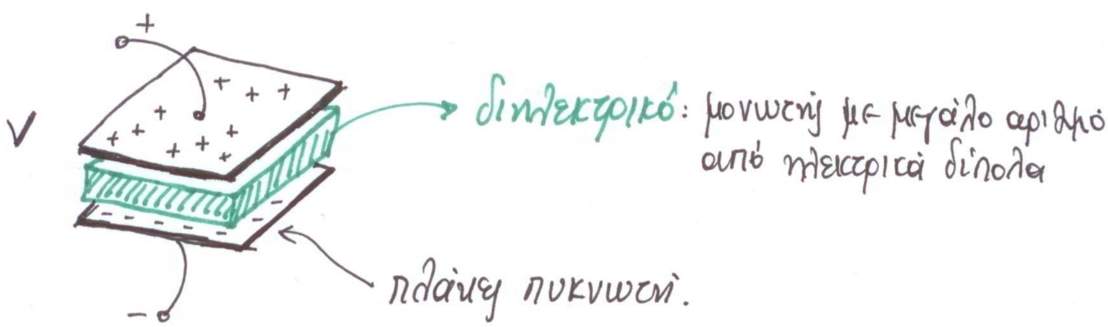
## Ο πυκνωτής κ κυκλώματα πρώτης τάξης

- Ο πυκνωτής είναι ένα κυκλωματικό στοιχείο το οποίο μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια διαχωρίζοντας κατάλληλα τα θετικά από τα αρνητικά φορτισμένα σωματίδια στο εσωτερικό του όταν εφαρμοστεί στα άκρα του μια κατάλληλη διαφορά δυναμικού.

- Η πιο απλή μορφή πυκνωτή μπορεί να σχηματιστεί με 2 παράλληλες πλάκες οι οποίες διαχωρίζονται από ένα διηλεκτρικό.




- Το φορτίο που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής είναι ανάλογο της χωρητικότητας του $C$ και της διαφοράς δυναμικού που έχει αναπτυχθεί στα άκρα του $V$.

$$Q = C \cdot V$$

- Το ρεύμα ορίζεται ως ο ρυθμός αλλαγής του φορτίου στη μονάδα του χρόνου. ($\partial Q / \partial t$). Τότε εξωτερικά για τον πυκνωτή μπορούμε να πούμε ότι το ρεύμα από το οποίο διαρρέεται είναι ίσο με:

$$i_C = \frac{\partial Q_c}{\partial t} = C \frac{\partial V_c}{\partial t}$$

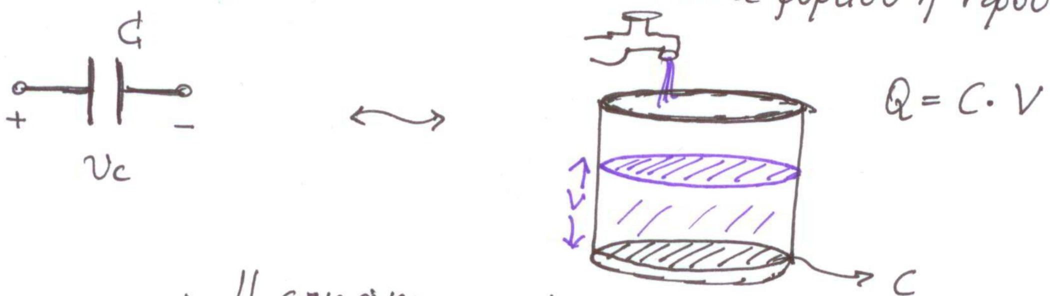
Είναι δηλαδή ανάλογο του ρυθμού μεταβολής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή κ της χωρητικότητας του.

Αυτή η συμπεριφορά του ρεύματος οδηγεί σε δύο πολύ βασικά χαρακτηριστικά του πυκνωτή:

1. Η τάση στα άκρα του πυκνωτή δε μπορεί να αλλάξει στιγμιαία (παραμένει δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση). Αν επιτρεπόταν μια πολύ απότομη αλλαγή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή αυτό θα σήμαινε μια πολύ μεγάλη τιμή για το ρυθμό $\partial V_c / \partial t$ (Μεγάλη αλλαγή τάσης σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα). Αυτό θα είχε ως συνέπεια την στιγμιαία ραγδαία αύξηση του ρεύματος σε πολύ μεγάλες τιμές οι οποίες δεν είναι φυσικό να συμβούν.

2. Όταν η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι σταθερή και δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή $\partial V_c / \partial t = 0$, τότε ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν ανοιχτό κύκλωμα. Δε διαρρέεται από ρεύμα ($i_c = 0$).

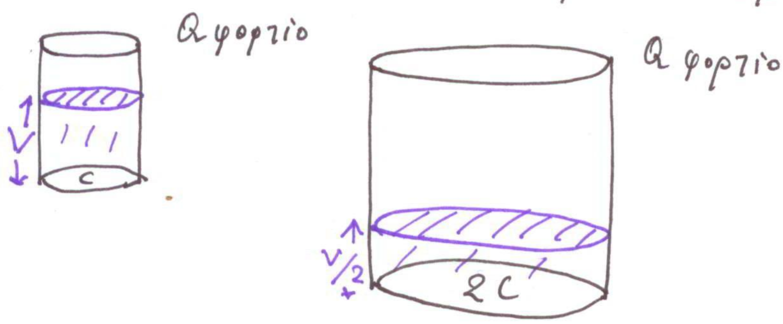
(iii) Για να αποκτήσετε μια ποιοτική αίσθηση της λειτουργίας του πυκνωτή καλό είναι να τον σκέφτεστε σαν έναν κουβά φορτίου ή νερού.



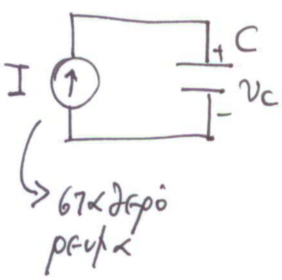

$$Q = C \cdot V$$

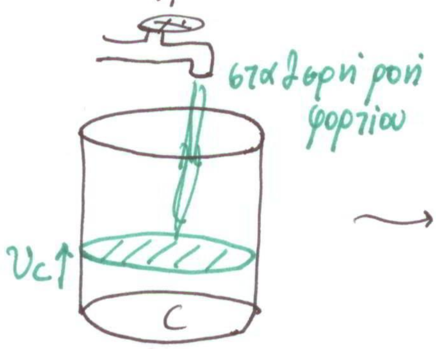
△ Η επιφάνεια της άκρης του κουβά είναι ισοδύναμη της χωρητικότητας του πυκνωτή.

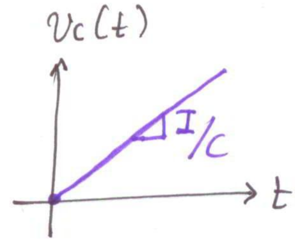
△ Το ύψος του νερού (φορτίου) V είναι ανάλογο του δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή. Ενώ ο όγκος του νερού αντιπροσωπεύει το συνολικό φορτίο που έχει αποθηκεύσει ο πυκνωτής.



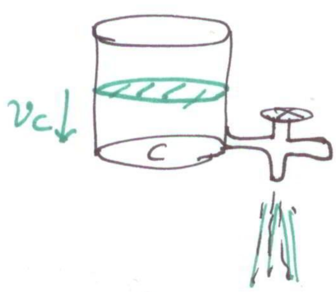
Αν γεμίζουμε τον πυκνωτή (κουβά) με σταθερό ρυθμό – σταθερό ρεύμα – τότε η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου.



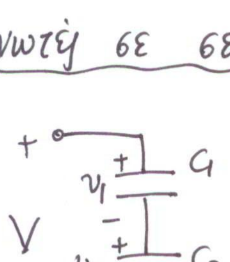

Την ίδια συμπεριφορά θα παρατηρούσαμε και κατά την εκφόρτιση του πυκνωτή (άδειασμα του κουβά). Μέχρι να εξισορροπηθεί το δυναμικό στο κύκλωμα ο πυκνωτής μπορεί να λειτουργήσει ως μπαταρία απελευθερώνοντας φορτίο στο κύκλωμα. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μειώνεται η διαφορά δυναμικού στα άκρα του.




