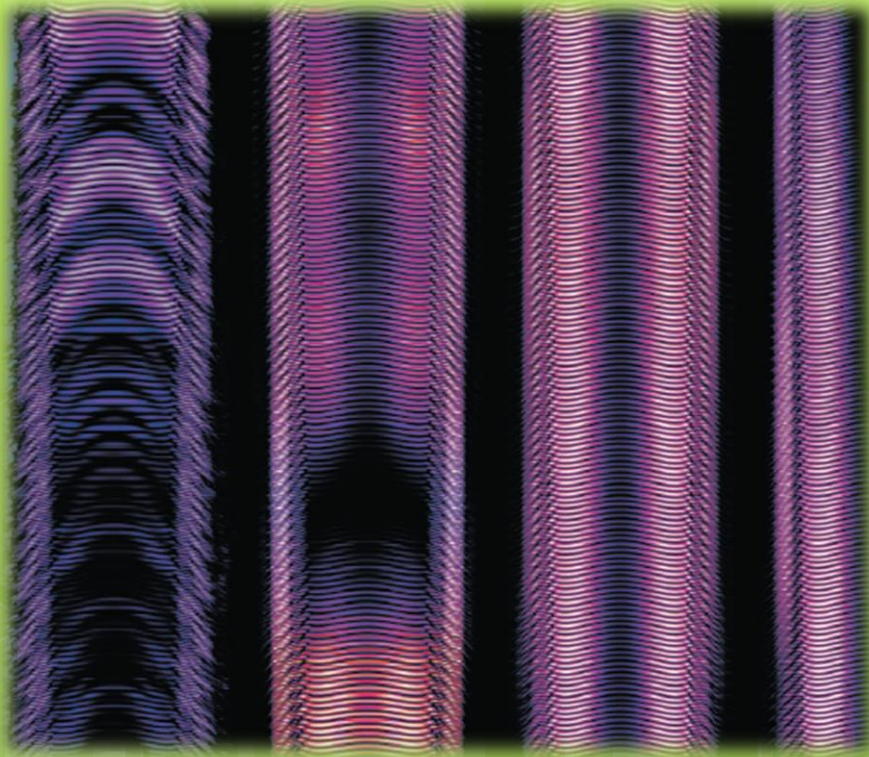




Εικόνα: Το τραγούδι μιας φάλαινας μπορεί να ταξιδέψει εκατοντάδες χιλιόμετρα στο νερό. Το γράφημα αυτό χρησιμοποιεί μια τεχνική που λέγεται ανάλυση σε κυματίδια για να μελετήσει κανείς τη συχνотική δομή του τραγουδιού.

2^η Ενότητα Ταλαντώσεις και Κυματική



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

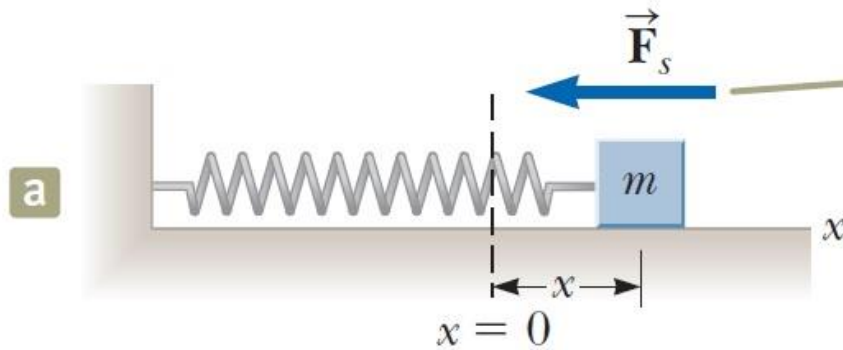
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Περιοδική κίνηση:** ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος που επιστρέφει σε μια αρχική θέση ανά τακτά σταθερά χρονικά διαστήματα
 - Πολλά παραδείγματα από την καθημερινότητα
 - Δείκτες ρολογιού
 - Ανατολή-Δύση Ηλίου
 - Διαλέξεις Φυσικής ☺
 - Τροχιά δορυφόρου γύρω από τη Γη
- Μαθηματικός ορισμός: $f(t) = f(t + T)$, $T > 0, \forall t > 0$

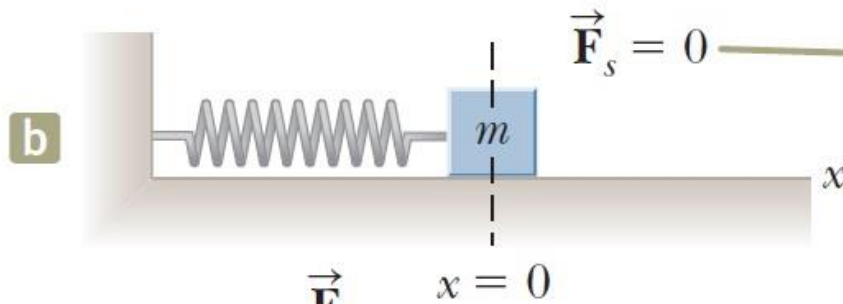
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Απλή αρμονική κίνηση:** περιοδική κίνηση που συμβαίνει συχνά σε μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη είναι ανάλογη της θέσης του σώματος, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας
- **Ορισμός:** Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση λέγεται **Απλή Αρμονική Κίνηση**
- Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση (ποια;) 😊

