Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Άνοιξη 2008

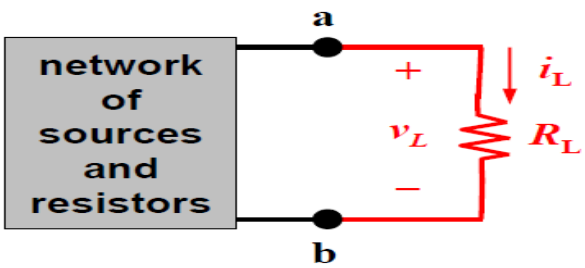
ΗΥ-121: Ηλεκτρονικά Κυκλώματα

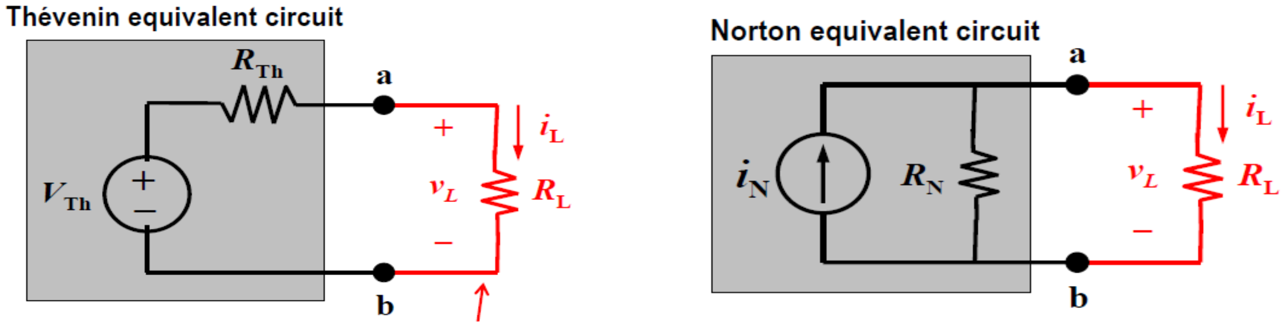
Γιώργος Δημητρακόπουλος

Ισοδύναμα Κυκλώματα και Μετασχηματισμοί

Ισοδύναμα Κυκλώματα Thevenin-Norton

Θεωρούμε ένα γενικού τύπου κύκλωμα το οποίο είναι συνδεδεμένο με ένα οποιοδήποτε φορτίο. Τα θεωρήματα Thevenin-Norton μας επιτρέπουν να πούμε ότι το κύκλωμα μπορεί να αντικατασταθεί από μια πραγματική πηγή τάσης ή ρεύματος αντίστοιχα χωρίς να μεταβληθεί η τάση και το ρεύμα των ακροδεκτών του φορτίου. Η δομή των Thevenin και Norton ισοδύναμων κυκλωμάτων φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.





Εύρεση του Thevenin ισοδύναμου.

Για να βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της ισοδύναμης αντίστασης και την τάση που παρέχει η ιδανική πηγή τάσης. Αρχικά θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις όπου το κύκλωμα δεν περιέχει εξαρτημένες πηγές. Η αντιμετώπιση των εξαρτημένων πηγών θα εξεταστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Υπολογισμός ισοδύναμης αντίστασης

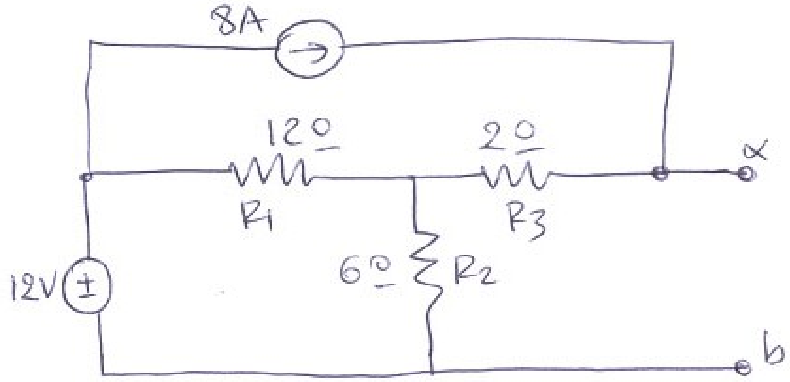
1. Αφαίρεσε το φορτίο
2. Μηδένισε όλες τις ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος του κυκλώματας.
3. Υπολόγισε την ισοδύναμη αντίσ   που βλέπουν οι ακροδέκτες του φορτίου.