- Η ενέργεια που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής με χωρητικότητα C όταν η διαφορά δυναμικού στα άκρα του είναι V ισούται με:

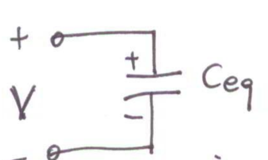
$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

- Πυκνωτές σε σειρά: Εφόσον δύο ή περισσότεροι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά (στον ίδιο κλάδο) τότε διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα με αποτέλεσμα το φορτίο q που έχουν αποθηκευμένο να είναι κοινό. Έτσι έχουμε ότι




$$v_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{και} \quad v_2 = \frac{q}{C_2}$$ ενώ από τον KVL

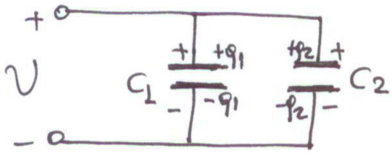
έχουμε πως $V = v_1 + v_2 = q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$



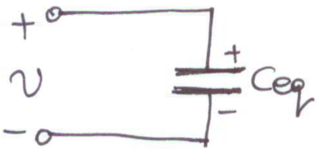

Ο ισοδύναμος πυκνωτής με την ίδια διαφορά δυναμικού V ↳ ίδιο φορτίο θα είχε $V = q/C_{eq}$

Έτσι προκύπτει ότι $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

(ii) **Πυκνωτές παράλληλα:** Στην περίπτωση αυτή, η διαφορά δυναμικού στα άκρα των δύο πυκνωτών είναι κοινή. Έτσι το φορτίο του κάθε πυκνωτή είναι ίσο με




$$q_1 = C_1 \cdot V \qquad q_2 = C_2 \cdot V$$




Έτσι το συνολικό φορτίο $Q = q_1 + q_2 = V \cdot (C_1 + C_2)$

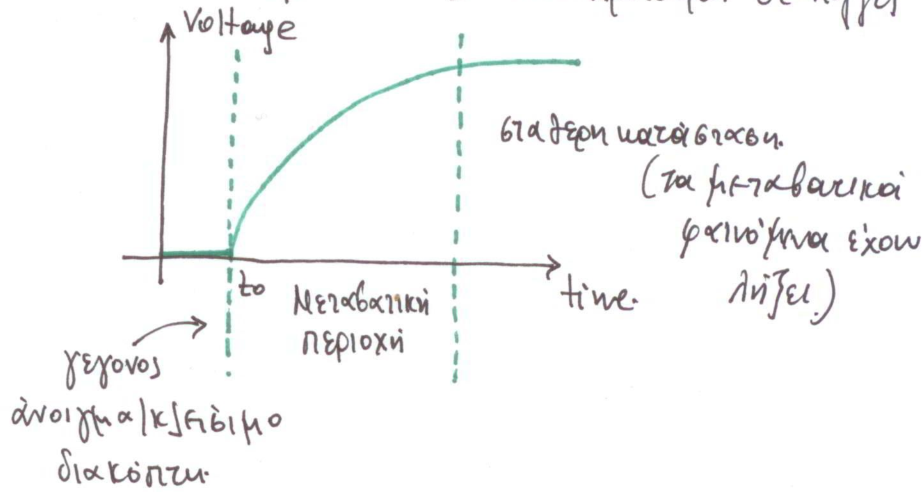
Ο ισοδύναμος πυκνωτής πρέπει για την ίδια διαφορά δυναμικού να εμφανίζει το ίδιο φορτίο. $Q = C_{eq} \cdot V$

Επομένως, $C_{eq} = C_1 + C_2$

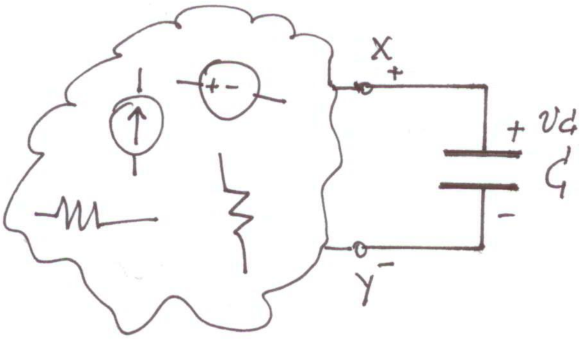
Συνοπτικά οι πυκνωτές σε σειρά συμπεριφέρονται σαν αντιστάσεις σε παράλληλη σύνδεση ενώ πυκνωτές παράλληλα μοιάζουν με αντιστάσεις σε σειρά.

(iii) **Μεταβατικά φαινόμενα.**

Η παρουσία ενός πυκνωτή στο κύκλωμα μαζί με ένα στοιχείο, όπως κάποιος διακόπτης, που μεταβάλλει τη δομή του κυκλώματος, προκαλεί μια καθυστέρηση μέχρις ότου τα στοιχεία του κυκλώματος να πάρουν τις τελικές τους τιμές τόσο τάσης όσο η ρεύματος. Οι μεταβολές αυτές της τάσης η ρεύματος των στοιχείων του κυκλώματος μέχρι να λάβουν τις τελικές τους τιμές καλούνται μεταβατικά φαινόμενα. Η μελέτη και η διαχείριση τους είναι χρήσιμη σε πολλές ηλεκτρονικές εφαρμογές

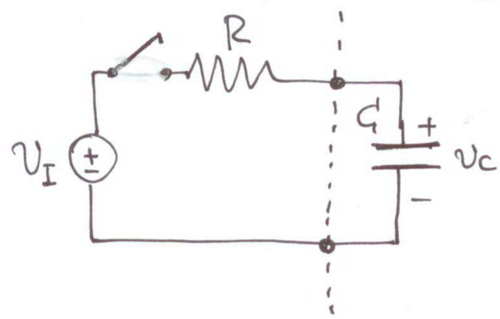


Θα ασχοληθούμε με την πιο απλή περίπτωση κυκλωμάτων με πυκνωτές — τα κυκλώματα πρώτης τάξης — τα οποία αρκούν να περιγράψουν τη συμπεριφορά πολλών κυκλωμάτων. Στην περίπτωση αυτή το κύκλωμα αποτελείται από ένα μόνο πυκνωτή και οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό από πηγές ρεύματος, τάσης και αντιστάσεις.



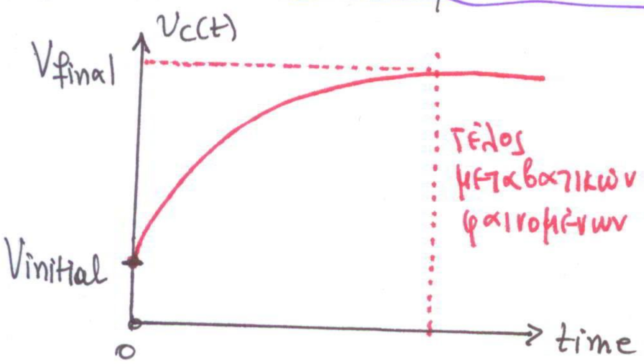

Φυσικά και κυκλώματα με περισσότερους πυκνωτές μπορούν να θεωρηθούν κυκλώματα πρώτης τάξης. Αρκεί να μην παρεμβάλλονται μεταξύ τους αντιστάσεις η να μπορούν με απλούς μετασχηματισμούς πυκνωτών σε σειρά η παράλληλα να ενωθούν σε ένα μόνο ισοδύναμο πυκνωτή.

Για να απλοποιήσουμε την ανάλυση ενός κυκλώματος με πυκνωτή ο οποίος μπορεί να είναι αφόρτιστος ($v_C=0$) ή φορτισμένος αρχικά θα αντιμετωπίσουμε αρχικά την πιο απλή περίπτωση κυκλώματος με πυκνωτή, ένα από RC

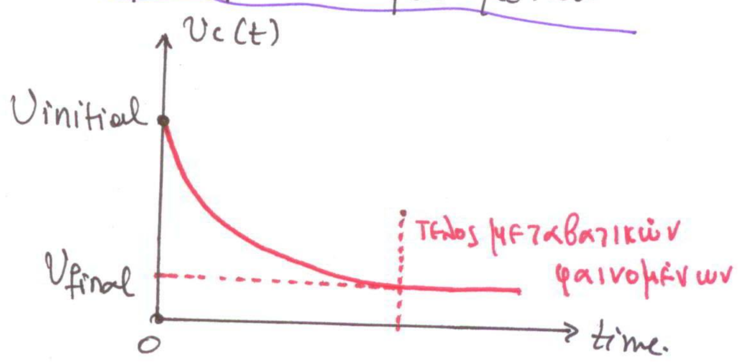



δίκτυο. Φυσικά, γνωρίζουμε, πως όσο σύνθετο και αν είναι το κύκλωμα που συνδέεται στον πυκνωτή, μπορούμε να το μετασχηματίσουμε σ'αυτή τη μορφή, ακολουθώντας τη διαδικασία εύρεσης του κατά Thevenin ισοδύναμου κυκλώματος. Για να προκαλέσουμε τα αντίστοιχα μεταβατικά φαινόμενα προσθέσαμε στο κύκλωμα μας και ένα διακόπτη. Ο διακόπτης είναι αρχικά ανοιχτός και τη χρονική στιγμή $t=0$ κλείνει. Ανάλογα με την αρχική τάση στα άκρα του πυκνωτή και το μέγεθος της $v_I$ έχουμε δυο επιλογές για την απόκριση του κυκλώματος.