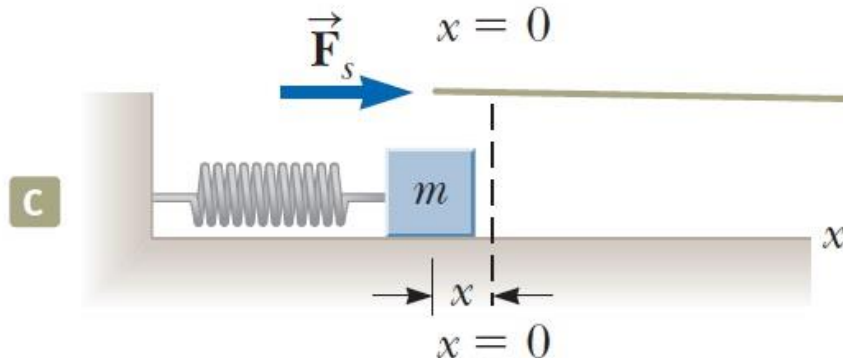
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο στο σώμα δρα με κατεύθυνση προς τα αριστερά.



Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο είναι μηδενική.



Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο δρα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

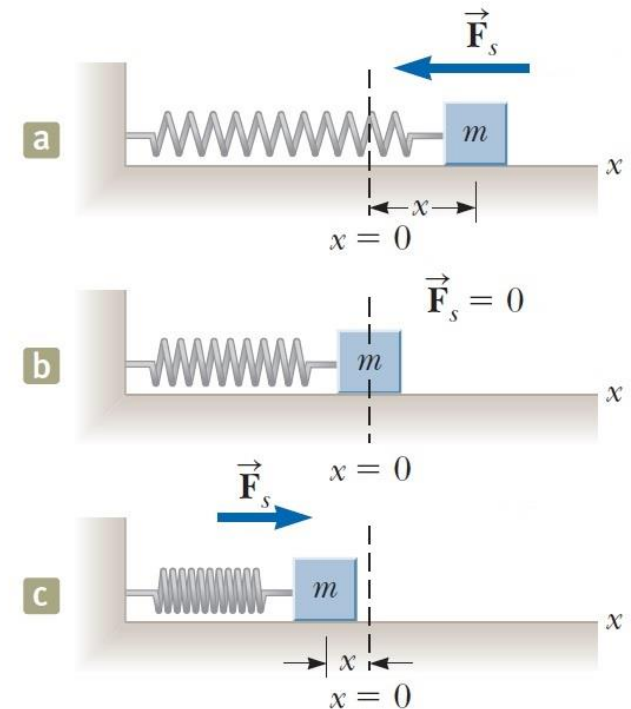
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σώμα σε κίνηση

$$\sum F_x = ma_x \leftrightarrow -kx = ma_x \leftrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

- Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της θέσης
- Η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας

Απλή Αρμονική Κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Εξισώσεις απλής αρμονικής ταλάντωσης

$$a_x = -\frac{k}{m}x \leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- Αν θέσουμε $\omega^2 = \frac{k}{m}$, τότε έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Λύση διαφορικής εξίσωσης

Φάση

Πλάτος ταλάντωσης

Φάση μετατόπισης ή σταθερά φάσης

Συχνότητα ταλάντωσης

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Συχνότητα ταλάντωσης

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Ονομάζεται **γωνιακή συχνότητα**

- Μετριέται σε rad/s

- Ορίζει πόσο συχνά ταλαντώνεται το σώμα

- Σταθερά φάσης φ

- Ορίζει την τιμή του συνημιτόνου τη στιγμή $t = 0$

- $t = 0 \Rightarrow x(0) = A \cos(0 + \varphi) = A \cos(\varphi)$

- Η τιμή $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ ορίζει τη **χρονική μετατόπιση** σε δευτερόλεπτα του $x(t)$ από τη θέση $t = 0$

- $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega(t + \varphi/\omega)) = A \cos(\omega(t + t_0))$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Περίοδος

