

## Κεφάλαιο 3

# Αναπαράσταση περιοδικών σημάτων με σειρές Fourier

### 3.1 Ορισμός σειράς Fourier

Η ακόλουθη σειρά ονομάζεται τριγωνομετρική

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\omega_0 t}.$$

Η γωνιακή συχνότητα  $\omega_0 > 0$  είναι σταθερά και οι μιγαδικοί αριθμοί  $c(n)$  είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος. Εάν η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει, το άθροισμα θα είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Τίθεται κατά συνέπεια το ερώτημα αν για δοσμένο περιοδικό σήμα  $f(t)$ , με περίοδο  $T$ , υπάρχει τριγωνομετρική σειρά που να συγκλίνει σε αυτό. Σε περίπτωση που υπάρχει, θα ονομάζεται σειρά Fourier. Οι συντελεστές της σειράς δίδονται από τη σχέση

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Οι συντελεστές προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη την ορθογωνιότητα των καθαρά μιγαδικών εκθετικών σημάτων

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega_0 t} dt = \delta(n).$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με πραγματικά περιοδικά σήματα και θα θέσουμε

$$c(n) = \frac{1}{2}(a(n) - ib(n)),$$

οπότε

$$c(-n) = \bar{c}(n) = \frac{1}{2}(a(n) + ib(n)).$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε

$$f(t) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sin n\omega_0 t.$$

Κατά συνέπεια θα είναι

$$a(n) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt,$$

$$b(n) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt.$$

Οι συνθήκες Dirichlet εξασφαλίζουν την ύπαρξη της σειράς Fourier.

- Το σήμα είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο σε μια περίοδο,

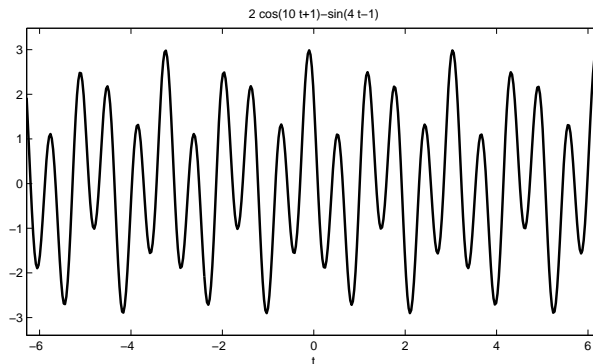
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty.$$

- Σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα, το σήμα έχει πεπερασμένη μεταβολή, δηλαδή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου το πλήθος των μέγιστων και των ελάχιστων του σήματος είναι πεπερασμένο.
- Το πλήθος των ασυνεχειών του σήματος κατά τη διάρκεια μιας περιόδου είναι πεπερασμένο. Επιπλέον οι ασυνέχειες, αν υπάρχουν, είναι πεπερασμένου εύρους.

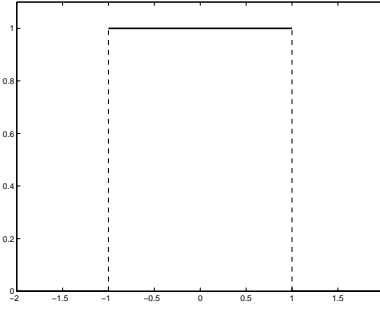
**Παράδειγμα 3.1.1.** Το σήμα  $x(t) = 2 \cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$  είναι περιοδικό με περίοδο  $T = \pi$  και  $\omega_0 = 2$  (Σχήμα 3.1). Θα είναι

$$x(t) = e^{i(10t+1)} + e^{-i(10t+1)} + \frac{i}{2} \left( e^{i(4t-1)} - e^{-i(4t-1)} \right).$$

Άρα υπάρχουν τέσσερις όροι στη σειρά για  $n = \pm 2$  και  $n = \pm 5$ . Επομένως  $c(n) = 0, n \neq$



Σχήμα 3.1: Το περιοδικό σήμα του Παραδείγματος 3.1.1.