Θεωρούμε πως ο πυκνωτής πριν τη χρονική στιγμή $t=0$ είχε μια τάση ίση με $V_{initial}$. Με το κλείσιμο του διακόπτη η τάση αυτή στιγμιαία θα διατηρηθεί δηλαδή $\underbrace{v_C(0^-)}_{\text{λίγο πριν το κλείσιμο}} = \underbrace{v_C(0^+)}_{\text{λίγο μετά το κλείσιμο}} = V_{initial}$. Ο λόγος είναι πως η τάση στα άκρα του πυκνωτή οφείλει να είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα οδηγούσε σε σχεδόν άπειρο ρεύμα. Τώρα αν $V_{initial} > v_I$ ο πυκνωτής θα αρχίζει να εκφορτίζεται παρέχοντας φορτίο στο κύκλωμα. Αντίθετα, αν $V_{initial} < v_I$ ο πυκνωτής θα αρχίζει να φορτίζεται αυξάνοντας σιγά-σιγά το δυναμικό στα άκρα του (θυμηθείτε την αντιστοιχία πυκνωτή-φορτίο με δεξαμενή-νερό). Και στις δύο περιπτώσεις, μας ενδιαφέρει η τελική τιμή της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή, η οποία όταν έρθει, είτε μέσω της φόρτισης είτε μέσω της αποφόρτισης, θα σημαίνει το τέλος των μεταβατικών φαινομένων.



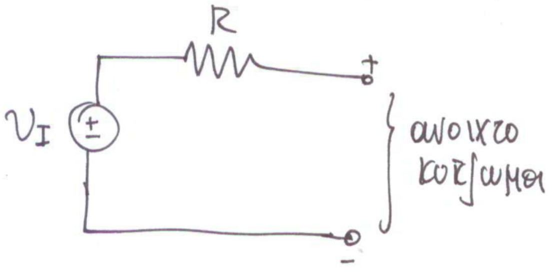

φόρτιση πυκνωτή




αποφόρτιση πυκνωτή

Ο πυκνωτής λαμβάνει την τελική του τιμή αφήνοντας το διακόπτη του κυκλώματος κλειστό για όση ώρα χρειαστεί ακολουθώντας μια εκθετική καμπύλη συνάρτηση του χρόνου. Πάντως όταν ολοκληρωθούν τα μεταβατικά φαινόμενα ή η τάση στα άκρα του πυκνωτή λάβει την τελική της τιμή $V_{final}$ τότε δεν θα υπάρχει καμία πλέον αλλαγή στην τάση στα άκρα του πυκνωτή. Αυτό σημαίνει πως $\partial v_C / \partial t = 0$ (ο ρυθμός μεταβολής μηδενίζεται) και επομένως το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι μηδενικό

Επομένως, εφόσον ο πυκνωτής παύει να διαρρέεται από ρεύμα και δεν παρατηρείτε πλέον αλλαγή της τάσης στα άκρα του, τα άκρα του πυκνωτή συμπεριφέρονται ως ανοιχτό-κύκλωμα για το υπόλοιπο δίκτυο. Επομένως, αν θεωρήσουμε στη θέση του πυκνωτή ένα ανοιχτό κύκλωμα και μετρήσουμε την τάση στα άκρα του, η τάση αυτή πρέπει να είναι ίση με την $v_{Final}$.

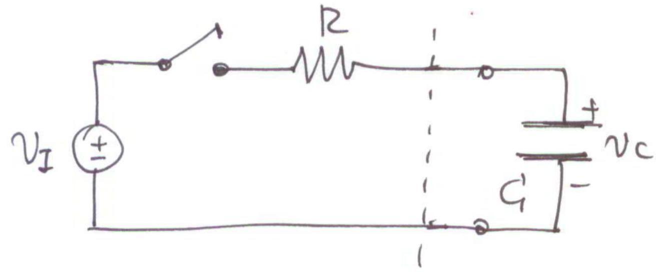



$v_{open\text{-}circuit} = v_I$

Τη διαφορά δυναμικού δηλαδή που προκάλεσε τη λήξη των μεταβατικών φαινομένων, το μηδενισμό του ρεύματος και τη συμπεριφορά του πυκνωτή σαν ανοιχτο-κύκλωμα. Έτσι $v_{Final} = v_I$ που είναι και διαισθητικά αυτό που περιμέναμε. Αν $v_{Initial} > v_I$ τότε ο πυκνωτής ήταν σε υψηλότερο δυναμικό από την πηγή τάσης, οπότε προκαλούσε μια διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης που είχε σαν αποτέλεσμα τη ροή ρεύματος. Το ρεύμα αυτό θα μηδενιζόταν όσο λόγω της αποφόρτισης του πυκνωτή η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης πλησίαζε το μηδέν. Φυσικά, αυτό θα μπορούσε να συμβεί μόνο όταν η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή πλησίαζε την τιμή $v_I$ της σταθερής πηγής τάσης. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στην περίπτωση που $v_{Initial} < v_I$. Το μόνο που διαφέρει είναι η φορά του ρεύματος που δημιουργείται κατά τη φόρτιση του πυκνωτή στην τελική του τιμή $v_I$.

Αφού ολοκληρώσαμε την ποιοτική ανάλυση της συμπεριφοράς του κυκλώματος αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε την εξίσωση που περιγράφει την τάση στα άκρα του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου, από την οποία θα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τη χρονική διάρκεια των μεταβατικών φαινομένων.

Για το κύκλωμα RC, στο οποίο ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή $t=0$,



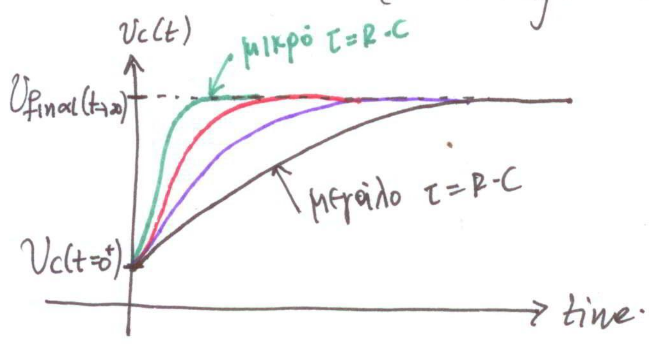

και ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε μια αρχική τάση $V_{initial}$, η τάση στα άκρα του πυκνωτή δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\boxed{v_C(t) = \left(V_{init}(t=0^+) - V_{FINAL}(t\to\infty)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{FINAL}(t\to\infty)}$$

- Η τελική τάση $V_{FINAL}(t\to\infty)$ αναφέρεται στην τελική τάση στα άκρα του πυκνωτή αν αφήναμε το διακόπτη κλειστό για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Είναι ίση δηλαδή με την τάση ανοιχτοκυκλώματος στα άκρα του πυκνωτή. (Παρόλο που ο διακόπτης μπορεί να ανοίξει νωρίτερα η εξίσωση που περιγράφει την τάση στα άκρα του πυκνωτή απαιτεί την εύρεση της τελικής τιμής για άπειρο χρόνο με το διακόπτη κλειστό)
- Η αρχική τάση $V_{init}(t=0^+)$ αναφέρεται στην τάση που είχε ο πυκνωτής λίγο πριν το κλείσιμο του διακόπτη εφόσον $V_C(t=0^-) = v_C(t=0^+)$
- Με το ελληνικό σύμβολο $\tau$ αναπαριστούμε τη λεγόμενη «σταθερά χρόνου» του κυκλώματος. Για το απλό RC δίκτυο η σταθερά χρόνου είναι ίση με

$$\boxed{\tau = R \cdot C}$$

Όσο πιο μεγάλη η τιμή του $\tau$ τόσο περισσότερο αργεί το κύκλωμα να φτάσει στην τελική του κατάσταση (να λήξουν δηλαδή τα μεταβατικά φαινόμενα.)