Υπολογισμός της τάσης V_{TH}

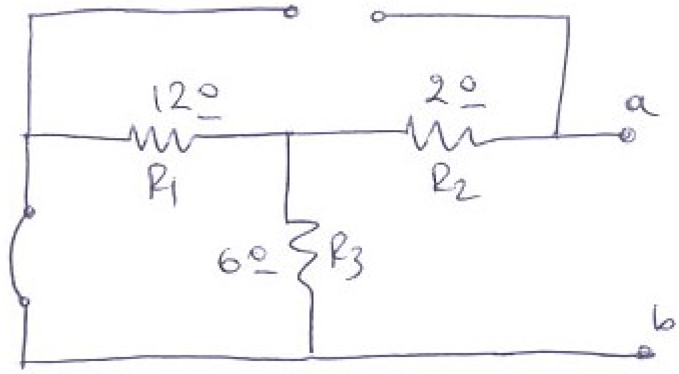
1. Αφαίρεσε το φορτίο.
2. Υπολόγισε την τάση ανοιχτοκυκλώματος που εμφανίζεται στα άκρα του φορτίου. Η τάση αυτή είναι ίση με την ισοδύναμη τάση Vth

Παράδειγμα εφαρμογής

Για το κύκλωμα που ακολουθεί θέλουμε να υπολογίσουμε το Thevenin ισοδύναμο του όπως αυτό φαίνεται από τα άκρα a και b. (Θεωρούμε ότι το φορτίο που ήταν συνδεδεμένο μεταξύ των a και b έχει ήδη αφαιρεθεί από το κύκλωμα μας.

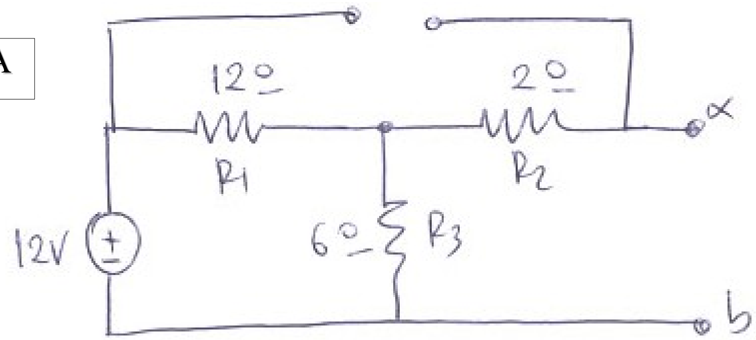


Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε την ισοδύναμη αντίσταση όπως αυτή φαίνεται από τα άκρα a και b. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να αφαιρέσουμε όλες τις ανεξάρτητες πηγές. Όπως μάθαμε η αφαίρεση μιας πηγής τασής επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση της από ένα βραχυκύκλωμα ενώ η αφαίρεση μιας πηγής ρεύματος ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της από ένα ανοιχτοκύκλωμα. Για το παράδειγμα μας το κύκλωμα μετά την αφαίρεση των πηγών είναι το εξής:



Έτσι η ισοδύναμη αντίσταση είναι ίση με $R_{EQ}=(R_1 \| R_3)+R_2=6\,\Omega$. Έχοντας υπολογίσει την ισοδύναμη αντίσταση μένει να βρούμε την τάση ανοιχτοκυκλώματος ώστε να ολοκληρώσουμε την κατασκεύη του Thevenin ισοδύναμου του κυκλώματος μας. Έτσι πρέπει να βρούμε την τάση που αναπτύσσεται στα άκρα a και b. Εφόσον το κύκλωμα μας αποτελείται και από πηγή ρεύματος και από πηγή τάσης θα βασιστούμε στην αρχή της επαλληλίας για την ανάλυση του. Έτσι για την ανάλυση χωρίζουμε το κύκλωμα σε δύο ανεξάρτητα κυκλώματα A και B.

