

HY-121: Ηλεκτρονικά Κυκλώματα

Γιώργος Δημητρακόπουλος

Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων με Αντιστάσεις

Η ανάλυση ενός κυκλώματος με αντιστάσεις στη γενική της περίπτωση μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους. Και οι δύο μέθοδοι είναι άμεση συνέπεια των νόμων του Kirchhoff.

Η μέθοδος των απλών βρόγχων

Για την πρώτη παρουσίαση της μεθόδου θεωρούμε πως το κύκλωμα μας αποτελείται μόνο από πηγές τάσης και αντιστάσεις και δεν υπάρχουν καθόλου πηγές ρεύματος. Η γενικότερη παρουσίαση της μεθόδου θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Αρχικά πρέπει να ορίσουμε έναν κόμβο αναφοράς τον οποίο αναπαριστούμε με το σύμβολο της γης και θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι ίσο με 0V. Στη συνέχεια ανακαλύπτουμε όλους τους απλούς βρόγχους του κυκλώματος και τους αριθμούμε. Θεωρούμε πως ο απλός βρόγχος k διαρρέεται από ένα ρεύμα I_k . Επίσης κάνουμε τη σύμβαση πως τα ρεύματα όλων των απλών βρόγχων έχουν την ίδια φορά με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (φορά αναφοράς).

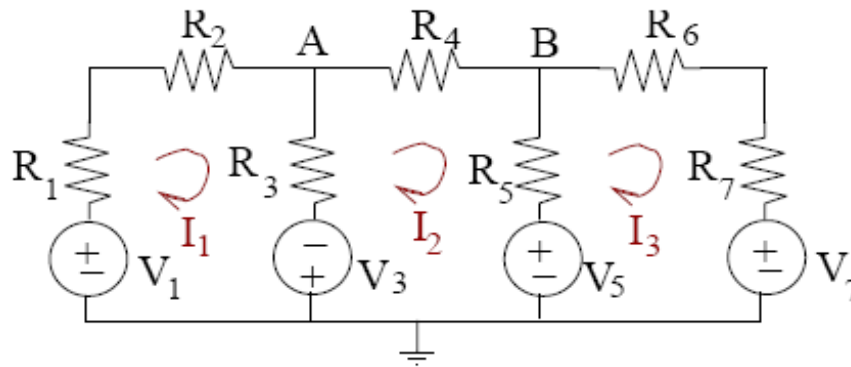
Το γραμμικό σύστημα που πρέπει να λύσουμε έχει τη μορφή $Z_m I = E$ όπου με Z_m συμβολίζουμε τον πίνακα αντιστάσεων των απλών βρόγχων ενώ το διάνυσμα E περιέχει τη συνεισφορά των πηγών τάσης του υπο-εξέτασης κυκλώματος. Για ένα κύκλωμα με 3 απλούς βρόγχους το γραμμικό σύστημα παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

Αυτό που μένει να αντιστοιχίσουμε τις τιμές των Z_{ij} και E_i με τις αντιστάσεις και τις πηγές τάσης του κυκλώματος μας. Αυτό πραγματοποιείται με τους εξής απλούς κανόνες:

- Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου Z_{ii} ισούνται με το άθροισμα των αντιστάσεων των κλάδων που απαρτίζουν το βρόγχο i .
- Τα στοιχεία Z_{ij} και Z_{ji} με $i \neq j$ που βρίσκονται εκατέρωθεν της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα (ο πίνακας Z_m είναι συμμετρικός) και η τιμή τους είναι το αρνητικό άθροισμα των αντιστάσεων που είναι κοινές στους βρόγχους i και j . Αν οι βρόγχοι i και j δεν έχουν κοινές αντιστάσεις τότε $Z_{ij}=Z_{ji}=0$.
- Κάθε E_i ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσεων που υπάρχουν το βρόγχο i . Όταν οι πηγές τάσης έχουν την ίδια φορά με τη φορά αναφοράς (όταν διατρέχουμε το βρόγχο βλέπουμε πρώτα τον αρνητικό πόλο της πηγής τάσης) θεωρούμε πως είναι θετικές ενώ στην αντίθετη περίπτωση συμμετέχουν στον υπολογισμό του E_i με αρνητικό πρόσημο. Η φορά αναφοράς του βρόγχου ταυτίζεται με τη φορά του ρεύματος του βρόγχου που επιλέξαμε