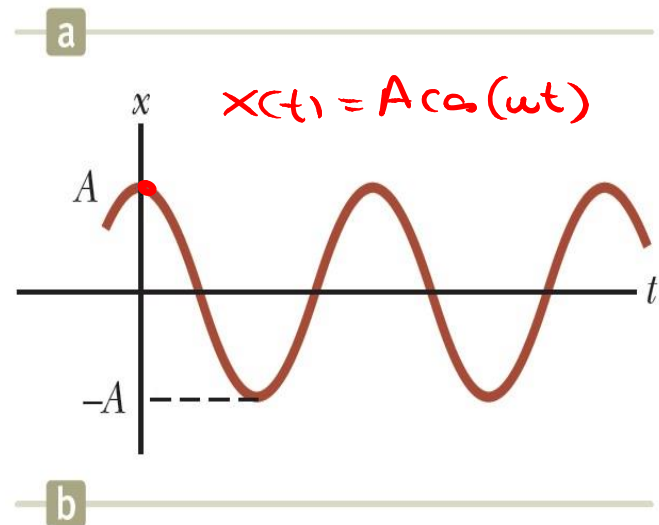
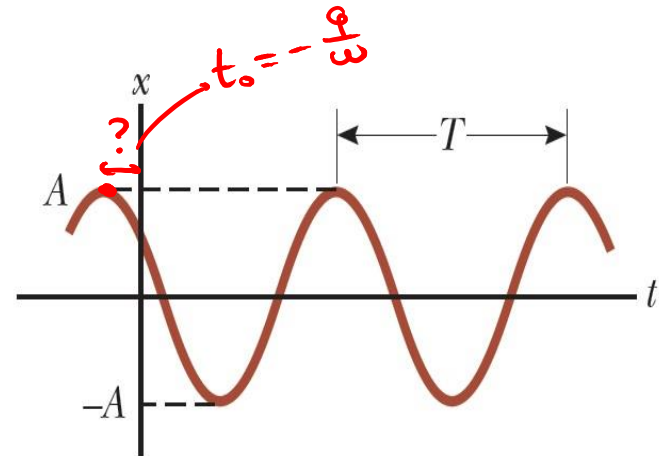
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Συχνότητα (σε Hertz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Σχέση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ταχύτητα & επιτάχυνση απλής αρμονικής κίνησης

$$u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Μέγιστες τιμές

$$u_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \qquad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Πώς βρίσκουμε τις σταθερές A , φ , της ταλάντωσης;

- Συχνότητα: εξαρτάται από k , m

- Πλάτος, φάση: **αρχικές συνθήκες!** ($t = 0$)

- Παράδειγμα 1:**

- $x(0) = A \cos(\varphi) = A$, $\leadsto \varphi = 0$

- $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = 0$ $\leadsto \varphi = 0$

- Δίνουν $\varphi = 0$

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

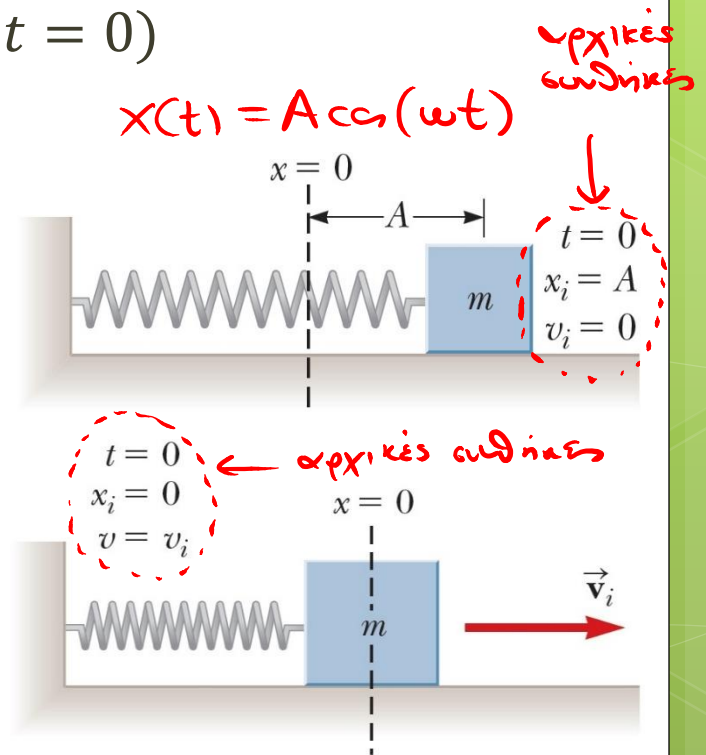
- Παράδειγμα 2:**

- $x(0) = A \cos(\varphi) = 0$, $\leadsto \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

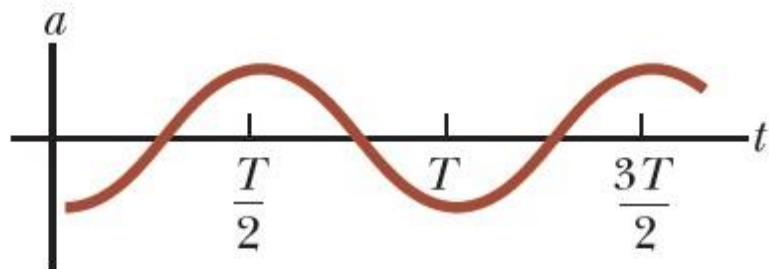
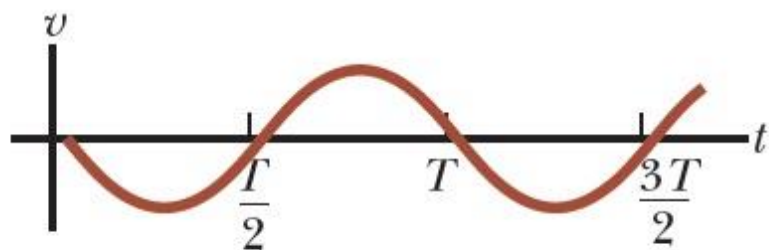
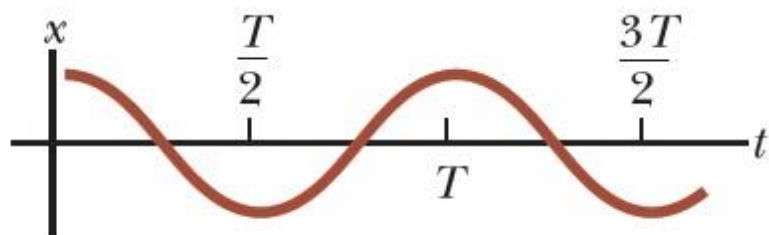
- $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = u_i$ $\leadsto \varphi = -\frac{\pi}{2}$