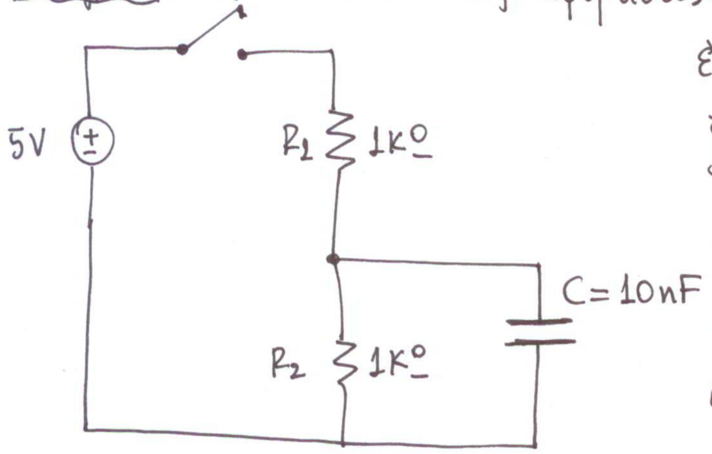
▲ Για το απλό κύκλωμα RC αν εφαρμόσουμε τον KVL έχουμε τα εξής:

$$\left.\begin{aligned} v_I - i\cdot R - v_C &= 0 \\ i = i_C &= C\frac{dv_C}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_I - RC\frac{dv_C}{dt} - v_C = 0 \Rightarrow$$

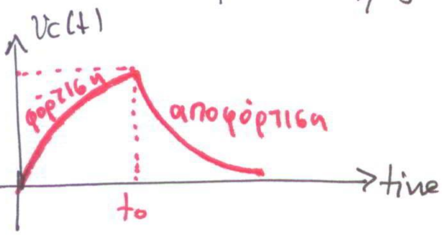
$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = \frac{1}{RC}v_I$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού ως προς την τάση $v_C$ στα άκρα του πυκνωτή. Η λύση της σας δόθηκε και έχει εκθετική μορφή. Ουσιαστικά η λύση της διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από δύο συνιστώσες. Η μία, που καλείται φυσική απόκριση, αναφέρεται στη συμπεριφορά του πυκνωτή ανεξάρτητα της επίδρασης της πηγής τάσης και έχει να κάνει με τη αρχική συνθήκη της τάσης στα άκρα του πυκνωτή $V_{init}$, ενώ η άλλη συνιστώσα που ονομάζεται εξαναγκασμένη απόκριση αναφέρεται στη συνεισφορά της πηγής τάσης.

Παράδειγμα: Αρχικά ο πυκνωτής αφόρτιστος. Τη στιγμή $t=0sec$ ο διακόπτης κλείνει ενώ τη χρονική στιγμή $t_0=20\mu sec$ ο διακόπτης ξανα-ανοίγει. Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του κυκλώματος για το χρονικό διάστημα από 0 έως 100μsec.



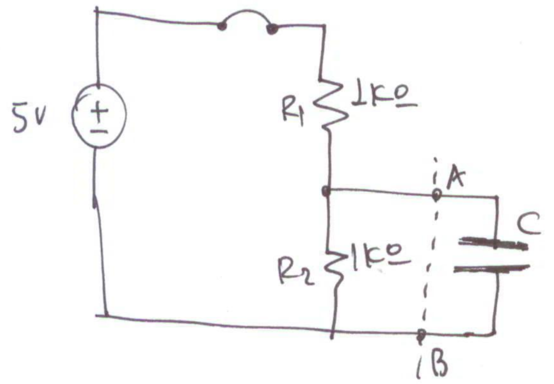

● Ποιοτική ανάλυση: Αρχικά ο πυκνωτής αφόρτιστος ($v_C=0V$). Επομένως με το κλείσιμο του διακόπτη αναμένουμε ο πυκνωτής ν' αρχίσει να φορτίζεται. Σε ποια τιμή θα προλάβει να φθάσει μέχρι τα 20 μsec που ο διακόπτης ξανανοίγει εξαρτάται από τη σταθερά χρόνου. Όταν ο διακόπτης ξαναανοίξει ουσιαστικά η $R_1$ και η πηγή τάσης αποσυνδέονται από το κύκλωμα και ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω της $R_2$. Αν μέχρι τη στιγμή 100 μsec θα έχει ολοκληρωθεί η αποφόρτιση στο 0 Volt εξαρτάται από τη νέα σταθερά χρόνου του μικρότερου κυκλώματος



Μετά την ποιοτική ανάλυση ας μελετήσουμε πια με ακρίβεια την τάση στα άκρα του πυκνωτή:

Για χρόνο $t \in [0sec, t_0)$

Ισοδύναμο κύκλωμα



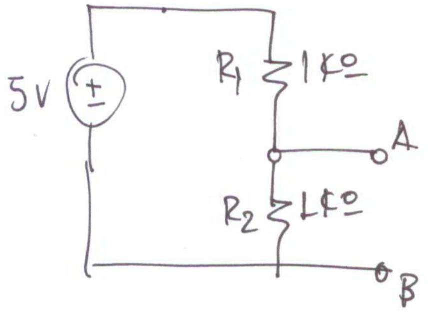

Γνωρίζουμε ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή θα είναι ίση με:

$$v_C(t) = \left(v_C(t=0^+) - v_C(t\to\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(t\to\infty)$$

Για να βρούμε την ζητούμενη εξίσωση αρκεί να υπολογίσουμε την αρχική τάση $v_C(t=0)$, την τελική τάση $v_C(t\to\infty)$ αν το κύκλωμα έμενε σ'αυτήν την κατάσταση για άπειρο χρόνο και τη σταθερά χρόνου $\tau$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τη δομή του κυκλώματος.

▲ Ο πυκνωτής αρχικά αφόρτιστος, άρα $v_C(t=0^-) = 0$ Volt. Έτσι και $v_C(t=0^+) = 0V$

▲ Για να βρούμε την τάση $v_C(t\to\infty)$ πρέπει να κοιτάξουμε το κύκλωμα όταν τα μεταβατικά φαινόμενα έχουν ολοκληρωθεί. Τότε ο πυκνωτής θα συμπεριφέρεται σαν ανοιχτό-κύκλωμα. Αναζητούμε δηλαδή την τάση $V_{AB}$ στο αντίστοιχο κύκλωμα:

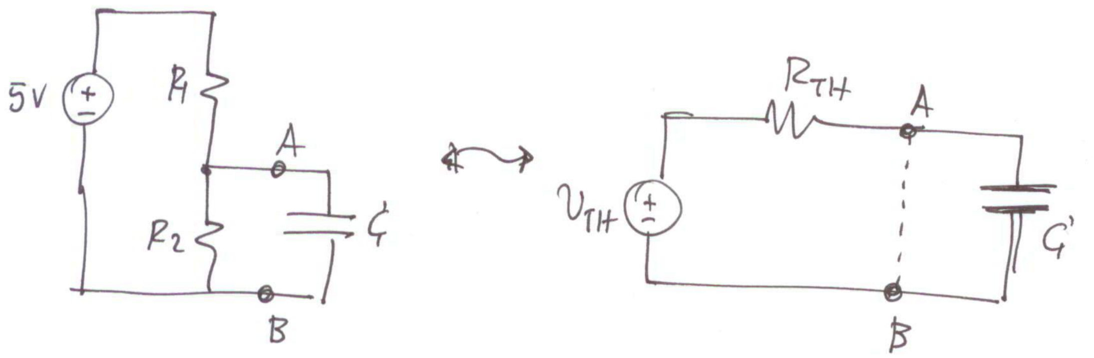



$$V_{AB} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot 5V = \frac{1K\Omega}{2K\Omega} 5V = 2.5\,Volt$$

Ουσιαστικά είναι σαν να βρίσκουμε την κατά Thevenin ισοδύναμη τάση όπως φαίνεται από τα άκρα A η B. Έτσι για $v_C(t\to\infty) = 2.5V$ ο πυκνωτής θα παύει να διαρρέεται από ρεύμα και η τάση στα άκρα του θα σταματήσει να μεταβάλλεται.

