Κεφάλαιο 1

Στοιχεία μιγαδικής ανάλυσης

1.1 Μιγαδικοί αριθμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί ορίζονται ως διαταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y). Το σύστημα των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$, είναι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού α με διάνυσμα

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

και του μιγαδικού πολλαπλασιασμού

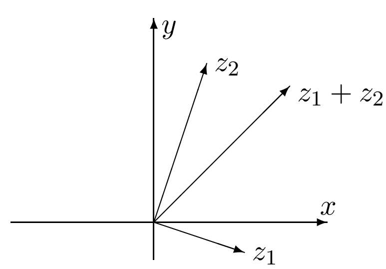
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Ο άξονας των x ονομάζεται πραγματικός και ο άξονας των y ονομάζεται φανταστικός. Το σημείο $(0, 1)$ συμβολίζεται με i. Με χρήση του μιγαδικού πολλαπλασιασμού προκύπτει ότι

$$i^2 = -1.$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί γράφονται

$$z = x + iy = \Re z + i\Im z.$$



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών.

Η πρόσθεση έχει την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα και ουδέτερο στοιχείο το 0. Ο πολλαπλασιασμός έχει την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα, ενώ ισχύει και η επιμεριστική ιδιότητα. Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το 1 και υπάρχει ο αντίστροφος κάθε μιγαδικού αριθμού, πλην του 0,

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}, z \neq 0.$$

Δεδομένου ότι οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν μια διανυσματική αναπαράσταση, μπορούν να παρασταθούν και σε πολική μορφή. Ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού αριθμού z το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος,

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα (x, y) με το θετικό πραγματικό ημιάξονα ονομάζεται όρισμα, θ, του μιγαδικού αριθμού. Το όρισμα ορίζεται μοναδικά για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό σε ένα γωνιακό διάστημα 2π. Η πρωτεύουσα τιμή του ορίσματος δίδεται ως εξής

$$\mathrm{Arg} z = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}, -\pi < \theta \leqslant \pi, z \neq 0.$$

Με την πολική αναπαράσταση απλοποιείται η έκφραση για το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών. Θα ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Μέσω αυτής της ιδιότητας προκύπτει ο τύπος του de Moivre που δίδει τη $n-$οστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού. Αν είναι $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Κατόπιν αυτού οι $n-$οστές ρίζες του $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι

$$z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

Παράδειγμα 1.1.1. Δεδομένου ότι οι μιγαδικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε σημεία στο επίπεδο, επίπεδες γραμμές ή καμπύλες μπορούν να παρασταθούν με χρήση μιγαδικών αριθμών. Η $z = z_0 + wt \quad (t \in \mathbb{R})$ παριστάνει μια ευθεία που περνά από το σημείο z_0 και έχει κλίση w. Η $|z - z_0| = r$ είναι η εξίσωση του κύκλου, ενώ η έλλειψη δίδεται από την εξίσωση $|z-a| + |z+a| = 2r$. $\square$

Παράδειγμα 1.1.2. Ας είναι $w \quad (w \neq 1)$ μία $n-$οστή ρίζα του 1. Ισχύει ότι

$$1 + w + \ldots + w^{n-1} = \frac{1-w^n}{1-w} = 0. \quad \square$$

Ορίζεται ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού

$$\bar{z} = x - iy.$$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, z \neq 0$

Παράδειγμα 1.1.3. Ισχύει η ταυτότητα του παραλληλογράμμου,

$$|a-b|^2 + |a+b|^2 = (a-b)(\overline{a-b}) + (a+b)(\overline{a+b}) = 2|a|^2 + 2|b|^2. \quad \square$$

Για το μέτρο ισχύουν οι εξής ανισότητες:

- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$
- $|\sum_{n=1}^{N} z_n w_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |z_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |w_n|^2}$

1.2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Ας είναι $A \subset \mathbb{C}$. Μια συνάρτηση που ορίζεται στο A αντιστοιχεί κάθε σημείο του σε ένα μιγαδικό αριθμό.