- Δίνουν $\varphi = -\pi/2$

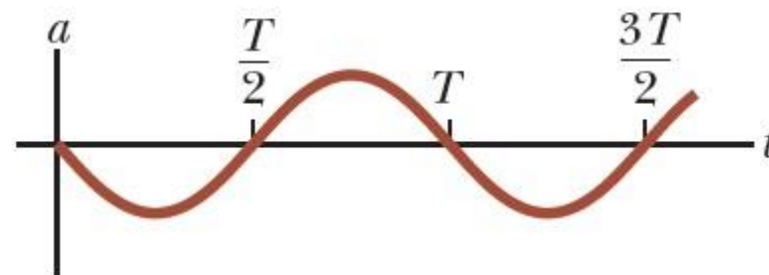
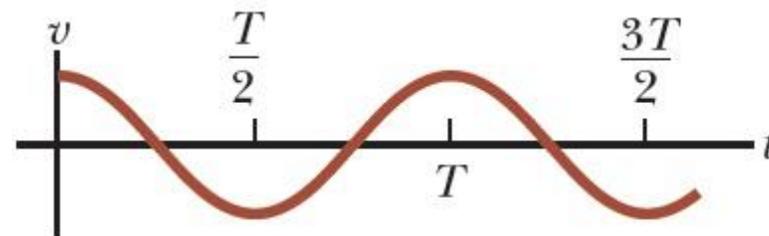
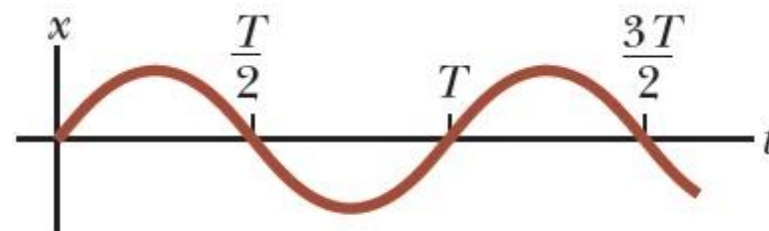
$$x(t) = \frac{u_i}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_i}{\omega} \sin(\omega t)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση



a



b

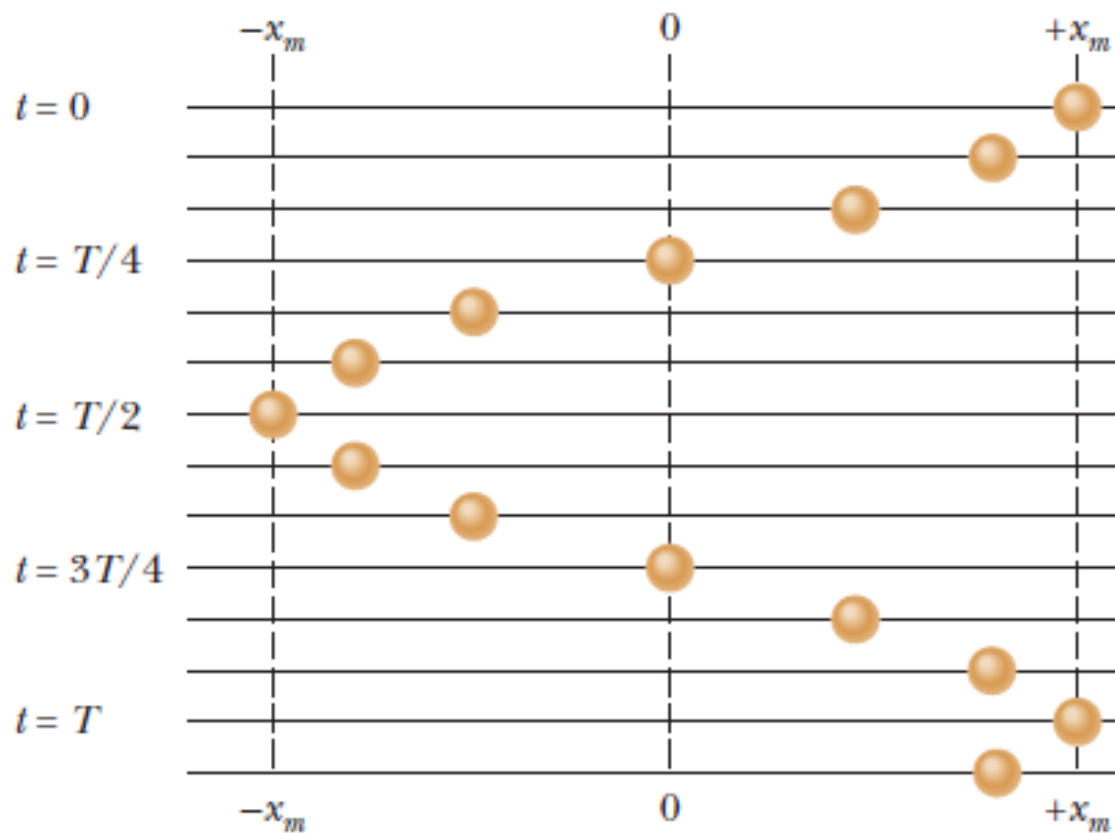
Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση για (a) $t = 0, x(0) = A, u(0) = 0$ και (b) $t = 0, x(0) = 0, u(0) = u_i$

Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 2

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

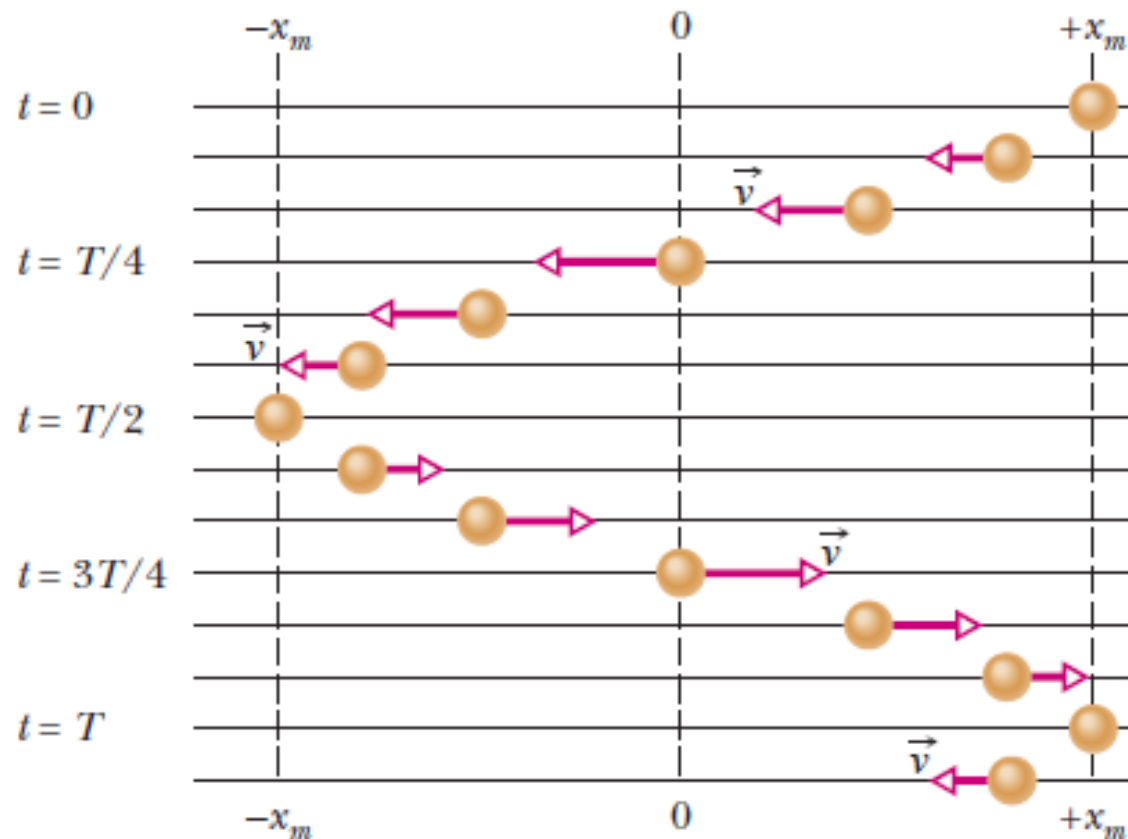
Ένα σώμα ταλαντώνεται
δεξιά κι αριστερά ακολου-
θώντας απλή αρμονική
ταλάντωση.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

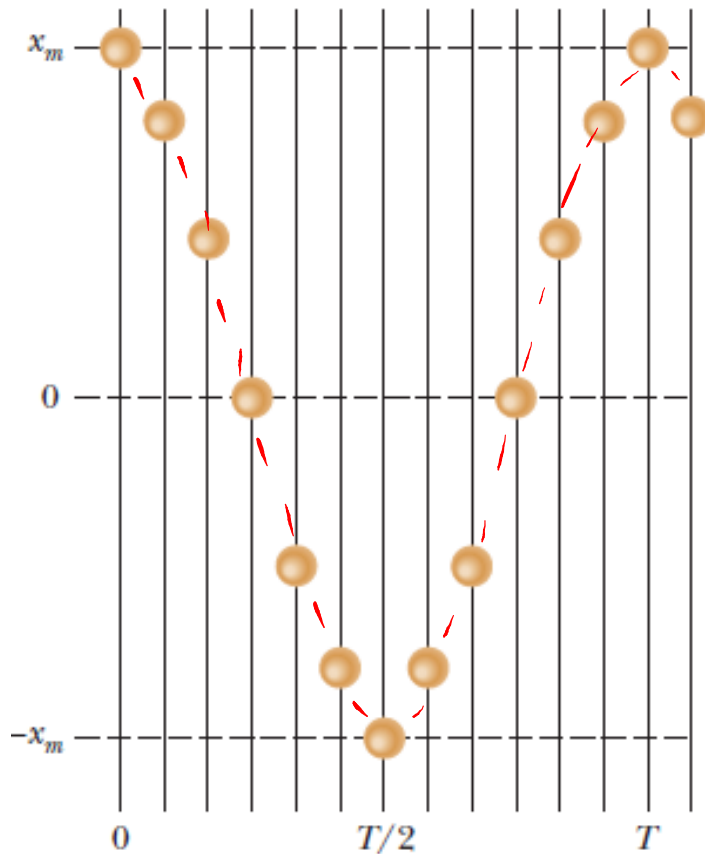
Η ταχύτητά του είναι μηδενική στις ακραίες θέσεις της κίνησης.