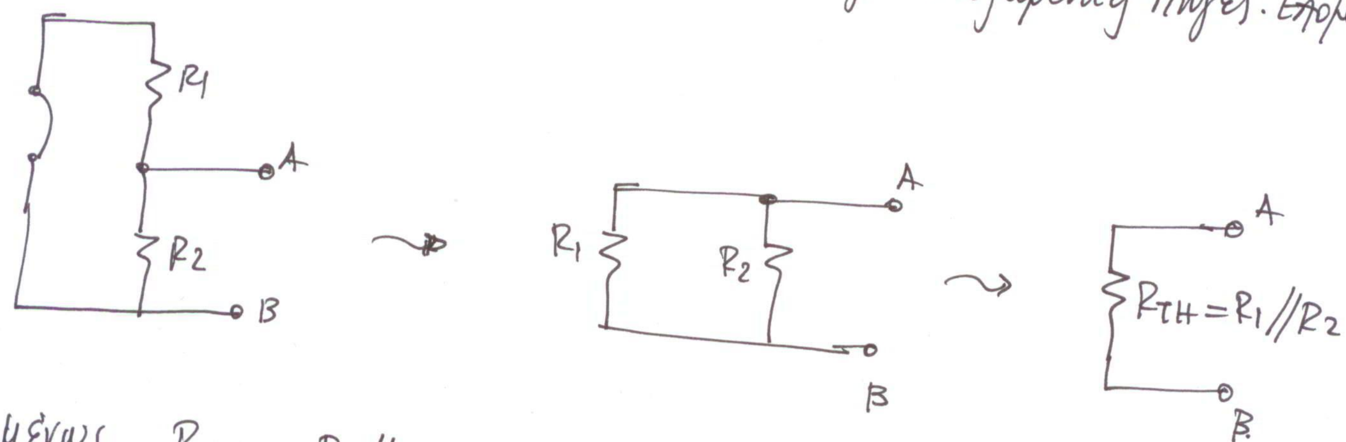
▲ Τώρα όσον αφορά στη σταθερά χρόνου. Εμείς γνωρίζουμε ότι η σταθερά χρόνου στο απλό RC δίκτυο είναι ίση με $\tau = R \cdot C$. Επομένως πρέπει να φέρουμε το πιο σύνθετο κύκλωμα μας στην απλή RC μορφή για το οποίο ξέρουμε το $\tau$

Θέλουμε δηλαδή τον κατά Thevenin μετασχηματισμό – ουσιαστικά μας απασχολεί μόνο η κατά-Thevenin αντίσταση.




$$\tau = R_{TH} \cdot C$$

Για να βρω $R_{TH}$ αφαιρώ πυκνωτή $C$ και μηδενίζω ανεξάρτητες πηγές. Επομένως



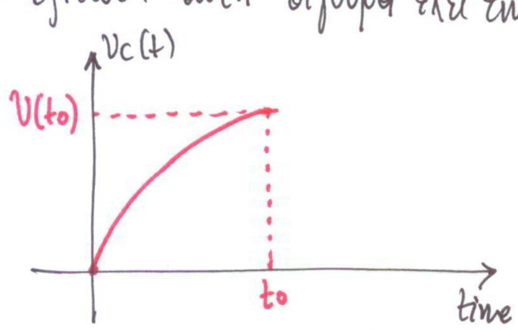

Επομένως $R_{TH} = R_1 // R_2 = 0.5\,k\Omega$

Άρα η σταθερά χρόνου του αρχικού κυκλώματος είναι $\tau = 0.5\,k\Omega \times 10\,nF$ είναι ίση με $5\,\mu sec$

Έτσι η εξίσωση που περιγράφει την $v_C(t)$ είναι:

$$v_C(t) = (0V - 2.5V)\, e^{-\frac{t}{5 \cdot 10^{-6}}} + 2.5V = 2.5 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{5 \cdot 10^{-6}}}\right) \text{Volt}$$

Η εξίσωση αυτή σίγουρα έχει την παρακάτω μορφή. Ποια είναι όμως η τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή τη στιγμή $t_0 = 20\mu sec$ που ξανα-ανοίγει ο διακόπτης. Τη στιγμή λοιπόν $t_0$ έχουμε από την προηγούμενη εξίσωση ότι



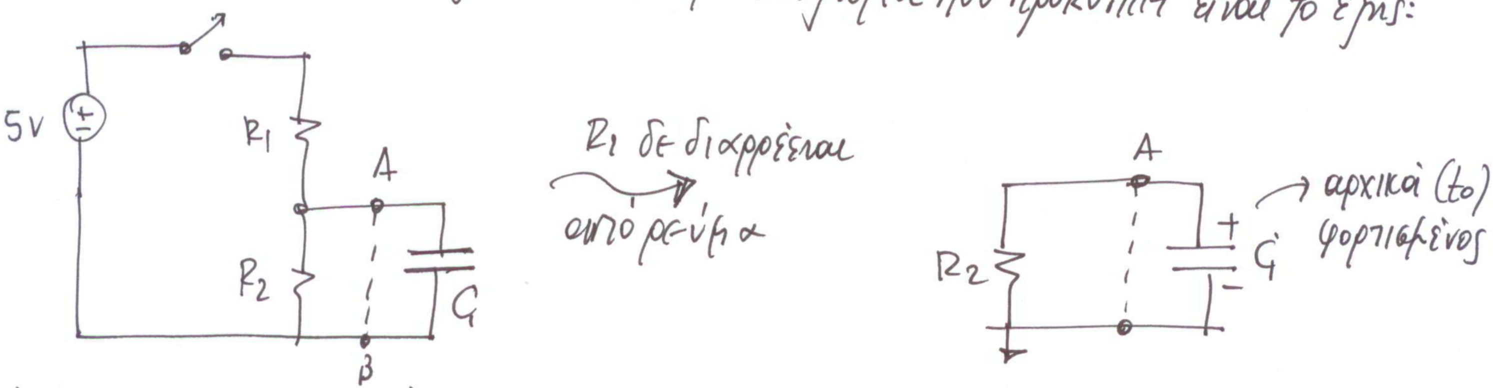

$t_0 = 20\mu sec = 4\tau$ *

$$v_C(t_0 = 20\mu sec) = 2.5\left(1 - e^{-\frac{4\tau}{\tau}}\right) = 2.5(1 - e^{-4}) = \cong 2.45V$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως τη στιγμή $t_0 = 20msec$ ο πυκνωτής έχει αναπτύξει μια διαφορά δυναμικού στα άκρα του η οποία είναι περίπου το 98% της τάσης που θα έφτανε ~ 2.5V αν αφήναμε το διακόπτη κλειστό για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα ~ $v_C(t\to\infty)$ (Προσέξτε ότι την τάση $v_C(t_0)$ την υπολογίσαμε σαν αντικαταστάτα του χρόνου στην εξίσωση που βρήκαμε αντικαθιστώντας τις τιμές των $v_C(t=0)$, $v_C(t\to\infty)$ και της σταθεράς χρόνου $\tau$)

Χρονικό διάστημα $t \in [t_0, 100msec)$

Εφόσον ο διακόπτης ανοίγει το ισοδύναμο κύκλωμα που προκύπτει είναι το εξής:



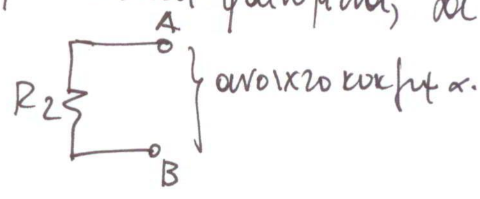

Μελετώντας την εξέλιξη του φαινομένου από τη χρονική στιγμή $t_0 = 20msec$ (την οποία θεωρούμε πια σαν αρχή των νέων μεταβατικών φαινομένων - αποφόρτιση) η σχέση που δίνει την τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι η εξής:

$$v_C(t) = \left(v_C(t_0^+) - v_C(t\to\infty)\right)e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + v_C(t\to\infty)$$

Προσέξτε το $t - t_0$ στον εκθέτη. Η χρονική αυτή μετατόπιση επιβάλλεται ώστε η σχέση αυτή να ισχύει για $t > t_0$.

▲ Η αρχική τάση $v_C(t_0^+)$ είναι ίση με αυτή που ανέπτυξε ο πυκνωτής στα άκρα του λίγο πριν το άνοιγμα του διακόπτη. Δηλαδή $v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) = 2.45V$ όπως υπολογίσαμε πριν από τη φάση της φόρτισης.

▲ Η τελική τιμή $v_C(t\to\infty)$ είναι τώρα πια ίση με 0 Volt εφόσον αν αφήσουμε το διακόπτη ανοιχτό για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα ο πυκνωτής θα αποφορτιστεί πλήρως μέσω της αντίστασης $R_2$. Ισοδύναμα, είναι σαν να λέμε πως ο πυκνωτής, όταν τελειώσουν πλήρως τα μεταβατικά φαινόμενα, θα συμπεριφέρεται σαν ανοιχτό-κύκλωμα. Δηλαδή:




Φυσικά $V_{AB}$(open-circuit) = 0 Volt γιατί απλά δεν υπάρχει καμμιά πηγή τάσης στο κύκλωμα.