Σχήμα 3.2: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.2 ( $T = 4, T_1 = 2$ ).

$\pm 2, \pm 5$ , και

$$c(2) = \frac{i}{2}e^{-i} = \frac{1}{2}(\sin 1 + i \cos 1) = 0,42 + i0,27 \text{ και } c(-2) = \bar{c}(2)$$

$$c(5) = e^i = \cos 1 + i \sin 1 = 0,54 + i0,84 \text{ και } c(-5) = \bar{c}(5). \quad \square$$

Στην περίπτωση όπου το σήμα είναι άρτιο,  $f(t) = f(-t)$ , τότε όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί, δηλαδή  $b(n) = 0, \forall n$ . Ενώ στην περίπτωση που το σήμα είναι περιττό,  $f(t) = -f(-t)$ , τότε όλοι οι συντελεστές είναι φανταστικοί, δηλαδή  $a(n) = 0, \forall n$ .

**Παράδειγμα 3.1.2.** Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T_1}{2} \\ 0, & \frac{T_1}{2} < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

είναι άρτιο και παρουσιάζει δύο πεπερασμένες ασυνέχειες στη διάρκεια μιας περιόδου (Σχήμα 3.2).

Οι συντελεστές της σειράς θα είναι

$$a(0) = \frac{2T_1}{T}$$

$$a(n) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \cos \frac{2n\pi t}{T} dt = 2 \int_{-\frac{T_1}{2T}}^{\frac{T_1}{2T}} \cos 2n\pi\tau d\tau = \frac{2 \sin n\pi \frac{T_1}{T}}{n\pi}, n \neq 0.$$

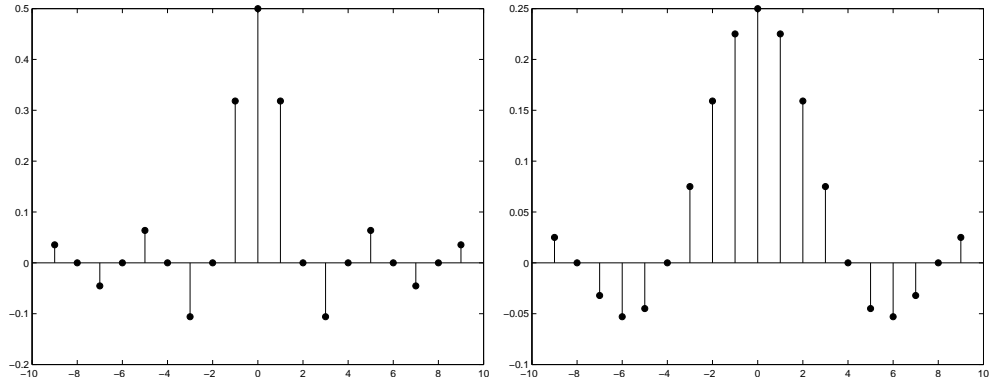
Οι συντελεστές δίδονται στο Σχήμα 3.3 για δύο διαφορετικές τιμές του λόγου  $T_1/T$ .

**Παράδειγμα 3.1.3.** Θεωρούμε ένα περιοδικό σήμα με περίοδο  $T$ , όπου το σήμα στην κύρια περίοδο είναι

$$x(t) = 1 - 2\frac{|t|}{T}, |t| \leq \frac{T}{2}.$$

Το σήμα είναι άρτιο, επομένως θα έχουμε

$$a(0) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2\frac{|t|}{T}\right) dt = 1$$