Η ταχύτητα είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας $x=0$

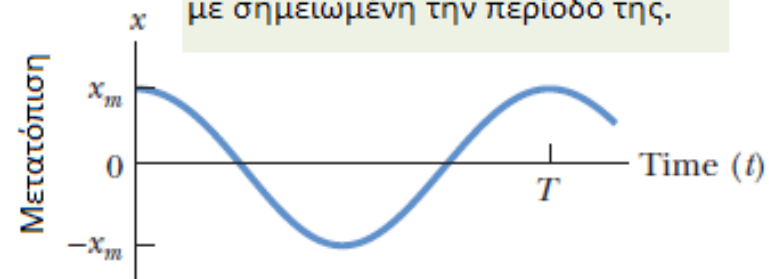


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

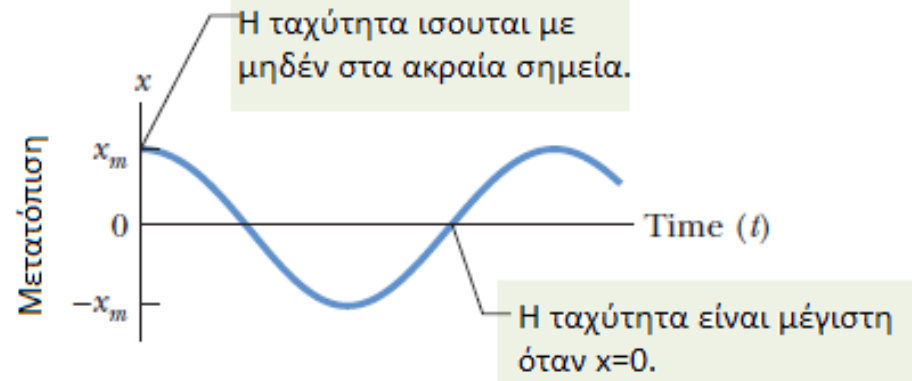
Αν "στρέψουμε" την κίνηση κατακόρυφα, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα συνημίτονο!



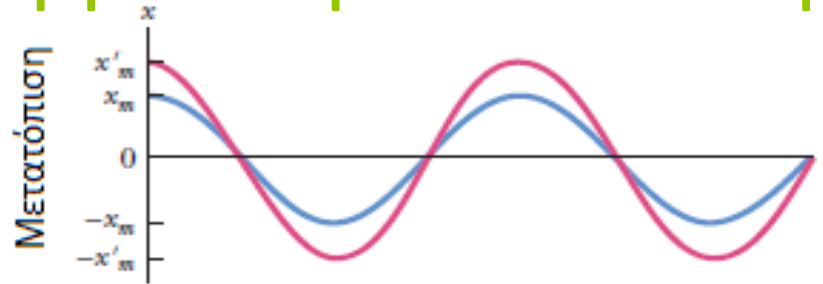
Η γραφική παράσταση της κίνησης, με σημειωμένη την περίοδο της.



Η ταχύτητα ισουται με μηδέν στα ακραία σημεία.

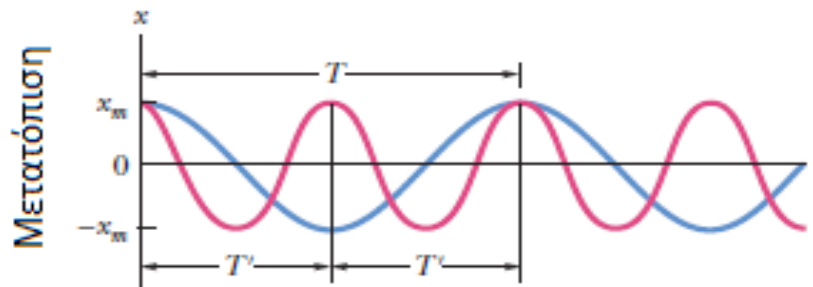


Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)



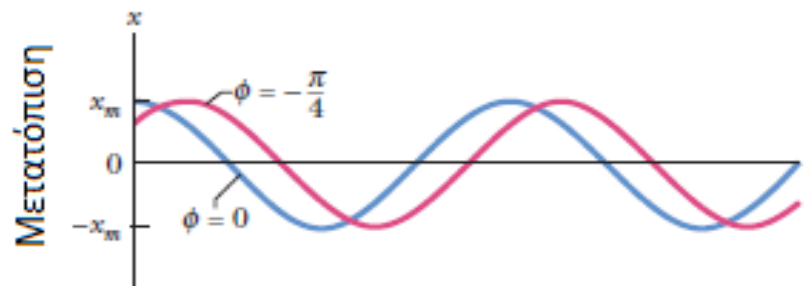
(a)