Παράδειγμα 1.2.1. Το ευρύτερο πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμό εκτός των $\pm i$. $\square$

Η εκθετική συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{C}$ ως

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

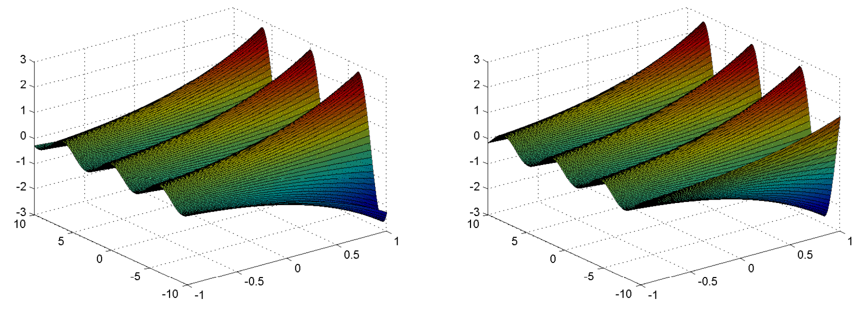
Η εκθετική συνάρτηση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
- $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$
- $e^{\pi i/2} = i, e^{i\pi} = -1, e^{3\pi i/2} = -i, e^{2i\pi} = 1$
- $|e^z| = e^x$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται στο $\mathbb{C}$ ως

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:



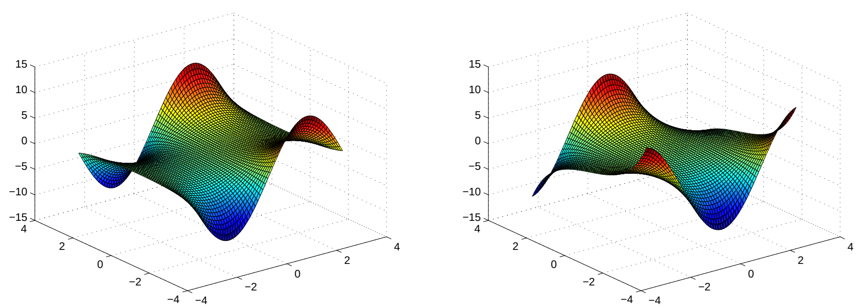
(a) (b)

Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της εκθετικής συνάρτησης.

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
- $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$
- $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

Παράδειγμα 1.2.2.

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i} = \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right). \quad \square$$



(a) (b)

Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης ημιτόνου.

Η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς, πλην του μηδενός, με πεδίο τιμών τέτοιο ώστε το μιγαδικό μέρος να εκτείνεται σε διάστημα 2π. Ο κύριος κλάδος της λογαριθμικής συνάρτησης ορίζεται για τιμές ώστε $-\pi < \Im \mathrm{Log} z \leqslant \pi$, οπότε

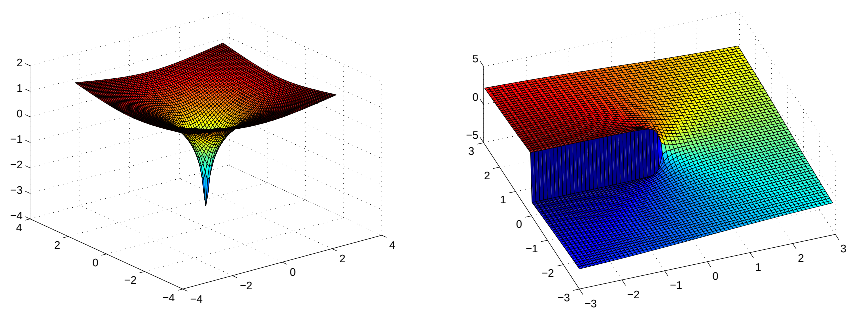
$$\mathrm{Log} z = \ln |z| + i \mathrm{Arg} z,$$

όπου Arg$z$ περιορίζεται όπως ανωτέρω. Η λογαριθμική συνάρτηση είναι αντίστροφη της εκθετικής με τον παραπάνω περιορισμό για το πεδίο τιμών.

Παράδειγμα 1.2.3.

$$e^{2\mathrm{Log}(-1)} = e^{2(\ln 1 + i\pi)} = 1. \quad \square$$

Παράδειγμα 1.2.4. Να λυθεί η εξίσωση $\cos z = \sqrt{2}$. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με



(a) (b)

Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της λογαριθμικής συνάρτησης.

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sqrt{2}.$$

Θέτουμε $w = e^{iz}$ και παίρνουμε την εξίσωση

$$w^2 + 1 = 2\sqrt{2} w \Leftrightarrow (w - \sqrt{2})^2 = 1$$

Λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι

$$w = \sqrt{2} \pm 1 \Leftrightarrow e^{iz} = \sqrt{2} \pm 1$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$z = -i \ln(\sqrt{2} \pm 1) + 2k\pi. \quad \square$$

Για τις συναρτήσεις ενδιαφέρουν οι έννοιες της συνέχειας και της παραγώγισης. Και για τις δύο αυτές έννοιες απαιτείται τόσο ο ορισμός της γειτονιάς ενός σημείου, όσο και η δυνατότητα προσδιορισμού του συνόλου επί του οποίου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται ανοικτό, αν δεν συμπεριλαμβάνει το 'σύνορό' του. Το συμπλήρωμα ενός ανοικτού συνόλου είναι κλειστό. Για ένα αριθμό $r > 0$, η γειτονιά r ενός σημείου z_0 είναι ο ανοικτός δίσκος με κέντρο το σημείο και ακτίνα r $(|z - z_0| < r)$. Μια 'τρυπημένη' γειτονιά είναι ένας δίσκος όπως πριν, όπου όμως εχει αφαιρεθεί το κέντρο $(0 < |z - z_0| < r)$.