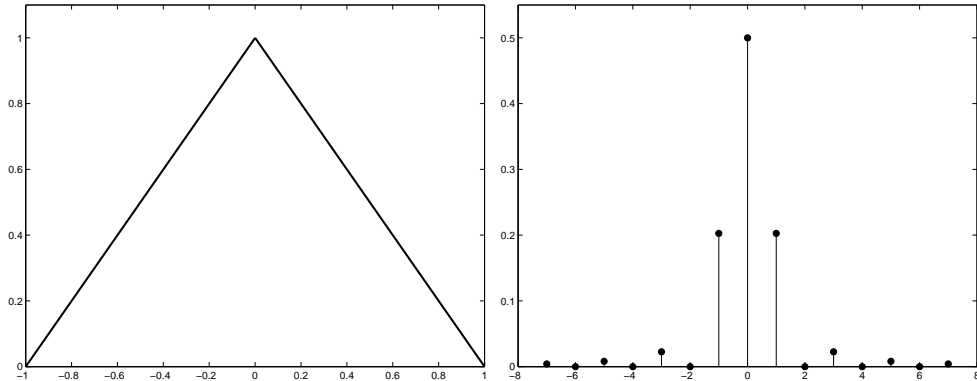


Σχήμα 3.3: Οι συντελεστές Fourier  $c$  του σήματος του Παραδείγματος 3.1.2 (για  $T_1/T = 0, 5$  και  $T_1/T = 0, 25$ ).

$$a(n) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2\frac{|t|}{T}\right) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2\frac{t}{T}\right) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$a(n) = 2 \int_0^1 (1 - \tau) \cos n\pi\tau d\tau = \frac{2}{(n\pi)^2} (1 - (-1)^n).$$

Στο Σχήμα 3.4 δίδεται το σήμα για  $T = 2$  και οι συντελεστές Fourier  $c$ .



Σχήμα 3.4: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.3 και οι συντελεστές Fourier  $c$ .

**Παράδειγμα 3.1.4.** Θεωρούμε ένα περιοδικό σήμα με περίοδο  $T$ , όπου το σήμα στην κύρια περίοδο είναι

$$x(t) = \cos \frac{\pi t}{T}, |t| \leq \frac{T}{2}.$$

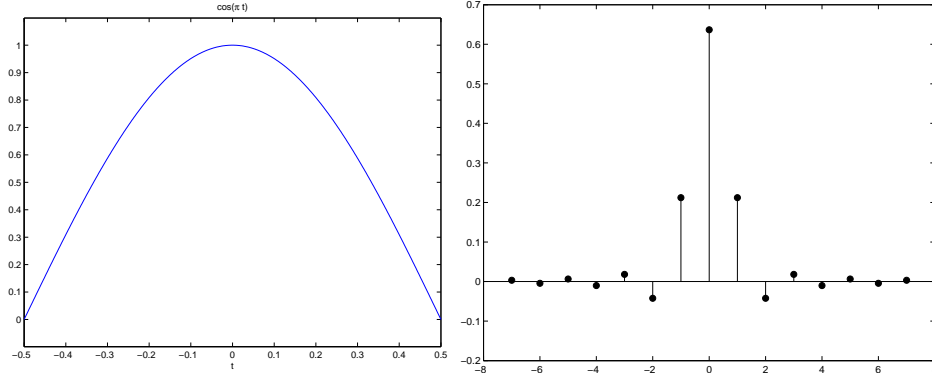
Το σήμα είναι άρτιο, επομένως θα έχουμε

$$a(n) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \tau \cos 2n\tau d\tau$$

$$a(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n+1)\tau + \cos(2n-1)\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} \right)$$

$$a(n) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) = \frac{4(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi}.$$

Στο Σχήμα 3.5 δίδεται το σήμα για  $T = 1$  και οι συντελεστές Fourier  $c$ .



Σχήμα 3.5: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.4 και οι συντελεστές Fourier  $c$ .