Διαφορετικό
πλάτος A



(b)

Διαφορετική
συχνότητα
 ω (και f)



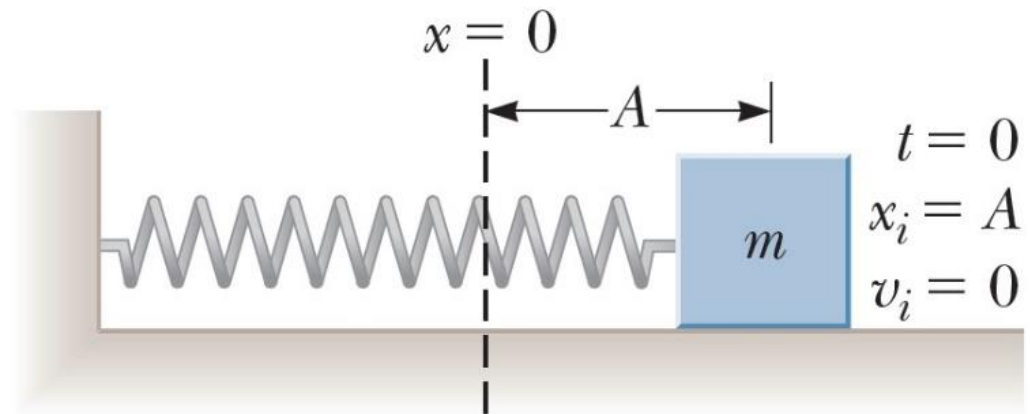
(c)

Διαφορετική
φάση ϕ

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παράδειγμα:

- ο Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
 - ο Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
 - ο Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
 - ο Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
 - ο Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παράδειγμα – Λύση:

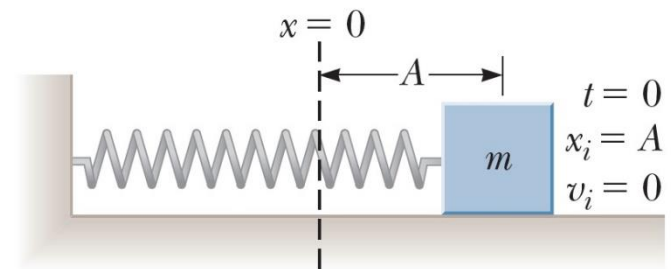
- ο Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

- ο Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
- ο Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
- ο Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

$$\text{Α)} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.2}{5}} = \frac{2\pi}{5} \text{ sec} \approx 1.26 \text{ s}$$

$$\text{Β)} \quad v_{\max} = \omega A = 5 \cdot 0.05 = 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Γ)} \quad a_{\max} = \omega^2 A = 5^2 \cdot 0.05 = 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

- Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

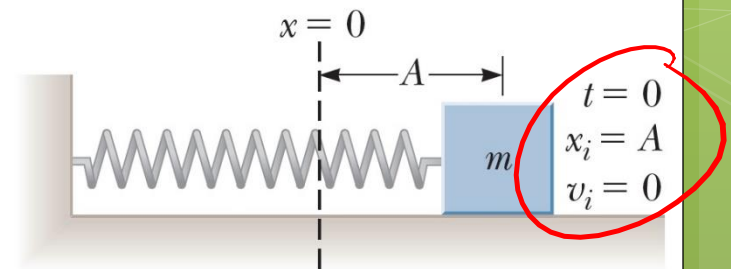
Είναι $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Για $t = 0$, $x(0) = A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = A \cos \varphi$

Ξέρω ότι $x_i = A = x(0) \Leftrightarrow A \cos \varphi = A \Rightarrow \varphi = 0$.

Οότε $x(t) = 0.05 \cos(5t)$.

Ξέρω $v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = -0.25 \sin(5t)$.

— $a(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -1.25 \cos(5t)$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παράδειγμα – Λύση:

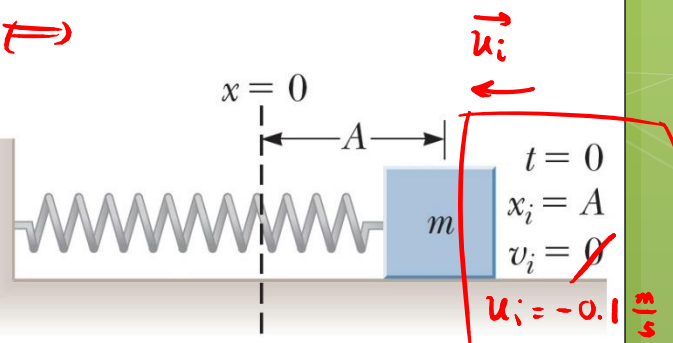
- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$

- Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

Το (Α) ερώτημα δεν αλλάζει ($\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $T \approx 1.26 \text{ s}$)