Το όριο μιας συνάρτησης $f(z)$ σ' ένα σημείο z_0 ισούται με a, αν η τιμή της συνάρτησης πλησιάζει το a, όταν το z πλησιάζει το z_0. Η συνάρτηση θα ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο, εάν και μόνο εάν, το όριο της σε αυτό το σημείο ισούται με την τιμή της σε αυτό. Μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ θα ονομάζεται συνεχής σε αυτό εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

1.3 Αναλυτικές συναρτήσεις

Ο όρος 'αναλυτική' αναφέρεται σε μια συνάρτηση διαφορίσιμη κατά τη μιγαδική έννοια. Μια συνάρτηση f ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0 \in A$, εάν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

Το όριο συμβολίζεται $f'(z_0)$. Η συνάρτηση ονομάζεται αναλυτική, εάν είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο όπου ορίζεται.

Εάν f και g είναι αναλυτικές συναρτήσεις επί του A, το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό τους και για το γινόμενό τους. Εάν $\forall z \in A, \;\; g(z) \neq 0$, η f/g είναι αναλυτική και ισχύει

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)}.$$

Ισχύει επίσης ο κανόνας της αλυσίδας για σύνθετες συναρτήσεις

$$\frac{d}{dz} f \circ g(z) = f'(g(z))g'(z),$$

όπου το πεδίο τιμών της g είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f.

Οποιοδήποτε πολυώνυμο είναι αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$. Οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο που αποτελείται από όλα τα z, πλην αυτών στα οποία ο παρανομαστής μηδενίζεται.

Η εκθετική συνάρτηση είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και ισχύει

$$\frac{de^z}{dz} = e^z.$$

Ας είναι A το ανοικτό σύνολο που προκύπτει όταν από το σύνολο $\mathbb{C}$ αφαιρεθεί ο αρνητικός πραγματικός ημιάξονας συμπεριλαμβανομένου του μηδενός. Τότε ο λογάριθμος είναι αναλυτική συνάρτηση στο παραπάνω σύνολο και ισχύει

$$\frac{d\mathrm{Log}z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

Παράδειγμα 1.3.1. Να δοθεί η παράγωγος και το αντίστοιχο πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(z) = \sin(\mathrm{Log}z^2)$$

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι αναλυτική παντού, πλην του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα. Το z^2 απεικονίζεται στον αρνητικό ημιάξονα, αν το z βρίσκεται στο φανταστικό άξονα. Άρα

$$f'(z) = \cos(\mathrm{Log} z^2)\frac{2}{z},$$

παντού, πλην του φανταστικού άξονα. $\square$

Αν η συνάρτηση f θεωρηθεί ως συνάρτηση του διαταγμένου ζεύγους (x, y), μπορούμε να γράψουμε $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική, αν

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \text{ και } \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως Cauchy-Riemann.

Παράδειγμα 1.3.2.

- Η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}$ δεν είναι αναλυτική. Πράγματι αν γράψουμε $f(x, y) = x - iy$, διαπιστώνουμε ότι $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$.
- Η συνάρτηση $f(z) = |z|^2$ είναι αναλυτική μόνο στο 0. Πράγματι αν γράψουμε $f(x, y) = x^2 + y^2$, θα πρέπει $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0$.

1.4 Μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα

Μια συνεχής καμπύλη στο $\mathbb{C}$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Η καμπύλη καλείται κατά τμήματα λεία, αν μπορούμε να χωρίσουμε το όλο διάστημα σε πεπερασμένο αριθμό υποδιαστημάτων, ώστε στα ανοικτά υποδιαστήματα υπάρχει η $\gamma'(t)$, ενώ στα κλειστά η $\gamma(t)$ είναι συνεχής. Το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της καμπύλης ορίζεται ως

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

όπου τα $a_n (n = 0, 1, \ldots, N)$ ορίζουν τα άκρα των υποδιαστημάτων.