**Παράδειγμα 3.1.5.** Θεωρούμε ένα περιοδικό σήμα με περίοδο  $T$ , όπου το σήμα στην κύρια περίοδο είναι

$$x(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \frac{2\pi t}{T} + \rho^2}, |t| \leq \frac{T}{2}, |\rho| < 1.$$

Το σήμα είναι άρτιο, επομένως θα έχουμε  $c(n) = c(-n)$ . Υπολογίζουμε για  $n > 0$

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{(1 - \rho^2)e^{-i2\pi n \frac{t}{T}}}{1 - 2\rho \cos \frac{2\pi t}{T} + \rho^2} dt.$$

Θέτουμε

$$z = e^{-i2\pi \frac{t}{T}},$$

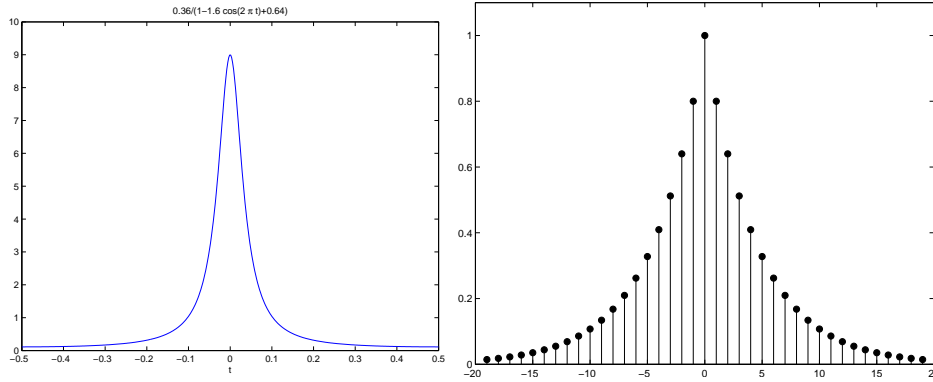
οπότε το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί σε ένα επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα επί του μοναδιαίου κύκλου με φορά αρνητική. Άρα

$$c(n) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{n-1} dz}{(1 - \rho z)(1 - \rho z^{-1})} = \frac{1 - \rho^2}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^n dz}{(1 - \rho z)(z - \rho)}.$$

Για την εύρεση του ολοκληρώματος μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, αφού η συνάρτηση  $\frac{z^n}{1 - \rho z}$  είναι αναλυτική στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη και την αρτιότητα του σήματος, βρίσκουμε

$$c(n) = \rho^{|n|}$$

Στο Σχήμα 3.6 δίδεται το σήμα για  $\rho = 0,8$  και οι συντελεστές Fourier  $c$ .



Σχήμα 3.6: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.1.5 και οι συντελεστές Fourier  $c$ .

**Παράδειγμα 3.1.6.** Το σήμα

$$x(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

είναι περιοδικό με περίοδο  $T$ . Μπορεί επομένως να παρασταθεί με μια σειρά Fourier. Επειδή το σήμα είναι άρτιο, οι συντελεστές θα είναι

$$c(n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{\frac{2n\pi t}{T}} dt = 1.$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2k\pi \frac{t}{T}}.$$

## 3.2 Ιδιότητες σειράς Fourier

Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος με σειρά Fourier έχει κάποιες σημαντικές και χρήσιμες ιδιότητες που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

**Γραμμικότητα** Η αναπαράσταση ενός γραμμικού συνδυασμού δύο περιοδικών σημάτων που έχουν την ίδια θεμελιώδη περίοδο ισούται με τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων αναπαραστάσεων με σειρά Fourier.

**Χρονική μετατόπιση** Εάν  $c(n)$  είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος για το περιοδικό σήμα  $f(t)$  με περίοδο  $T$ , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος του σήματος  $f(t - t_0)$  είναι

$$e^{-in\omega_0 t_0} c(n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

**Αντιστροφή του χρόνου** Εάν  $c(n)$  είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος για το περιοδικό σήμα  $f(t)$ , τότε οι συντελεστές του αναπτύγματος του σήματος  $f(-t)$  είναι  $c(-n)$ .