Δ Η νέα σταθερά χρόνου της αποφόρτισης λόγω της απλότητας του κυκλώματος δεν απαιτεί την εύρεση της ισοδύναμης κατά Thevenin αντίστασης και είναι ίση με $\tau = R_2 \cdot C = 1 \cdot k\Omega \times 10nF = 10\mu sec$

Παρατηρείστε ότι η σταθερά χρόνου για την αποφόρτιση (μετά τη στιγμή $t_0$ που ανοίγει ο διακόπτης) είναι διπλάσια από τη σταθερά χρόνου της φόρτισης στο διάστημα $[0sec, t_0 sec)$. Επομένως, αναμένουμε η αποφόρτιση να διαρκέσει περισσότερο από τη φάση της φόρτισης.

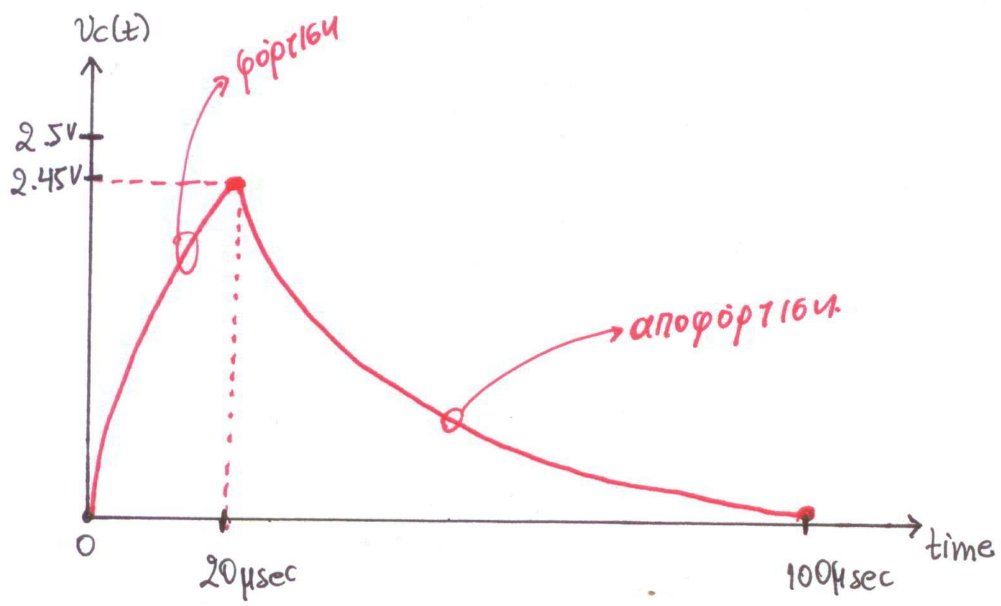
Έτσι συνολικά η τάση στα άκρα του πυκνωτή για $t > t_0$ είναι

$$v_C(t) = (2.45 - 0V)\, e^{-\frac{(t-t_0)}{10\cdot 10^{-6}}} + 0V = 2.45\, e^{-\frac{(t-20\cdot 10^{-6})}{10\cdot 10^{-6}}}$$

Εφόσον μελετάμε το φαινόμενο μέχρι τη στιγμή 100μsec η τάση που θα έχει ο πυκνωτής σε εκείνη τη στιγμή θα είναι

$$v_C(t=100\mu sec) = 2.45\, e^{-\frac{(100\cdot 10^{-6} - 20\cdot 10^{-6})}{10\cdot 10^{-6}}} = 2.45\, e^{-8} \cong 8\cdot 10^{-4} \to 0\,Volt$$

Έτσι συνολικά η τάση στα άκρα του πυκνωτή έχει την εξής μορφή:



## III Χρονική διάρκεια μεταβατικών φαινομένων·

Για να μελετήσουμε τη χρονική διάρκεια των μεταβατικών φαινομένων είτε της φόρτισης είτε της αποφόρτισης του πυκνωτή θα πρέπει από τη γενική εξίσωση που έχουμε στη διάθεση μας για το $v_C(t)$ να λύσουμε ως προς το χρόνο.

Έτσι $$v_C(t) = \left(v_C(t=0) - v_C(t\to\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(t\to\infty) \Rightarrow$$

$$\frac{v_C(t) - v_C(t\to\infty)}{v_C(t=0) - v_C(t\to\infty)} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{v_C(t) - v_C(t\to\infty)}{v_C(t=0) - v_C(t\to\infty)}\right) \Rightarrow$$

$$t = -\tau \cdot \ln\left(\frac{v_C(t) - v_C(t\to\infty)}{v_C(t=0) - v_C(t\to\infty)}\right)$$

Γνωρίζουμε ότι $-\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

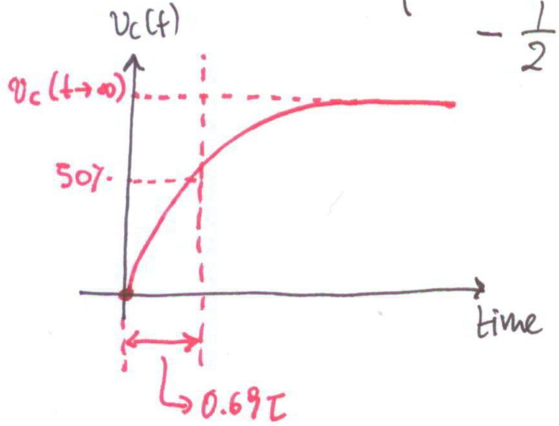
$$\Rightarrow \boxed{t = \tau \cdot \ln\left(\frac{v_C(t=0) - v_C(t\to\infty)}{v_C(t) - v_C(t\to\infty)}\right)}$$

Ουσιαστικά μέσω της νέας αυτής εξίσωσης μπορούμε να βρούμε σε ποια χρονική στιγμή $t$ η τάση στα άκρα του πυκνωτή έφτασε στην τιμή $v_C(t)$ όταν το φαινόμενο ξεκίνησε την χρονική στιγμή $t=0$ και η αρχική τάση ήταν $v_C(t=0)$ ενώ αν περνούσε άπειρος χρόνος η τελική θα ήταν $v_C(t\to\infty)$ (τάση σταθερής κατάστασης με τον πυκνωτή να συμπεριφέρεται ως ανοιχτοκύκλωμα.)

Συνήθως είναι χρήσιμο να θυμόμαστε το χρόνο που απαιτούν συγκεκριμένες τιμές της τάσης στα άκρα του πυκνωτή όπως ο χρόνος η τάση να πιάσει το 50% της τελικής τιμής (φόρτιση ή αποφόρτιση) ή να πλησιάσει το 99% της τελικής τιμής.

Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να μελετήσουμε πόση ώρα απαιτεί η τάση $v_C(t)$ να βρεθεί στο 50% της τελικής τιμής, όταν ο πυκνωτής φορτίζεται χωρίς αρχικά να έχει φορτίο, αρκεί να θέσουμε $v_C(t) = \frac{1}{2} v_C(t\to\infty)$ και $v_C(t=0) = 0V$

Τότε $t = \tau \cdot \ln\left(\frac{-v_C(t\to\infty)}{-\frac{1}{2} v_C(t\to\infty)}\right) \Rightarrow t = \tau \cdot \ln(2) \rightsquigarrow \underline{\underline{t = 0.69\tau}}$



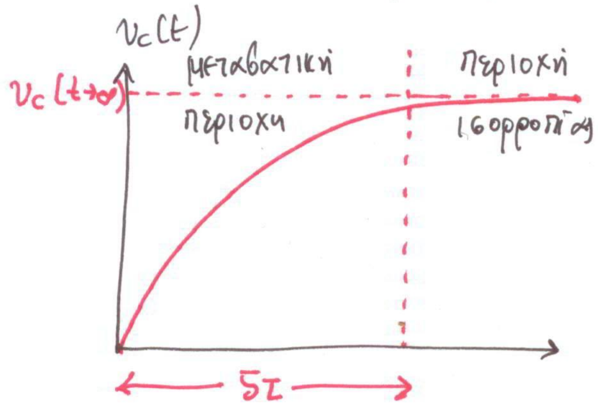

Φυσικά όσο πιο μεγάλη η σταθερά χρόνου τ τόσο μεγαλύτερος ο χρόνος. Υπενθυμίζουμε πως αν αρχικά ο πυκνωτής είχε κάποιο φορτίο το φαινόμενο θα ολοκληρωνόταν ταχύτερα.

