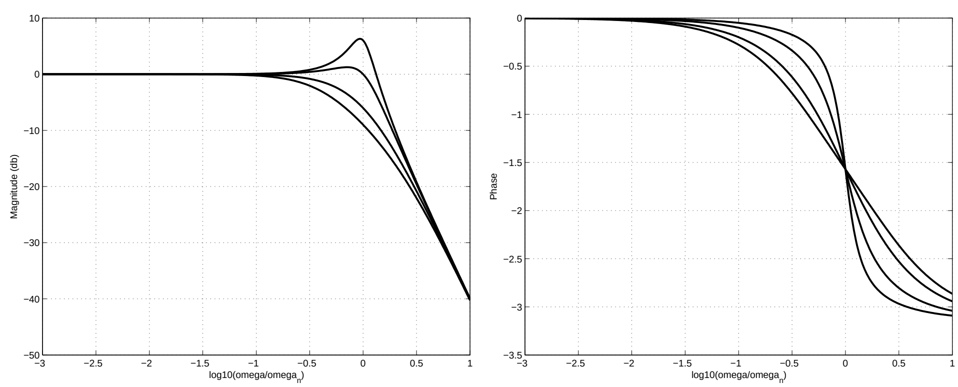
Εάν $0 < \zeta < 1$, οι ρίζες είναι μιγαδικές και η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) u(t).$$

Στο Σχήμα 4.6 δίδεται δεξιά η κρουστική απόκριση του συστήματος κατά σειρά από πάνω προς τα κάτω για τις τιμές του $\zeta = 0.25, 0.5, 1, 1.41$. Για τις ίδιες τιμές και με την ίδια σειρά δίδεται το μέτρο της απόκρισης στις συχνότητες αριστερά στο ίδιο Σχήμα. Στο Σχήμα 4.7 δίδονται τα διαγράμματα Bode για το μέτρο (δεξιά) και τη φάση (αριστερά).



Σχήμα 4.6: Η κρουστική απόκριση και το μέτρο της απόκρισης στις συχνότητες του συστήματος του Παραδείγματος 4.3.2 για διαφορετικές τιμές του ζ.



Σχήμα 4.7: Το διάγραμμα Bode για το μέτρο και τη φάση της απόκρισης του συστήματος του Παραδείγματος 4.3.2.