Παράδειγμα 1.4.1. Ας είναι γ ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων σε μια πλήρη διαδρομή. Ζητείται το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \overline{z}dz$. Θέτουμε $z = \cos t + i \sin t$, οπότε $dz = (-\sin t + i \cos t)dt$. Άρα

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t)dt = 2\pi i. \quad \square$$

Με το θεμελιώδες θεώρημα για τα επικαμπύλια μιγαδικά ολοκληρώματα αποδεικνύεται ότι για μια τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ και για μια συνάρτηση F αναλυτική σ' ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει τη γ,

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο G, όπου συνεκτικό νοείται ένα σύνολο που αποτελείται από ένα μόνο μέρος, ή αλλιώς οποιαδήποτε δύο σημεία του συνεκτικού συνόλου συνδέονται με μία συνεχή καμπύλη που ανήκει σε αυτό. Στο θεώρημα ανεξαρτησίας του επικαμπύλιου ολοκληρώματος από το δρόμο αποδεικνύεται ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- Αν δύο διαφορετικοί δρόμοι γ_1 και γ_2 συνδέουν δύο σημεία του G και ανήκουν στο G, τότε
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$
- Τα ολοκληρώματα κατά μήκος κλειστών καμπυλών είναι 0.
- Υπάρχει μια συνάρτηση F ορισμένη και αναλυτική στο G, ώστε $F'(z) = f(z)$ για όλα τα σημεία του G.

Η συνάρτηση F ονομάζεται παράγουσα της f.

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα
$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz,$$
όπου γ είναι κύκλος με ακτίνα r και κέντρο a και n οποιοσδήποτε ακέραιος. Ας είναι κατ' αρχήν $n \geqslant 0$. Τότε
$$(z-a)^n = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dz}(z-a)^{n+1},$$
δηλαδή παράγωγος μιας αναλυτικής συνάρτησης. Άρα
$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = 0, \quad n \geqslant 0.$$
Αν $n < -1$, η παράγουσα είναι αναλυτική παντού, εκτός του a. Επομένως ο κύκλος είναι στο χωρίο όπου η παράγουσα είναι αναλυτική. Οπότε το ολοκλήρωμα είναι όπως προηγούμενα. Μένει η περίπτωση $n = -1$, για την οποία θέτουμε $z = re^{it} + a, 0 < t \leqslant 2\pi$, οπότε
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy-Goursat, αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική στο εσωτερικό και πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη γ, τότε
$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Κατόπιν αυτού προκύπτει ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο εσωτερικό και πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη γ και z_0 είναι ένα σημείο στο εσωτερικό, τότε
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-z_0}.$$
Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ένα σημείο, τότε όλες οι παράγωγοί της υπάρχουν και είναι αναλυτικές εκεί. Επιπλέον ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy γενικεύεται για μη αρνητικούς ακεραίους n,
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Παράδειγμα 1.4.2. Αν γ είναι ο μοναδιαίος κύκλος

- Η εκθετική συνάρτηση είναι αναλυτική παντού κι επομένως
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i.$$

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσηεις είναι αναλυτικές παντού κι επομένως
$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^4}dz = \frac{2\pi i}{6}(-\cos 0) = -\frac{\pi i}{3}.$$

Παράδειγμα 1.4.3. Αν γ είναι ο κύκλος $|z| = 2$,

- Για το ολοκλήρωμα που ακολουθεί χρειάζονται οι ρίζες του πολυωνύμου $z^2 + 2z - 3$ του παρανομαστή: $1, -3$.
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2z - 3} = \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{dz}{z+3} = \frac{\pi i}{2}.$$

- Και στο παρακάτω ολοκλήρωμα χρειάζεται να προσδιορισθούν οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή που ευρίσκονται εντός του κύκλου
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2(z^2+16)} = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z^2} = 2\pi i f'(0) = 0.$$

Παράδειγμα 1.4.4. Αν γ είναι ο κύκλος $|z-1| = 2$, για το ολοκλήρωμα που ακολουθεί χρειάζονται οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή: $1+i, -(1+i)$.
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 2i} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z+1+i}}{z-1-i}dz = \frac{2\pi i}{2(1+i)} = \pi i\frac{1-i}{2} = \frac{\pi}{2}(1+i).$$

1.5 Αναπαράσταση συναρτήσεων με σειρές

Η ακολουθία μιγαδικών αριθμών $z_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ συγκλίνει στο z, εάν, και μόνο εάν, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος N, ώστε $\forall n > N$, $|z_n - z| < \epsilon$. Μια ακολουθία συγκλίνει, αν, και μόνο αν, τόσο το πραγματικό μέρος, όσο και το φανταστικό μέρος, συγκλίνει.

