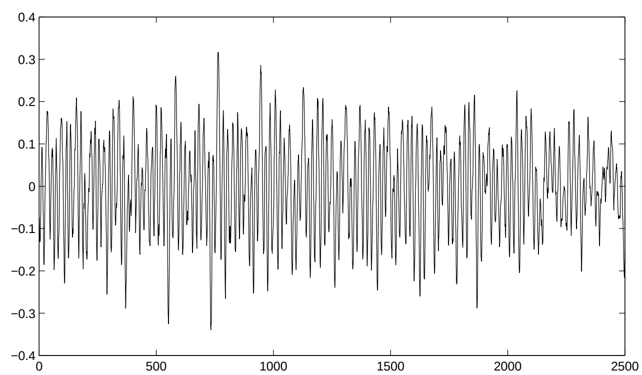
Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες σημάτων και συστημάτων

2.1 Σήματα

Τα σήματα αντιστοιχούν σε φυσικές οντότητες που φέρουν πληροφορία. Μπορούν να παρασταθούν ως συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών. Σε ηλεκτρικά κυκλώματα το σήμα μπορεί να είναι η ένταση ή η τάση ως συνάρτηση του χρόνου. Στα ακουστικά σήματα το σήμα μπορεί να είναι ο ήχος (π.χ. φωνή ή μουσική) επίσης ως συνάρτηση του χρόνου. Σε μια εικόνα το σήμα μπορεί να είναι η φωτεινή ένταση ως συνάρτηση της θέσης σε ένα επίπεδο. Σ' ένα σήμα βίντεο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τόσο ο χρόνος, όσο και η θέση.



Σχήμα 2.1: Ένα σήμα μουσικής διάρκειας λίγο μεγαλύτερης από 0,1 sec.

Τα σήματα διακρίνονται σε συνεχή ή διακριτά, αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής ή διακριτή αντίστοιχα. Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συχνά ο χρόνος, γι' αυτό γράφουμε $x(t)$ για τις τιμές ενός συνεχούς σήματος. Για ένα διακριτό σήμα γράφουμε $x(n)$. Τα σήματα μπορεί να είναι πραγματικά ή μιγαδικά.

Η ενέργεια ενός συνεχούς σήματος στο διάστημα $[a, b]$ ορίζεται ως

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt.$$

Εάν η ενέργεια παραμένει πεπερασμένη όταν τα όρια του διαστήματος εκτείνονται στο άπειρο, τότε μιλάμε για σήματα πεπερασμένης ενέργειας,

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Ορίζεται επίσης η μέση ισχύς

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt.$$

Ένα σήμα μπορεί να είναι άπειρης ενέργειας και πεπερασμένης ισχύος, όπως για παράδειγμα ένα σήμα με σταθερή τιμή. Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται η ενέργεια για διακριτά σήματα και διακρίνονται οι περιπτώσεις πεπερασμένης ενέργειας ή ισχύος.

Παράδειγμα 2.1.1. Το σήμα $x(t) = \cos t$ είναι άπειρης ενέργειας, αλλά πεπερασμένης ισχύος. Πράγματι

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2 t dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{\sin 2T}{4T} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Στην επεξεργασία των σημάτων χρησιμοποιούνται μετασχηματισμοί της ανεξάρτητης μεταβλητής. Μια απλή αλλαγή είναι η μετατόπιση $x(t-t_0)$, που στο χρόνο είναι μια καθυστέρηση $(t_0 > 0)$ ή μια προπόρευση $(t_0 < 0)$. Μία άλλη αλλαγή είναι η αναστροφή του χρόνου, $x(-t)$. Τέλος, μπορεί να αλλάξει η κλίμακα του χρόνου, $x(\alpha t)$, που σημαίνει είτε επιτάχυνση $(\alpha > 0)$, είτε επιβράδυνση $(\alpha < 0)$. Στο Σχήμα 2.2 δίδεται ένα παράδειγμα τέτοιων αλλαγών.