**Αλλαγή της κλίμακας του χρόνου** Εάν αλλάξει η κλίμακα του χρόνου οι συντελεστές του αναπτύγματος δεν αλλάζουν, αλλάζει όμως η περίοδος και η συχνότητα. Το σήμα  $f(at)$  θα έχει περίοδο  $T/a$ .

**Περιοδική συνέλιξη** Οι συντελεστές του αναπτύγματος της συνέλιξης κατά μία περίοδο δύο περιοδικών σημάτων που έχουν την ίδια θεμελιώδη περίοδο ισούνται με το γινόμενο των αντίστοιχων συντελεστών πολλαπλασιασμένο με το  $T$ .

**Γινόμενο** Οι συντελεστές του αναπτύγματος του γινομένου δύο περιοδικών σημάτων που έχουν την ίδια θεμελιώδη περίοδο προκύπτουν από τη συνέλιξη των δύο αντίστοιχων ακολουθιών των συντελεστών Fourier.

**Μέση ισχύς** Η μέση ισχύς του σήματος προκύπτει ως το άθροισμα της ισχύος των συνιστωσών,

$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(n)|^2.$$

Πρόκειται για τη σχέση του Parseval για συνεχή περιοδικά σήματα.

**Παράδειγμα 3.2.1.** Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ -1, & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \end{cases}$$

είναι περιττό και ορίζει ένα περιοδικό σήμα με περίοδο  $T$ . Το σήμα αυτό προκύπτει ως η διαφορά δύο σημάτων, όπως αυτό του Παραδείγματος 3.1.2. Το πρώτο παίρνει την τιμή 2, έχει σχέση  $T_1/T = 0,5$  και καθυστέρηση  $T_1/2$ , δηλαδή

$$x_1(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$$

Επομένως οι συντελεστές θα είναι

$$c_1(0) = 1, \\ c_1(n) = 2e^{-i\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi} = -2i \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n\pi}, n \neq 0.$$

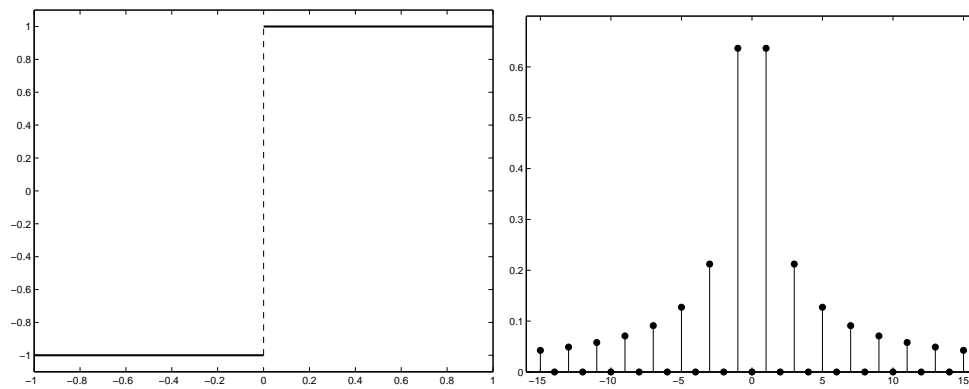
Οι συντελεστές του δευτέρου ( $x_2(t) = 1$ ) είναι μηδέν για  $n \neq 0$  και  $c_2(0) = 1$ . Οπότε

$$b(n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Στο Σχήμα 3.7 δίδεται το σήμα για  $T = 2$  και τα μέτρα των συντελεστών Fourier  $|c|$ .

**Παράδειγμα 3.2.2.** Θα εφαρμόσουμε τη σχέση του Parseval για την εύρεση της μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος του Παραδείγματος 3.1.5.

$$P_\infty = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{2|n|} \\ P_\infty = \sum_{n=-\infty}^0 \rho^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} - 1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} - 1 = \frac{2}{1-\rho^2} - 1 = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}.$$



Σχήμα 3.7: Μία περίοδος του σήματος του Παραδείγματος 3.2.1 και οι συντελεστές Fourier  $|c|$ .