Παράδειγμα



Το κύκλωμα του παραδείγματος αποτελείται από 3 βρόγχους οι οποίοι θεωρούμε ότι διαρρέονται από τα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 αντίστοιχα. Ακολουθώντας τα τρία βήματα της μεθόδου το γραμμικό σύστημα που προκύπτει ως προς τα ρεύματα είναι το εξής:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 + R_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 + V_3 \\ -V_3 - V_5 \\ V_5 - V_7 \end{pmatrix}$$

Αφού λύσουμε το σύστημα, υπολογίσουμε δηλαδή τα I_1 , I_2 και I_3 βρίσκουμε τις τάσεις ως προς τον κόμβο αναφοράς όλων των υπόλοιπων κόμβων του κυκλώματος και στη συνέχεια μπορούμε απλά να υπολογίσουμε τα ρεύματα των κλάδων (Τα ρεύματα των κλάδων που είναι κοινοί μεταξύ των βρόγχων είναι ουσιαστικά η διαφορά των ρευμάτων που διαρρέουν τους δύο γειτονικούς βρόγχους).

Η μέθοδος των κόμβων

Για την πρώτη παρουσίαση της μεθόδου θεωρούμε πως το κύκλωμα μας αποτελείται μόνο από πηγές ρεύματος και αντιστάσεις και δεν υπάρχουν καθόλου πηγές τάσης. Αρχικά πρέπει να ορίσουμε έναν κόμβο αναφοράς τον οποίο αναπαριστούμε με το σύμβολο της γης και θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι ίσο με 0V. Στη συνέχεια ανακαλύπτουμε τους υπόλοιπους κόμβους του κυκλώματος και τους αριθμούμε. Θεωρούμε πως ο κόμβος k έχει τάση V_k .

Το γραμμικό σύστημα που πρέπει να λύσουμε έχει τη μορφή $Z_k V = J$ όπου με Z_k συμβολίζουμε τον πίνακα αντιστάσεων των κόμβων ενώ το διάνυσμα J περιέχει τη συνεισφορά των πηγών ρεύματος του υπο-εξέτασης κυκλώματος. Για ένα κύκλωμα με 3 κόμβους (χωρίς να προσμετράτε ο κόμβος αναφοράς) το γραμμικό σύστημα παίρνει την παρακάτω μορφή:

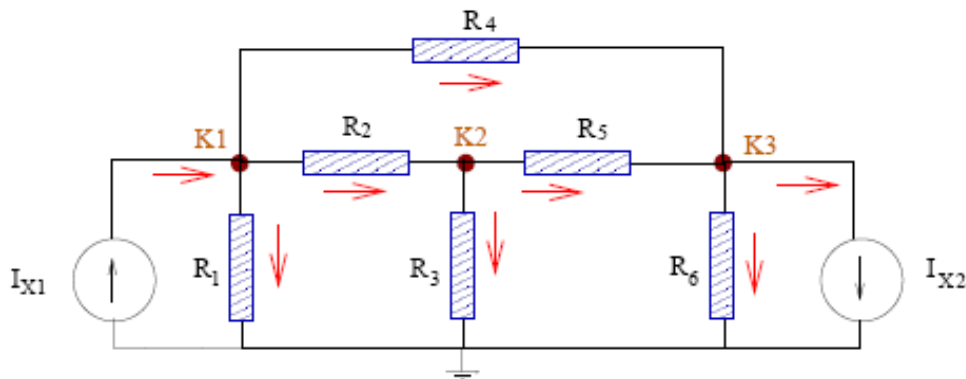
$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

Για την ανάλυση κάποιου συγκεκριμένου κυκλώματος πρέπει να αντιστοιχίσουμε τις τιμές των Z_{ij} και J_i με τις αντιστάσεις και τις πηγές ρεύματος του κυκλώματος μας. Αυτό πραγματοποιείται με τους εξής απλούς κανόνες:

- Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου Z_{ii} ισούνται με το άθροισμα των αντιστάσεων των κλάδων που συνδέονται στον κόμβο i .
- Τα στοιχεία Z_{ij} και Z_{ji} με $i \neq j$ που βρίσκονται εκατέρωθεν της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα (ο πίνακας Z_k είναι συμμετρικός) και η τιμή τους είναι το αρνητικό άθροισμα των αντιστάσεων που είναι κοινές στους κόμβους i και j . Αν οι κόμβοι i και j δεν έχουν κοινές αντιστάσεις τότε $Z_{ij}=Z_{ji}=0$.
- Κάθε J_i ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών ρεύματος που καταλήγουν στον κόμβο i .

Όταν το ρεύμα μιας πηγής εισέρχεται (φτάνει) στον κόμβο i τότε θεωρούμε ότι το ρεύμα αυτό είναι θετικό. Στην αντίθετη περίπτωση που το ρεύμα της αντίστοιχης πηγής εξέρχεται (φεύγει) από τον κόμβο συμμετέχει στον υπολογισμό του J_i με αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα



Το κύκλωμα του παραδείγματος αποτελείται από 3 κόμβους K_1 , K_2 και K_3 (και ένας ο κόμβος αναφοράς 4) στους οποίους θεωρούμε ότι έχει αναπτυχθεί τάση ίση με V_1 , V_2 και V_3 αντίστοιχα. Ακολουθώντας τα τρία βήματα της μεθόδου των κόμβων το γραμμικό σύστημα που προκύπτει ως προς τις τάσεις είναι το εξής:

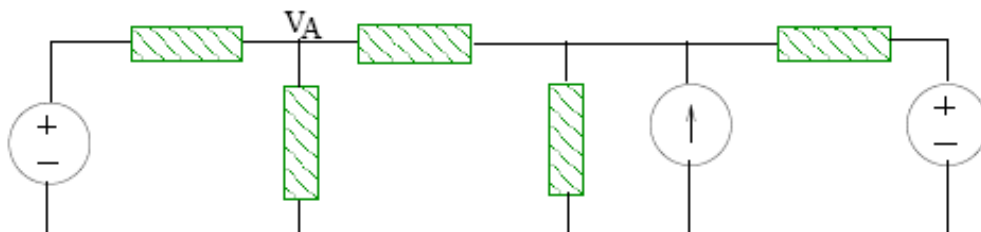
$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_5 + R_6 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x1} \\ 0 \\ -I_{x2} \end{pmatrix}$$

Αφού λύσουμε το σύστημα βρίσκουμε τις τάσεις V_1 , V_2 και V_3 και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα ρεύματα όλων των κλάδων του κυκλώματος.