Ένα συνεχές σήμα θα ονομάζεται περιοδικό, αν υπάρχει θετικό T, ώστε για κάθε t να ισχύει

$$x(t) = x(t + T).$$

Η μικρότερη τιμή του T για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση ονομάζεται θεμελιώδης περίοδος. Για διακριτά σήματα θα έχουμε για κάθε n

$$x(n) = x(n + N)$$

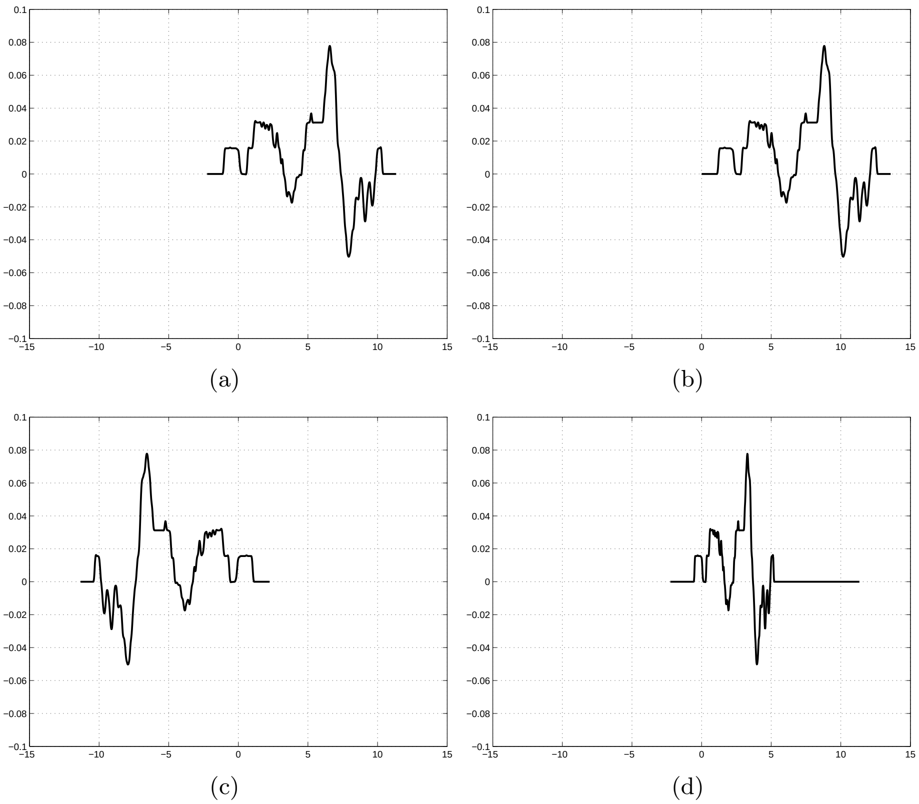
και ορίζεται αντίστοιχα η ακέραια θεμελιώδης περίοδος. Στο Σχήμα 2.3 δίδεται ένα τμήμα ενός διακριτού δισδιάστατου περιοδικού σήματος.

Παράδειγμα 2.1.2. Το σήμα $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$ είναι περιοδικό. Πράγματι υπάρχει T, ώστε

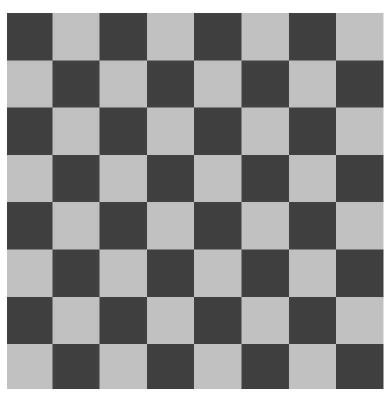
$$2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1) = 2\cos(10(t + T) + 1) - \sin(4(t + T) - 1).$$

Αρκεί προς τούτο να υπάρχουν ακέραιοι k και l,ώστε

$$10T = 2k\pi, \quad 4T = 2l\pi.$$



Σχήμα 2.2: Άνω αριστερά : αρχικό σήμα. Άνω δεξιά : καθυστέρηση του σήματος. Κάτω αριστερά : αντιστροφή του χρόνου. Κάτω δεξιά : αλλαγή κλίμακας του χρόνου.



Σχήμα 2.3: Ένα περιοδικό σήμα εικόνας τόσο οριζόντια, όσο και κατακόρυφα.