A

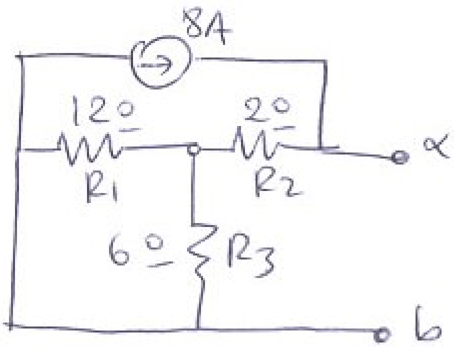


<u>Για το κύκλωμα A</u>

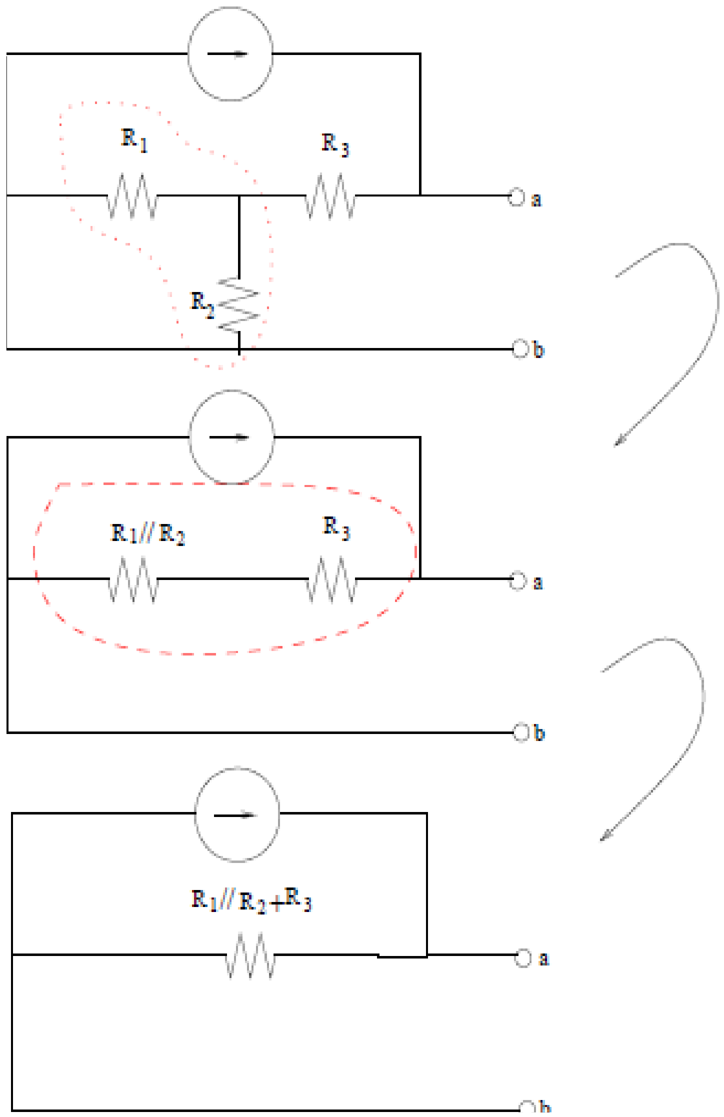
Εφόσον τα άκρα a και b είναι ανοιχτά, η αντίσταση R_2 δε διαρρέεται από ρεύμα. Έτσι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των a και b είναι ίση με την τάση στα άκρα της αντίστασης R3. Σε αυτήν την περίπτωση, οι αντιστάσεις R1 και R3 σχηματίζουν ένα διαιρέτη τάσης. Έτσι η τάση στα άκρα της R3 είναι ίση με:

$$V_{R3}=V_{AB}=\frac{R_3}{R_1+R_3}\dot{V}=\frac{6}{18}\cdot 12\,V=4\,V$$

B

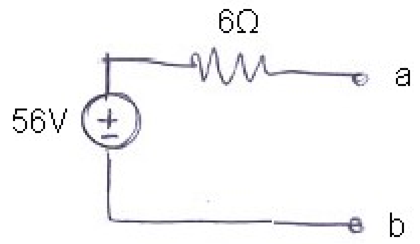


Για το κύκλωμα Β: Εφόσον ενδιαφερόμαστε μόνο για την τάση στα άκρα των a και b μπορούμε να απλοποιήσουμε το υπόλοιπο κύκλωμα συνενώνοντας τις αντιστάσεις του κυκλώματος με τις ισοδύναμες τους. Διαδοχικά λοιπόν προκύπτει το εξής κύκλωμα:



Από την τελευταία και πιο απλή εκδοχή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τάση στα άκρα a και b είναι ίση με $V_{AB} = I \cdot ((R_1 \| R_3) + R_2) = 8 \cdot (4+2) = 48\,V$