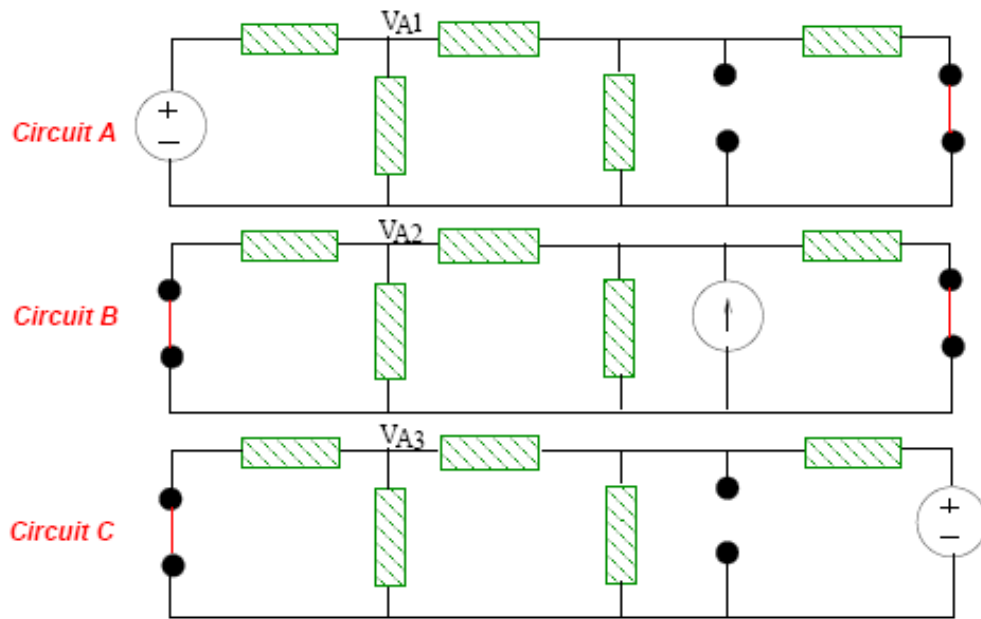
Αρχή της επαλληλίας

Με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας μπορούμε να χωρίσουμε την ανάλυση ενός κυκλώματος σε επιμέρους βήματα τα οποία μπορούμε να εκτελέσουμε ευκολότερα. Η αρχή της επαλληλίας ορίζεται ως εξής: Σε κάθε γραμμικό ηλεκτρικό κύκλωμα το ρεύμα ή η τάση οποιουδήποτε κλάδου, που προέρχεται από την επίδραση περισσότερων από μιας ανεξάρτητων πηγών, είναι ίσα με το άθροισμα των ρευμάτων ή των τάσεων αντίστοιχα που προέρχονται από κάθε ανεξάρτητη πηγή, όταν αυτή δρα μόνη της, ενώ οι υπόλοιπες πηγές είναι νεκρές.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε πως έχουμε το παρακάτω κύκλωμα το οποίο αποτελείται από τρεις ιδανικές πηγές. Δύο ιδανικές πηγές τάσης και μία ιδανική πηγή ρεύματος.



Η διαφορά δυναμικού στα άκρα των αντιστάσεων και το ρεύμα που τις διαρρέει μπορεί να υπολογιστεί αν θεωρήσουμε τα τρία ανεξάρτητα κυκλώματα που φαίνονται παρακάτω.



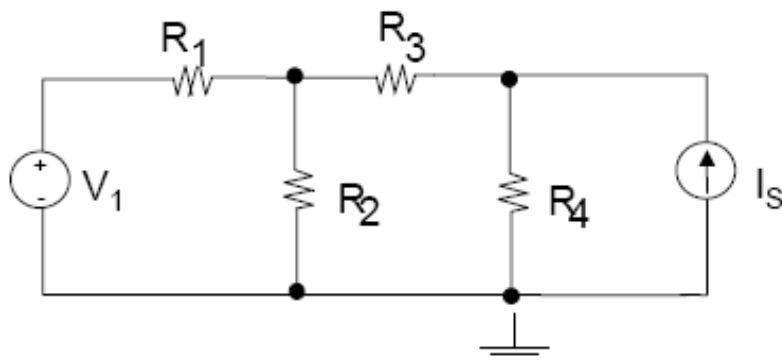
Στο κύκλωμα A έχουμε μηδενίσει (νεκρώσει) την πηγή ρεύματος και τη δεξιά πηγή τάσης. Αντίθετα στο κύκλωμα B έχουμε μηδενίσει τις δύο πηγές τάσης και υπολογίζουμε τη συνεισφορά μόνο της πηγής ρεύματος. Τέλος στο κύκλωμα C έχουμε αποσύρει την αριστερή πηγή τάσης και την πηγή ρεύματος, με αποτέλεσμα η συμπεριφορά του να εξαρτάται αποκλειστικά από την μία πηγή τάσης.

Τι σημαίνει νεκρή πηγή. Για την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας όταν θέλουμε να αφαιρέσουμε μια πηγή τάσης την αντικαθιστούμε με ένα βραχυκύκλωμα μηδενίζοντας έτσι τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της. Αντίθετα, ο μηδενισμός μιας πηγής ρεύματος πραγματοποιείται αντικαθιστώντας την πηγή από ένα ανοιχτοκύκλωμα.