Για την εύρεση της θεμελιώδους περιόδου, αρκεί να προσδιορισθούν οι μικρότεροι θετικοί ακέραιοι για τους οποίους ισχύει η παραπάνω σχέση, δηλαδή $k = 5, l = 2$. Άρα

$$T_0 = \pi. \quad \square$$

Ένα συνεχές πραγματικό εκθετικό σήμα ορίζεται ως

$$x(t) = Ae^{\alpha t}.$$

Ένα συνεχές καθαρά φανταστικό εκθετικό σήμα ορίζεται ως

$$x(t) = ce^{i\omega_0 t}.$$

Το σήμα αυτό είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}.$$

Ο συντελεστής c μπορεί να είναι μιγαδικός αριθμός

$$c = Ae^{i\phi}.$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$x(t) = A(\cos(\omega_0 t + \phi) + i \sin(\omega_0 t + \phi)).$$

Τόσο το πραγματικό, όσο και το φανταστικό, μέρος του μιγαδικού σήματος είναι ημιτονοειδές σήμα. Το ω_0 ονομάζεται γωνιακή συχνότητα, από την οποία προκύπτει η συχνότητα

$$f_0 = \frac{|\omega_0|}{2\pi},$$

με μονάδα μέτρησης το Hz, αν ο χρόνος μετράται σε sec. Επομένως η συχνότητα είναι το αντίστροφο της περιόδου. Το A ορίζει το πλάτος του ημιτονοειδούς σήματος, ενώ το ϕ ονομάζεται φάση του σήματος. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού σήματος διαφέρουν μόνο ως προς τη φάση κατά $\pi/2$.

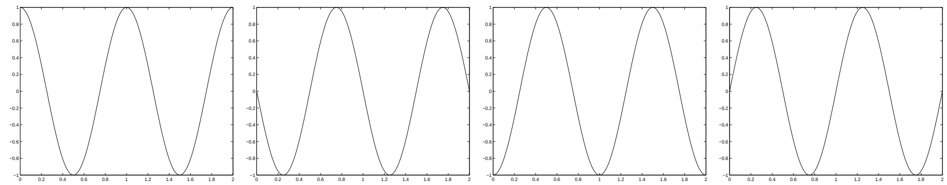
Παράδειγμα 2.1.3. Στις ψηφιακές τηλεπικοινωνίες ημιτονοειδή σήματα που διαφέρουν κατά τη φάση μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση ψηφιακών μηνυμάτων. Για 4 διαφορετικά μηνύματα (2 bits) μπορούν να χρησιμοποιθούν τα σήματα

$$s_k(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_k), \quad \phi_k = \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3,$$

που παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 2.4.

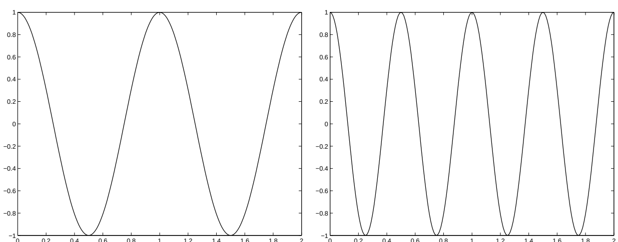
Παράδειγμα 2.1.4. Στις ψηφιακές τηλεπικοινωνίες ημιτονοειδή σήματα που διαφέρουν κατά τη συχνότητα χρησιμοποιούνται επίσης για τη μετάδοση ψηφιακών μηνυμάτων. Για 2 διαφορετικά μηνύματα (1 bit) μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα σήματα

$$s_k(t) = A\cos(k\omega_0 t), \quad k = 1, 2$$



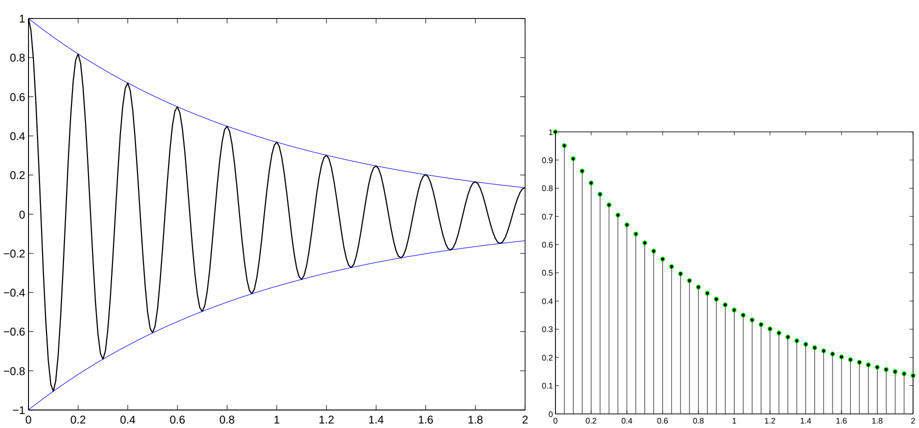
(a) (b) (c) (d)

Σχήμα 2.4: Σήματα μηνυμάτων που διακρίνονται ως προς τη φάση.