Από τις δύο επιμέρους λύσεις συμπεραίνουμε ότι η τάση στα άκρα a και b είναι ίση με 48 + 4 = 52 V. Επομένως το Thevenin ισοδύναμο του κυκλώματος όπως αυτό φαίνεται από τα άκρα a και b είναι το εξής:

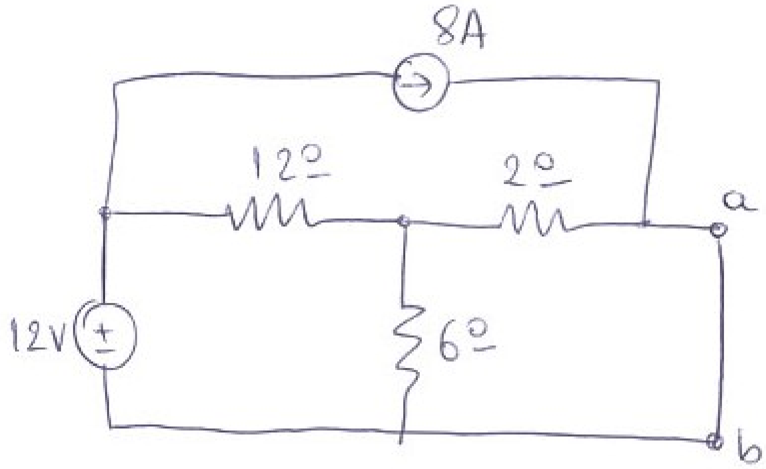


<u>Εύρεση του Norton ισοδύναμου.</u>

Η ισοδύναμη αντίσταση που υπολογίζουμε είναι κοινή και για την περίπτωση του κατά Thevenin ισοδύναμου και για την περίπτωση του κατά Norton ισοδύναμου $R_{TH} = R_N$. Επομένως αυτό που μένει είναι να υπολογίσουμε το ισοδύναμο ρεύμα Norton. Αυτό πραγματοποιείται ως εξής:

Υπολογισμός του ρεύματος I_N

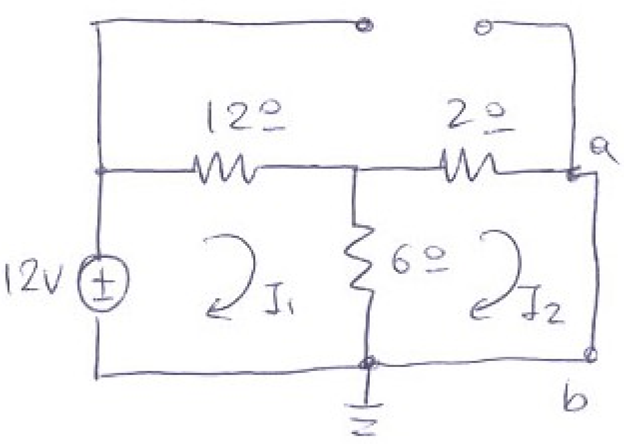
1. Αφαίρεσε το φορτίο
2. Βραχυκύκλωσε τα άκρα του φορτίου και υπολόγισε το ρεύμα που διαρρέει το βραχυκύκλωμα.



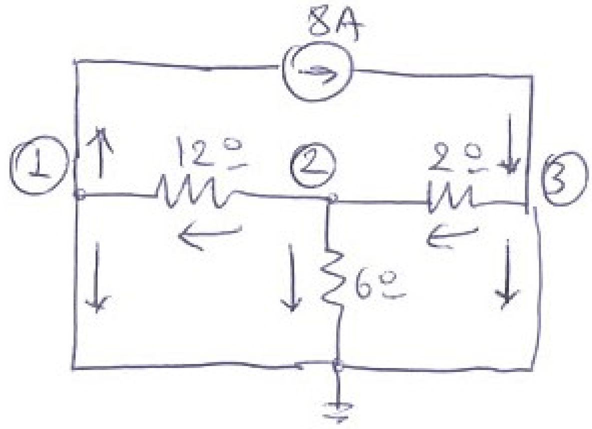
Παράδειγμα

Θα εκτελέσουμε το ίδιο παράδειγμα όπως και στην περίπτωση του Thevenin ισοδύναμου. Εχουμε ήδη βρει την ισοδύναμη αντίσταση και είναι ίση με 6Ω. Στη συνέχεια αφού βραχυκυκλώσουμε τα άκρα a και b θα υπολογίσουμε το ρεύμα που ρέει από αυτόν τον κλάδο βασιζόμενοι και πάλι στην αρχή της επαλληλίας. Τα δύο κυκλώματα που θα μας βοηθήσουν στην ανάλυση μας είναι τα εξής:

A



B



Για το κύκλωμα Α: Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα στη γενική του μορφή. Θα το αναλύσουμε δηλαδή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των απλών βρόγχων. Το κύκλωμα αποτελείται από δύο βρόγχους οι οποίοι θεωρούμε οτι διαρρέονται από δύο ρεύματα I_1 και I_2. Το 2x2 γραμμικό σύστημα που προκύπτει είναι το εξής:

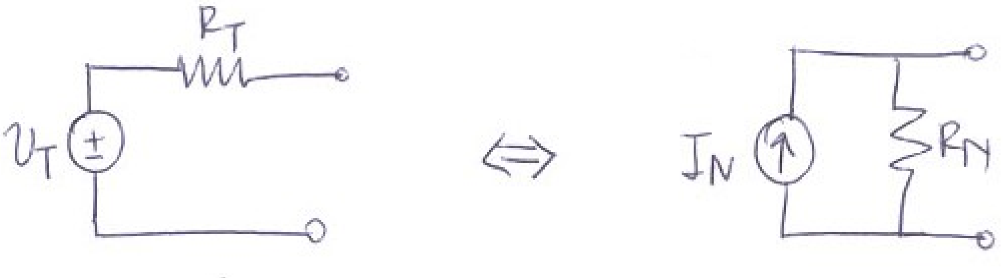
$$\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας ως προς τα I_1 και I_2 παίρνουμε ότι το ρεύμα βραχυκυκλώματος μεταξύ των a και b είναι ίσο με το $I_2 = I_{SC-AB} = 0.6667\text{A}$

Για το κύκλωμα Β: Η βραχυκυκλωμένη πηγή τάσης που εμφανίζεται στο κύκλωμα Β και το βραχυκύκλωμα μεταξύ των κόμβων a και b ωθεί όλο το ρεύμα της πηγής ρεύματος να περάσει από το βραχύκλωμα μεταξύ των α και b. Έτσι I_{SC-AB} = 8A. Επομένως από τις δύο περιπτώσεις I_N=8.667A.

Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να μετασχηματίσουμε το Thevenin ισοδύναμο στο Norton ισοδύναμο του
Η σχέση που συνδέει την τάση Thevenin με το ρεύμα Norton δίνεται από τη σχέση.

$$V_T = R \cdot I_N \quad \text{όπου} \quad R = R_T = R_N$$

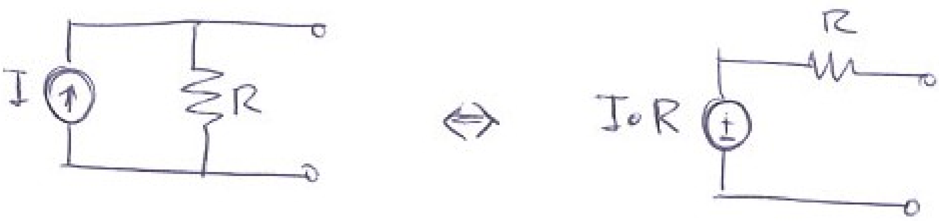


Ουσιαστικά δε χρειάζεται να υπολογίσουμε την ισοδύναμη αντίσταση. Απλά μπορούμε για ένα οποιοδήποτε κύκλωμα να μετρήσουμε την τάση ανοιχτοκυκλώματος στα άκρα του φορτίου και το αντίστοιχο ρεύμα βραχυκυκλώματος., Ο λόγος της τάσης προς το ρεύμα που μετρήσαμε μας δίνει την ισόδυναμη κατά Thevenin – Norton αντίσταση του κυκλώματος. Αυτό που κάνει τη ανάλυση γενική είναι πως επιτρέπει τη γρήγορη ανάλυση και μετά την αντικατάσταση του φορτίου με κάποιο άλλο. Έχοντας το ισοδύναμο του υπόλοιπου κυκλώματος η ανάλυση δεν απαιτείται να επαναληφθεί.