Κάθε τάση ή ρεύμα του αρχικού κυκλώματος προκύπτει από το άθροισμα των τάσεων και των ρευμάτων που υπολογίζουμε για το κάθε ένα κύκλωμα A, B και C χωριστά. Έτσι για παράδειγμα η τάση του κόμβου A (V_A) του συνολικού κυκλώματος μπορεί πολύ εύκολα να υπολογιστεί αν αθροισούμε τις επιμέρους τάσεις V_{A1} , V_{A2} και V_{A3} που υπολογίζουμε από τα τρία “απλούστερα” κυκλώματα.

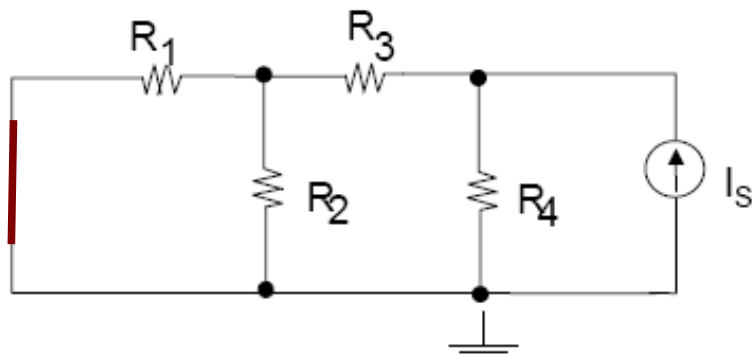
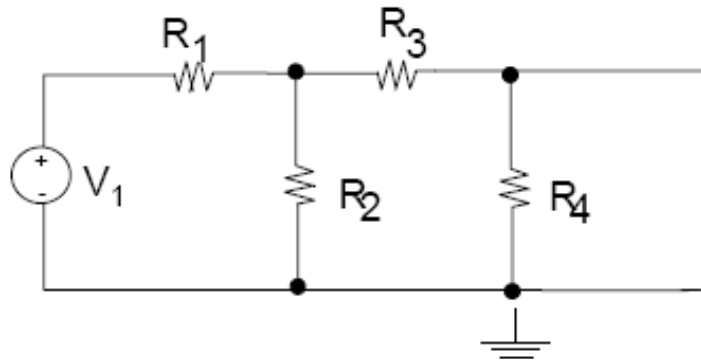
Κυκλώματα με δύο είδη πηγών

Η αρχή της επαλληλίας μας βοηθάει να αναλύσουμε κυκλώματα τα οποία περιέχουν ταυτόχρονα πηγές τάσης και ρεύματος. Ένα τέτοιο κύκλωμα φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.



Στην περίπτωση αυτή θα θέλαμε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των απλών βρόγχων για τις πηγές τάσης και τη μέθοδο των κόμβων για τις πηγές ρεύματος. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας. Δημιουργούμε με άλλα λόγια δύο κυκλώματα. Το ένα αποτελείται μόνο από τις

πηγές τάσεις του αρχικού κυκλώματος ενώ οι πηγές ρεύματος έχουν αντικατασταθεί από ανοικτοκυκλώματα, ενώ το άλλο αποτελείται μόνο από τις πηγές ρεύματος και οι πηγές τάσης έχουν αντικατασταθεί από βραχυκυκλώματα.



Στην πρώτη εκδοχή υπολογίζουμε εύκολα με τη μέθοδο των απλών βρόγχων τα ρεύματα και τις τάσεις του κυκλώματος. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε τα αθροίζουμε με αυτά που προκύπτουν μετά την εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων στο κύκλωμα το οποίο αποτελείται μόνο από πηγές ρεύματος.

Ο τρόπος αυτός αντιμετώπισης της ύπαρξης πηγών δύο ειδών είναι ο πιο απλός και οδηγεί πάντα σε σίγουρα αποτελέσματα. Στο επόμενο κεφάλαιο και στα παραδείγματα που θα δοθούν θα αναπτύξουμε και άλλες τεχνικές οι οποίες επιτρέπουν εύκολα την ανάλυση των κυκλωμάτων ανεξάρτητα από το είδος των πηγών που υπάρχουν στο κύκλωμα. Η εφαρμογή τους παρόλα αυτά απαιτεί περισσότερη εμπειρία στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.