(a) (b)

Σχήμα 2.5: Σήματα μηνυμάτων που διακρίνονται ως προς τη συχνότητα.



(a) (b)

Σχήμα 2.6: Ένα ημιτονοειδές σήμα μειούμενου πλάτους και ένα διακριτό πραγματικό εκθετικό σήμα.

που παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 2.5. $\square$

Τέλος ορίζεται το γενικό μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = ce^{(\alpha+i\omega_0)t} = Ae^{\alpha t}(\cos(\omega_0 t + \phi) + i\sin(\omega_0 t + \phi)).$$

Στο Σχήμα 2.6 αριστερά δίδεται το πραγματικό μέρος ενός γενικού μιγαδικού εκθετικού σήματος με $\alpha < 0$.

Κατά αντίστοιχο τρόπο ορίζονται τα εκθετικά και ημιτονοειδή διακριτά σήματα:

- πραγματικό εκθετικό σήμα
$$x(n) = A\alpha^n,$$
όπως αυτό που δίδεται στο Σχήμα 2.6 δεξιά.
- καθαρά φανταστικό εκθετικό σήμα
$$x(n) = Ae^{i\phi}e^{i\omega_0 n} = A(\cos(\omega_0 n + \phi) + i\sin(\omega_0 n + \phi)),$$
- γενικό μιγαδικό εκθετικό σήμα
$$x(n) = A\alpha^n(\cos(\omega_0 n + \phi) + i\sin(\omega_0 n + \phi)),$$

Ορίζεται επίσης το διακριτό μοναδιαία κρουστικό σήμα

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n \neq 0. \end{cases}$$

Το διακριτό σήμα μοναδιαίου βήματος ορίζεται ως

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0, \\ 0 & n < 0. \end{cases}$$

Αντίστοιχα ορίζεται στο συνεχές πεδίο ο κρουστικός παλμός Dirac

$$\delta(t) = 0, t \neq 0,$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(\tau) d\tau = 1.$$

Το συνεχές σήμα μοναδιαίου βήματος ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geqslant 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό τον ορισμό μπορούμε να ορίσουμε ένα σήμα σταθερής μοναδιαίας τιμής και διάρκειας T

$$p(t) = u(t) - u(t - T).$$

2.2 Συστήματα

Ένα σύστημα δέχεται ως είσοδο ένα σήμα και δίδει ως απόκριση ένα μοναδικό σήμα. Με τον ίδιο τρόπο που τα σήματα διακρίνονται σε συνεχή και διακριτά και τα συστήματα διακρίνονται σε συνεχή και διακριτά.

Τα συστήματα διακρίνονται σε αυτά με μνήμη και σε αυτά χωρίς μνήμη. Στα τελευταία η απόκριση εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή, όπως $y(t) = x^2(t)$. Ένας αθροιστής είναι ένα σύστημα με μνήμη

- συνεχές
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau,$$
- διακριτό
$$y(n) = \sum_{-\infty}^{n} x(k).$$

Ένα σύστημα ονομάζεται αιτιατό, αν η απόκριση εξαρτάται από την τρέχουσα και τις παρελθούσες τιμές. Διαφορετικά ονομάζεται μη αιτιατό. Ένα σύστημα χωρίς μνήμη είναι αιτιατό. Αιτιατοί επίσης είναι οι δύο παραπάνω αθροιστές.

Παράδειγμα 2.2.1. Το ακόλουθο σύστημα μέσης τιμής δεν είναι αιτιατό
$$y(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n-N}^{n+N} x(k). \quad \square$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αμετάβλητο αν, σε περίπτωση καθυστέρησης της εισόδου, η απόκρισή του παραμένει αμετάβλητη ως προς τις τιμές και έχει την ίδια καθυστέρηση με την είσοδο. Αν δηλαδή η απόκριση στο σήμα $x(t)$ είναι $y(t)$, τότε η απόκριση στο σήμα $x(t-\tau)$ θα είναι $y(t-\tau)$.