Επίσης κρίσιμο μέγεθος για την ανάλυση μας πόσο χρόνο διαρκούν συνολικά τα μεταβατικά φαινόμενα. Πόσο χρόνο παίρνει δηλαδή το $v_C(t)$ να γίνει περίπου το 99% της τελικής του τιμής. Αν θεωρήσουμε πως η πάλι ο πυκνωτής αφόρτιστος τότε για τη φόρτιση έχουμε:

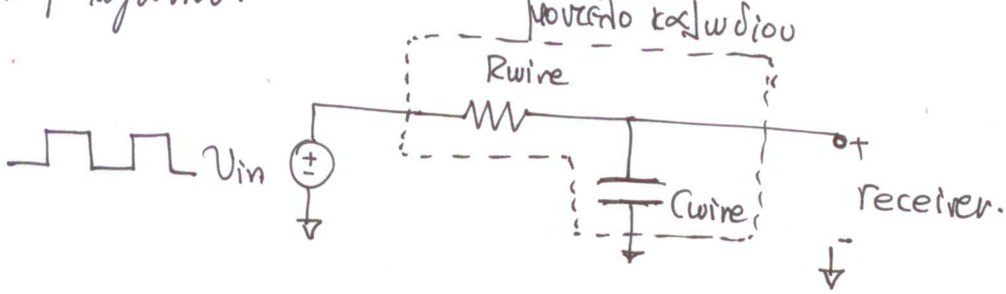
$$t = \tau \cdot \ln\left(\frac{-v_C(t\to\infty)}{0.99\, v_C(t\to\infty) - v_C(t\to\infty)}\right) = \tau \cdot \ln\left(\frac{-v_C(t\to\infty)}{-0.01\, v_C(t\to\infty)}\right)$$

$$\Rightarrow t = \tau \cdot \ln(100) = 4.6\tau \xrightarrow[\text{περίπου}]{} \underline{\underline{t = 5\tau}}$$

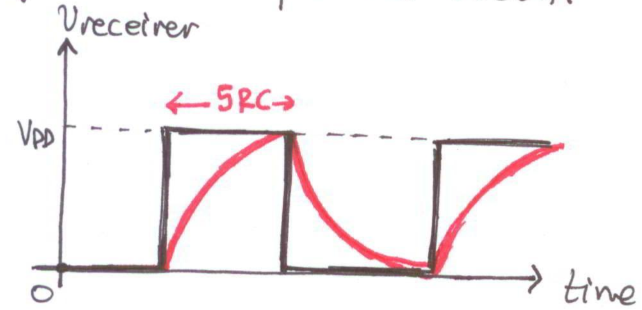
Με άλλα λόγια όταν παρέλθει χρόνος περίπου ίσος με 5 σταθερές χρόνου μπορούμε με σχετική ασφάλεια να συμπεράνουμε πως τα μεταβατικά φαινόμενα έχουν τελειώσει.



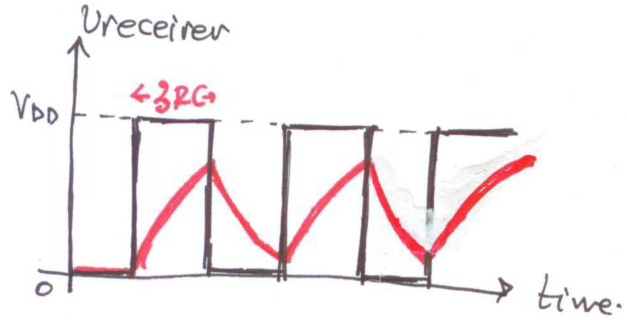
Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να μοντελοποιήσουμε διάφορα στοιχεία όπως ένα καλώδιο μεγάλου μήκους σαν ένα RC δίκτυο.. Ανάλογα με το μήκος του αυξάναν αντίστοιχα η αντίσταση και η χωρητικότητά του. Η συμπεριφορά λοιπόν του καλωδίου που μοιάζει με ενά RC δε μας επιτρέπει να μεταδόσουμε σ'αυτό με οποιαδήποτε ταχύτητα θέλουμε. Ας δούμε λοιπόν ενά παράδειγμα όπου ένας τετραγωνικός παλμός (ρολόι) μεταδίδεται μέσω ενός καλωδίου.



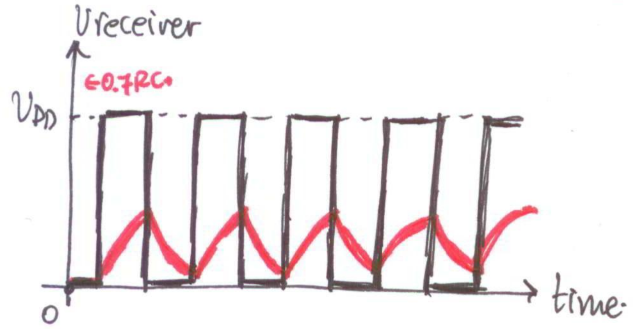

Ανάλογα με την περίοδο του παλμού παίρνουμε προσσεγγιστικά τις ακόλουθες αποκρίσεις στο άκρο του δέκτη.




Το σήμα εισόδου έχει ημι-περίοδο τουλάχιστον $5\tau = 5RC$ με αποτέλεσμα η τάση στα άκρα του πυκνωτή να ολοκληρώνει τη μετάβαση της στις τελικές τιμές $V_{DD}$ ή 0V.




Το σήμα εισόδου έχει ημι-περίοδο $3\tau$ με αποτέλεσμα η τάση στον δέκτη να είναι μόνο ένα ποσοστό των $V_{DD}$ ή 0V.

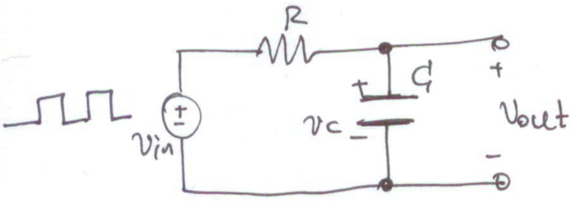



Στην περίπτωση αυτή λόγω της μικρής ημιπεριόδου το σήμα καταφέρνει οριακά να πάρει τιμές περίπου κοντά στο $V_{DD}/2$ ή 0V

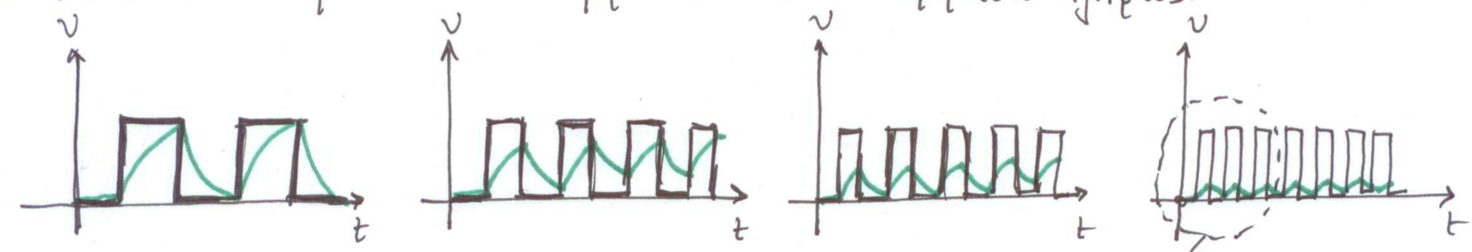
Παρατηρούμε λοιπόν ακόμη και απουσία θορύβου πως δε μπορούμε αυθαίρετα να μεταδόσουμε σε όποια ταχύτητα θέλουμε. Οι τάσεις που παίρνουμε στην έξοδο λόγω της χωρητικότητας μπορεί να απέχουν πολύ από την κανονική τους τιμή.

Αν χρησιμοποιήσουμε απλά RC κυκλώματα με σωστό τρόπο επιλέγοντας κατάλληλα τις τιμές της σταθεράς χρόνου ανάλογα με τη συχνότητα του σήματος εισόδου μπορούμε να επιτύχουμε πιο σύνθετες λειτουργίες όπως η παραγώγιση και η ολοκλήρωση.

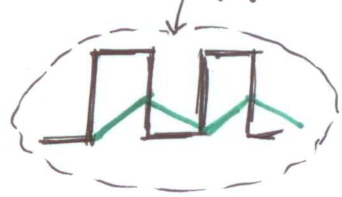
## Ολοκληρωτής RC



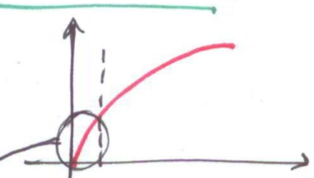

Γνωρίζουμε από τα παραδείγματα που είδαμε μέχρι τώρα πως αν η συχνότητα του σήματος εισόδου είναι μεγαλύτερη έναντι του αντίστροφου της σταθεράς χρόνου $\tau = R \cdot C$ του κυκλώματος πως ο πυκνωτής δεν προλαβαίνει να φορτιστεί ή να αποφορτιστεί πλήρως.