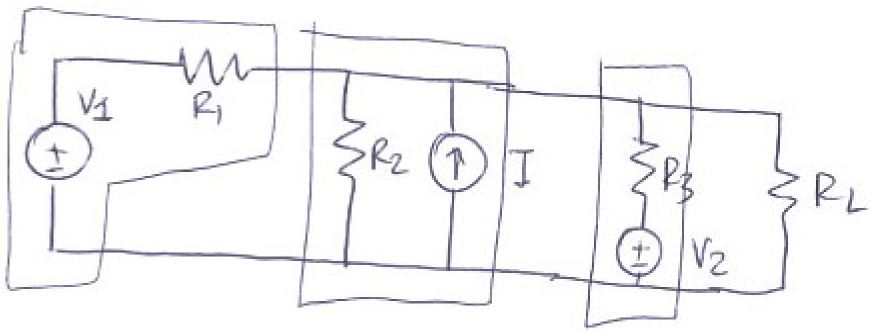
Μετασχηματισμός πραγματικών πηγών τάσης και ρεύματος

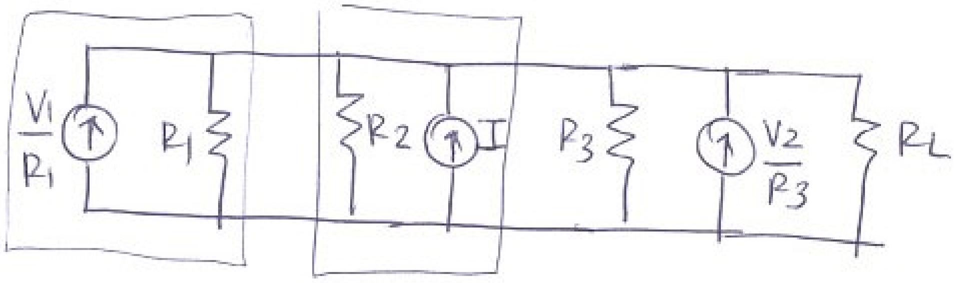
Μετά την ανάλυση των ισοδύναμων κυκλωμάτων κατά Thevenin και Norton μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε πως μπορούμε να μεταβούμε από μια πραγματική πηγή τάσης σε μια πραγματική πηγή ρεύματος με εύκολο τρόπο. Αυτό μας βοηθαει στην ανάλυση των κυκλωμάτων και ιδιαίτερα στην περίιπτωση που το κύκλωμα αποτελείται από δύο είδη πηγών.

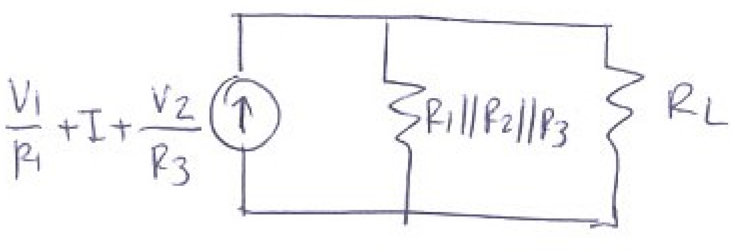
Κανόνες Μετασχηματισμού



Η εφαρμογή των κανόνων μετασχηματισμού θα φανεί καλύτερα με το παρακάτω παράδειγμα όπου ένα σύνθετο κύκλωμα καταλήγει εύκολα σε ένα απλό διαιρέτη ρεύματος.