Παράδειγμα 2.2.2. Το σύστημα με σχέση εισόδου εξόδου $y(n) = nx(n)$ δεν είναι χρονικά αμετάβλητο. $\square$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό, αν, και μόνο αν, η απόκριση σε κάθε γραμμικό συνδυασμό σημάτων εισόδου είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων αποκρίσεων. Δηλαδή, στην περίπτωση των συνεχών συστημάτων, η απόκριση στο σήμα $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ θα είναι $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ για κάθε a_1, a_2.

Ένα σύστημα ονομάζεται ευσταθές, αν η απόκριση σε κάθε φραγμένη είσοδο είναι φραγμένη. Δηλαδή αν $|x(t)| < \infty$, τότε θα είναι επίσης $|y(t)| < \infty$.

Ένα σύστημα ονομάζεται αντιστρέψιμο, αν υπάρχει σύστημα τέτοιο ώστε να δέχεται ως είσοδο την απόκριση του αρχικού και να δίδει ως έξοδο την αρχική είσοδο, που είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα για διαφορετικές εισόδους να λαμβάνονται διαφορετικές έξοδοι, δηλαδή να υπάρχει ένα προς ένα αντιστοίχιση των σημάτων εισόδου-εξόδου.

2.3 Γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Στην περίπτωση που η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος είναι χρονικά αμετάβλητη, τότε η σχέση εισόδου-εξόδου, για ένα διακριτό σύστημα, γίνεται

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι $h(n)$ είναι η απόκριση του συστήματος στην ακολουθία $\delta(n)$. Γι' αυτό το λόγο ονομάζεται κρουστική απόκριση του συστήματος.
Παράδειγμα 2.3.1. Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι

$$h(n) = u(n+2)$$

και το σήμα εισόδου

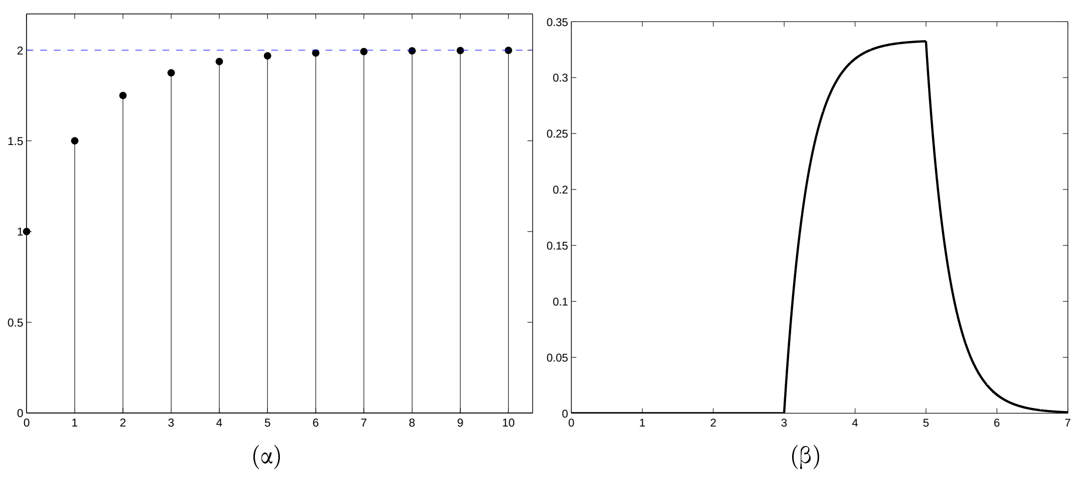
$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2).$$

Η απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u(k-2) = \sum_{k=2}^{n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u(n) \Leftrightarrow$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} u(n) = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) u(n).$$

Η απόκριση παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 2.7(α). □



Σχήμα 2.7: Η απόκριση του συστήματος των παραδειγμάτων 2.3.1 και 2.3.2.