μεγέθυνση



Παρατηρούμε πως όταν η περίοδος T του σήματος εισόδου είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη σταθερά χρόνου $\tau = R \cdot C$ τότε η έξοδος σχεδόν χάνει την εκθετική μορφή και συμπεριφέρεται σαν μια γραμμή. Η τριγωνική κυματομορφή που λαμβάνουμε αν και μικρή σε πλάτος ουσιαστικά φέρει τη μορφή του ολοκληρώματος της συνάρτησης των παλμών.



φόρτιση του πυκνωτή για πολύ λίγο χρόνο.

Η συμπεριφορά σχεδόν γραμμική

Ας δούμε το ίδιο πρόβλημα ανάποδα. Δηλαδή γνωρίζουμε ότι το σήμα εισόδου έχει μια μέγιστη συχνότητα, και θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κύκλωμα που να επιτυγχάνει την ολοκλήρωση του. Γνωρίζουμε ήδη πως για να το πετύχουμε αυτό πρέπει το σήμα να φαίνεται στο RC δίκτυο ότι αλλάζει πολύ γρήγορα και ο πυκνωτής δεν προλαβαίνει να ανταποκριθεί. Έτσι αρκεί να διαλέξουμε μια μεγάλη τιμή για τα R και C ώστε η σταθερά χρόνου $\tau$ να είναι πολύ μεγαλύτερη της περιόδου του σήματος

Τότε ουσιαστικά θα έχουμε ένα μεγάλο γινόμενο R×C ενώ η τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_C$ θα παίρνει μικρές τιμές. Από τον KVL στο κύκλωμα έχουμε πως:

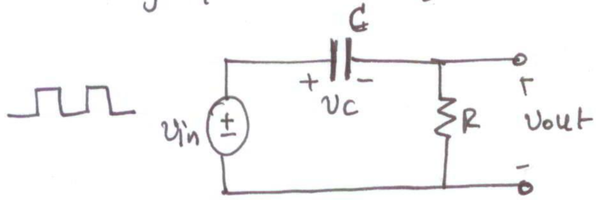
$$\left.\begin{array}{l} v_{in} - v_R - v_C = 0 \\ v_R = i\cdot R \\ i = C\dfrac{\partial v_C}{\partial t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_{in} = RC\dfrac{\partial v_C}{\partial t} + v_C \\ \text{Εφόσον } RC \text{ μεγάλο με αποτέλεσμα } v_C \text{ μικρό} \\ \text{Τότε } v_R + v_C \approx v_R \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_{in} \cong RC\dfrac{\partial v_C}{\partial t} \\ v_C = v_{out} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v_{out} \cong \frac{1}{RC}\int v_{in}\,dt}$$

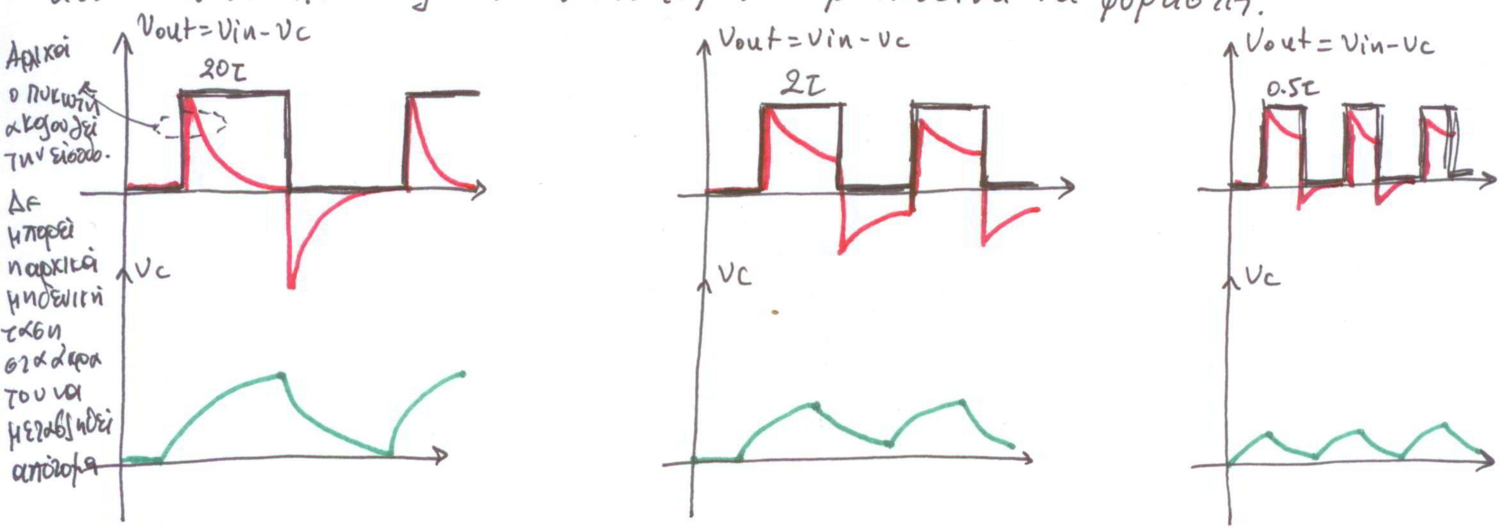
Με άλλα λόγια κάνοντας τη σωστή επιλογή για τα R και C μετατρέπουμε το κύκλωμα μας σε έναν αποτελεσματικό ολοκληρωτή του σήματος εισόδου.

## ΔΙΑΦΟΡΙΣΤΗΣ RC

Τη συμπληρωματική λειτουργία, δηλαδή αυτή της διαφόρισης, μπορούμε να την επιτύχουμε αν αλλάξουμε τη θέση του πυκνωτή και της αντίστασης.




Στην περίπτωση αυτή η τάση στην έξοδο $v_{out}$ είναι ίση με $v_{in} - v_C$. Επομένως, όσο θα εξελίσσεται η φόρτιση του πυκνωτή (αρχικά η διαφορά δυναμικού στα άκρα του 0) εμείς θα παρατηρούμε στην έξοδο ένα απότομο αρχικό άλμα της τάσης εξόδου και τη σταδιακή (εκθετική) μείωση της. Φυσικά και πάλι όσο πιο "αργό" το σήμα εισόδου τόσο πιο πολύ ο πυκνωτής θα προλαβαίνει να φορτιστεί.



Παρατηρούμε πως όταν η περίοδος του σήματος T είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη σταθερά χρόνου $\tau = R \cdot C$ του κυκλώματος τότε η έξοδος $V_{out}$ πλησιάζει προς την παράγωγο του σήματος εισόδου. Αντίστοιχα, η τάση $V_C$ παίρνει μεγάλες τιμές εφόσον προλαβαίνει ο πυκνωτής να φορτιστεί ή να αποφορτιστεί πλήρως.

Έτσι από τον KVL γνωρίζουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} &V_{in} - V_C - V_R = 0 \\ &V_R = i \cdot R \\ &i = C \frac{\partial V_C}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &V_{in} - V_C - RC\frac{\partial V_C}{\partial t} = 0 \\ &\text{Εφόσον } RC \text{ μικρό} \\ &\text{ή } V_C \text{ μεγάλο τότε} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$V_C + V_R \cong V_C$$

$\Rightarrow V_{in} \cong V_C$. Εμείς παρατηρούμε στην έξοδο τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης. Επομένως,

$$\left.\begin{aligned} &V_{out} = V_R = R \cdot C \frac{\partial V_C}{\partial t} \\ &V_C \cong V_{in} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{out} \cong RC \frac{\partial V_{in}}{\partial t}$$

Έτσι διαλέγοντας πολύ μικρές τιμές για τα R ή C (σε σχέση πάντα με την περίοδο του σήματος $V_{in}$) μπορέσαμε να μετατρέψουμε το κύκλωμά μας σε ένα αποτελεσματικό διαφοριστή.

**Για να πειραματιστήτε με τη λειτουργία του ολοκληρωτή και διαφοριστή μπορείτε να επισκεφθείτε τις εξής ιστοσελίδες**

**www.st-andrews.ac.uk/~www_pa/Scots_Guide/experiment/diff/diff.html**

**www.st-andrews.ac.uk/~www_pa/Scots_Guide/experiment/integ/int.html**