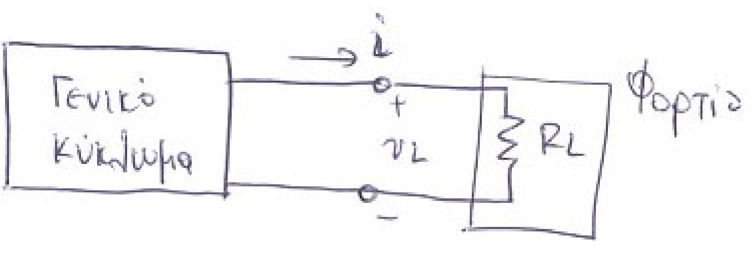




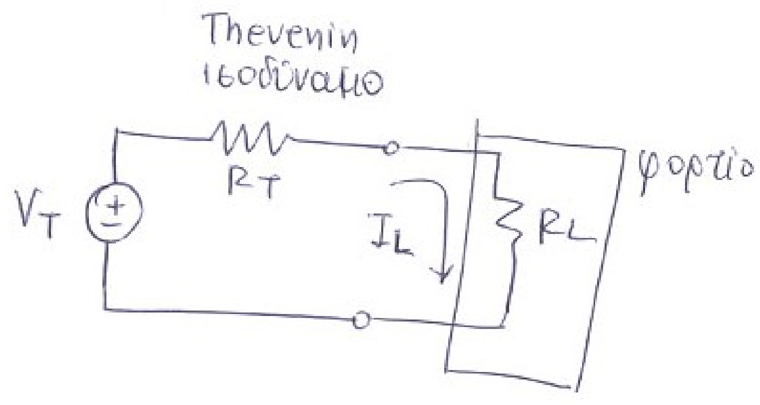


Μέγιστη μεταφορά ισχύος σε φορτίο

Μέχρι στιγμής έχουμε δείξει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να μεταβούμε από ένα σύνθετο κύκλωμα στο Thevenin ή στο Norton ισοδύναμο του. Αυτό που θέλουμε να μελετήσουμε σε αυτήν την παράγραφο είναι ο τρόπος με τον οποίο μεταφέρεται η ισχύς από ένα γενικό κύκλωμα σε ένα φορτίο (προς το παρόν θεωρούμε ότι το φορτίο αποτελείται από μία αντίσταση).



Για να απλοποιήσουμε την ανάλυση και να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα πρέπει καταρχήν να αντικαταστήσουμε το γενικό κύκλωμα από το Thevenin ισοδύναμο του. Σε αυτήν την περίπτωση το προηγούμενο κύκλωμα παίρνει την εξής μορφή:



Το ρεύμα που διαρρέει το φορτίο είναι ίσο με

$$I_L = \frac{V}{R_S + R_L}$$

Επομένως η ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι ίση με

$$P_L = I_L^2 \cdot R_L = \frac{V^2 R_L}{(R_T + R_L)^2}$$

Για μια δεδομένη τιμή του R_T μας ενδιαφέρει να βρούμε εκείνη την τιμή της αντίστασης του φορτίου η οποία μας επιτρέπει να μεταφέρουμε στο φορτίο τη μέγιστη δυνατή ισχύ. Για να βρούμε την μέγιστη τιμή της ισχύος συναρτήσει της τιμής της R_L πρέπει να πάρουμε την παράγωγο του P_L και να τι θέσουμε ίση με 0.

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = V^2 \left(\frac{(R_T + R_L)^2 - 2\mathrm{R}_L (R_T + R_L)}{(R_T + R_L)^4} \right) = 0$$

Απο την παραπάνω εξίσωση προκύπτει για να έχω τη μέγιστη τιμή της ισχύος πρέπει

$$(R_T + R_L)^2 - 2\mathrm{R}_L (R_T + R_L) = 0$$

το οποίο απλοποιείται στην εξής συνθήκη

$$R_T = R_L$$

Η τελευταία ισότητα μας επιτρέπει να πούμε πως η αντίσταση του φορτίου λαμβάνει τη μέγιστη ισχύ από ένα κύκλωμα ότα η αντίσταση του φορτίου είναι ίση με την ισοδύναμη Thevenin αντίσταση του κυκλώματος.

Στην περίπτωση που επιτευχθεί η ισότητα, η αντισταση του φορτίου καλείται *προσαρμοσμένη* (matched) με την ισοδύμανη αντίσταση του κυκλώματος. Τότε η ισχύς που μεταφέρεται στο φορτίο είναι ίση με

$$P_L = \frac{V^2}{4 R_T}$$

ενώ το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταστη του φορτίου είναι ίση με

$$I_L = \frac{1}{2\mathrm{R}_T} V = \frac{1}{2\mathrm{R}_L} V$$

Επίσης, όταν έχω επιτύχει την προσαρμογή των αντιστάσεων και επομένως στο φορτίο μεταφέρεται η μέγιστη ισχύς προκύπτει ότι η διαφορά δυναμικού που αναπτύσεται στα άκρα του φορτίου είναι ίση με τη μισή ισοδύναμη κατα Thevenin τάση του κυκλώματος. Αυτό μπορεί εύκολα να δειχθεί ως εξής:

$$V_L = I_L \cdot R_L = \frac{1}{2\mathrm{R}_L} V \cdot R_L = \frac{V}{2}$$

Γενικά η μέγιστη ισχύς που μεταφέρεται στο φορτίο είναι το 50% της συνολικής ισχύς που παράγει η ισοδύναμη κατά Thevenin πηγή τάσης ενώ η υπόλοιπη ισχύς αναλώνεται μέσα στο κύκλωμα (στην ισοδύναμη αντίσταση R_T).