Στην περίπτωση ενός συνεχούς συστήματος θα έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Και σε αυτή την περίπτωση η $h(t)$ θα είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Η πράξη που δίδει την απόκριση ονομάζεται συνέλιξη, είτε πρόκειται για διακριτό ή για συνεχές σύστημα.
Παράδειγμα 2.3.2. Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι

$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

και το σήμα εισόδου

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5).$$

Η απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y(t) = \int_3^{\min(t,5)} e^{-3(t-\tau)} d\tau.$$

Οπότε θα πρέπει να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το t.

- Για $t \leqslant 3$
$$y(t) = 0.$$
- Για $3 < t \leqslant 5$
$$y(t) = \int_3^t e^{-3(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-3)}\right).$$
- Για $5 < t$
$$y(t) = \int_3^5 e^{-3(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{3} e^{-3t}(e^{15} - e^{9}).$$

Η απόκριση παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 2.7(β). □

Η συνέλιξη έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα. Άρα ισχύει επίσης

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Η συνέλιξη έχει και την προσεταιριστική ιδιότητα, που σημαίνει ότι δύο συστήματα στη σειρά ισοδυναμούν με ένα σύστημα με κρουστική απόκριση τη συνέλιξη των δύο αντίστοιχων κρουστικών αποκρίσεων. Η συνέλιξη έχει επίσης την επιμεριστική ιδιότητα, που σημαίνει πως αν δύο συστήματα χρησιμοποιηθούν παράλληλα, με την ίδια είσοδο, και υπερτεθούν οι δύο έξοδοι, είναι ταυτόσημο μ' ένα σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι το άθροισμα των δύο κρουστικών αποκρίσεων. Το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης είναι για τα συνεχή σήματα ο κρουστικός παλμός Dirac

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau) d\tau.$$

Αντίστοιχα το μοναδιαία κρουστικό σήμα είναι το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης για διακριτά σήματα

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\delta(n-k).$$

Όπως έχει αναφερθεί ένα σύστημα ονομάζεται αιτιατό, αν η απόκριση έπεται χρονικά της εισόδου. Η συνθήκη για να είναι αιτιατό ένα σύστημα μπορεί να δοθεί για την κρουστική του απόκριση. Θα είναι

- για το συνεχές $h(t) = 0, \forall t < 0$,
- και για το διακριτό $h(n) = 0, \forall n < 0$.

Ένα σύστημα ονομάζεται ευσταθές, αν για μια φραγμένη είσοδο ($|x(n)| < \infty, \forall n$), η έξοδος είναι φραγμένη ($|y(n)| < \infty, \forall n$). Αυτό ισοδυναμεί με την ύπαρξη του ακόλουθου αθροίσματος

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Πράγματι, θα έχουμε

$$|y(n)| \leqslant \sum_{n'=-\infty}^{\infty} |h(n')x(n-n')| \leqslant \max |x(n)| \sum_{n'=-\infty}^{\infty} |h(n')| < \infty.$$

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή η συνθήκη ύπαρξης του παραπάνω αθροίσματος είναι αναγκαία για την ευστάθεια. Αρκεί θεωρήσουμε ως σήμα εισόδου το $x(n) = \text{ sign } (h(n))$. Τότε θα έχουμε

$$|y(0)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{ sign } (h(n))h(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται η ευστάθεια ενός συνεχούς συστήματος. Οπότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty.$$

Συχνά ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο και αιτιατό σύστημα περιγράφεται από μια εξίσωση διαφοράς,

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k).$$

Αντίστοιχα μπορεί να υπάρχει για τα συνεχή συστήματα μια περιγραφή μέσω μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης,

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b(k)\frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

Παράδειγμα 2.3.1. Ας θεωρήσουμε μια εξίσωση διαφοράς πρώτης τάξης

$$y(n) = ay(n-1) + x(n), \quad n \geqslant 0, \quad y(-1) = y_0.$$

Πρόκειται για μια αναδρομική σχέση που θα δώσει

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}x(k) + a^{n+1}y_0.$$

Επομένως η εξίσωση διαφοράς θα δίνει τη σχέση εισόδου-εξόδου ενός χρονικά αμετάβλητου γραμμικού συστήματος, αν η αρχική συνθήκη είναι μηδενική $y_0 = 0$. Οπότε θα πάρουμε την κρουστική απόκριση τους συστήματος

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι επίσης αιτιατό και θα είναι ευσταθές αν $|a| < 1$.