Μια σειρά μιγαδικών αριθμών
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$
συγκλίνει στο άθροισμα S, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$$
συγκλίνει στο S. Η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς συνεπάγεται τη σύγκλιση της σειράς αυτής.

Παράδειγμα 1.5.1. Αν $|z| < 1$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Πράγματι μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{N+1}}{1-z}.$$

Η ακολουθία z^{N+1} συγκλίνει στο 0, για $|z|<1$, οπότε η σειρά αθροίζεται όπως ανωτέρω. $\square$

Η ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων $f_n(z)$ ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(z)$, αν για κάθε $z \in A$ υπάρχει ακέραιος N, ώστε $\forall n > N$, $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. Αντίστοιχα ορίζεται η ομοιόμορφη σύγκλιση μιας σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Αν μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η συνάρτηση όριο είναι αναλυτική. Το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και το άθροισμα της σειράς που είναι αναλυτική συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.5.2. Αφού για $|z|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

και η συνάρτηση z^n είναι αναλυτική, μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}. \quad \square$$

Θα ενδιαφερθούμε ιδιάιτερα για τις δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

όπου a_n είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και z_0 ένας σταθερός μιγαδικός αριθμός.

Η περιοχή αναλυτικότητας μιας δυναμοσειράς είναι το εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο z_0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $R \geqslant 0$, ίσως και ∞, ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει για κάθε $|z-z_0|<R$ και να αποκλίνει για κάθε $|z-z_0|>R$. Η δυναμοσειρά είναι αναλυτική συνάρτηση στο εσωτερικό του κύκλου σύγκλισης.

Εάν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική, τότε σε κάθε δίσκο του πεδίου ορισμού της ισούται με μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται σειρά Taylor γύρω από το σημείο z_0. Δίδονται κατωτέρω μερικές γνωστές σειρές Taylor.

- Εκθετική συνάρτηση

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Τριγωνομετρικκές συναρτήσεις

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Αντίστροφο μονωνύμου

$$\frac{1}{\rho - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\rho^{n+1}}, \quad |z| < |\rho|.$$

Παράδειγμα 1.5.3. Η σειρά Taylor του αντιστρόφου ενός πολυωνύμου απαιτεί την εύρεση των ριζών του πολυωνύμου.

$$\frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$

$$\frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

Το ανάπτυγμα αυτό ισχύει για $|z| < 1$. □

Εάν μια συνάρτηση δεν είναι αναλυτική σε ένα σημείο δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor. Γι′ αυτές τις συναρτήσεις υπάρχει συχνά ένα άλλο ανάπτυγμα, η σειρά Laurent. Εάν μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ένα δακτυλιοειδές χωρίο $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Τότε για κάθε z στο χωρίο η συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά, ως ακολούθως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Οι συντελεστές του αναπτύγματος δίδονται από τις σχέσεις

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n \geqslant 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}}, n \geqslant 1,$$

όπου η καμπύλη γ είναι κλειστή γύρω από το z_0 και ανήκει στο χωρίο.

Ωστόσο οι συντελεστές της σειράς Laurent βρίσκονται συνήθως με άλλο τρόπο, κι όχι με τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.5.4. Ζητείται το ανάπτυγμα της σειράς Laurent γύρω από το $z_0 = 0$.

- Για $0 < |z| < 1$,

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{z+1-z}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

- Για $0 < |z| < 1$,

$$\frac{z}{z+1} = z\frac{1}{z+1} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^n$$

- Για $1 < |z| < \infty$,

$$\frac{z}{z+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$$

Παράδειγμα 1.5.5. Θεωρούμε το αντίστροφο του πολυωνύμου z^2+2z-3. Το πολυώνυμο αυτό έχει δύο ρίζες: $1, -3$. Γύρω από το $z_0 = 0$ διακρίνονται τρία δακτυλιοειδή χωρία. Στο πρώτο ($|z| < 1$) η συνάρτηση είναι αναλυτική και εφαρμόζεται το ανάπτυγμα Taylor που δίδεται στο Παράδειγμα 1.5.3. Ας θεωρήσουμε τώρα το δεύτερο χωρίο $1 < |z| < 3$. Γράφουμε

$$\frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{3(1+\frac{z}{3})}\right)$$

$$\frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n\right)$$

Ας θεωρήσουμε τέλος το χωρίο $3 < |z|$. Γράφουμε

$$\frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}\right)$$

$$\frac{1}{z^2+2z-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n z^{-n}\right)$$