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } x(0) &= A \cos(5 \cdot 0 + \varphi) = A \cos(\varphi) = x_i \quad (1) \\ u(0) &= -\omega A \sin(5 \cdot 0 + \varphi) = -\omega A \sin(\varphi) = -0.1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x(0) &= A \cos(\varphi) = x_i \\ u(0) &= -\omega A \sin(\varphi) = -0.1 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} &(\because) \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{-\cancel{\omega A} \sin \varphi}{\cancel{A} \cos \varphi} &= \frac{-0.1}{x_i} \Leftrightarrow -\omega \tan \varphi = \frac{-0.1}{x_i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tan \varphi &= \frac{0.1}{x_i \cdot \omega} = 0.4 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(0.4) \approx 0.12 \pi \end{aligned}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$

- Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

$$\Xi \text{ έρω ότι } u_{\max} = \omega A$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow A = \frac{x_i}{\cos(\varphi)} = \frac{0.05}{\cos(0.12\pi)} \approx 0.054 \text{ m} \quad \left. \vphantom{\frac{0.05}{\cos(0.12\pi)}} \right\} \Rightarrow u_{\max} = 5 \cdot 0.054 \approx 0.27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

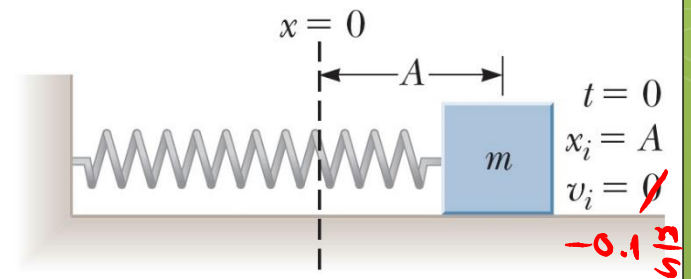
$$\text{Αντίστοιχα, } a_{\max} = \omega^2 A = 5^2 \cdot 0.054 \approx 1.35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Οι εξισώσεις κίνησης:

$$x(t) = 0.054 \cos(5t + 0.12\pi)$$

$$u(t) = -0.27 \sin(5t + 0.12\pi)$$

$$a(t) = -1.35 \cos(5t + 0.12\pi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**

- **Κινητική Ενέργεια:**

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

- **Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:**

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

- Παρατηρήστε ότι είναι πάντα θετικές!

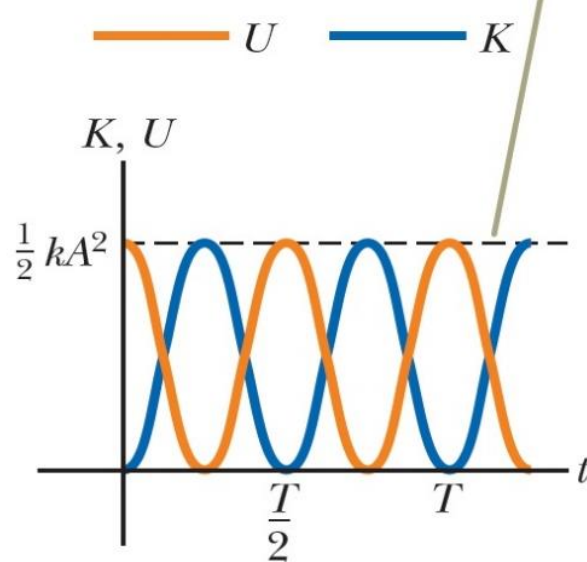
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

Μηχανική Ενέργεια $K + U$

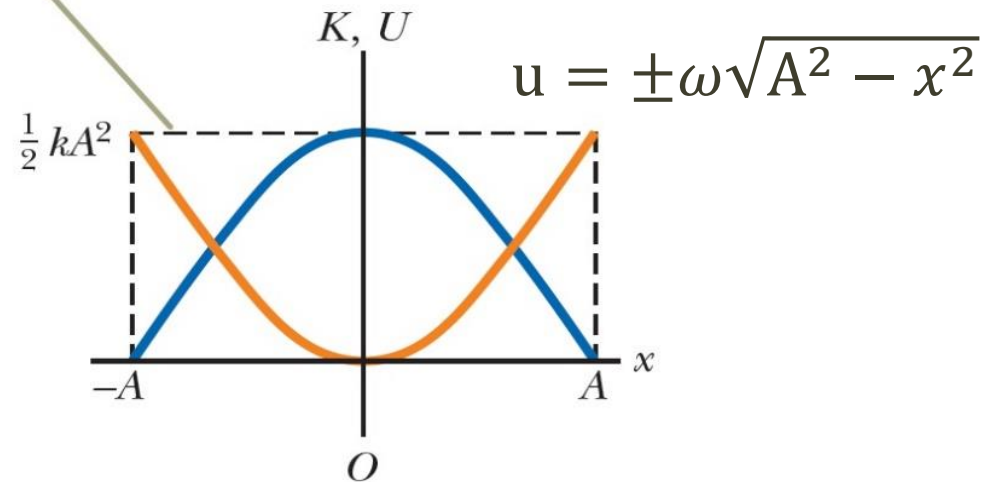
Το άθροισμα $K + U$ είναι
σταθερό και στα δυο
γραφήματα

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



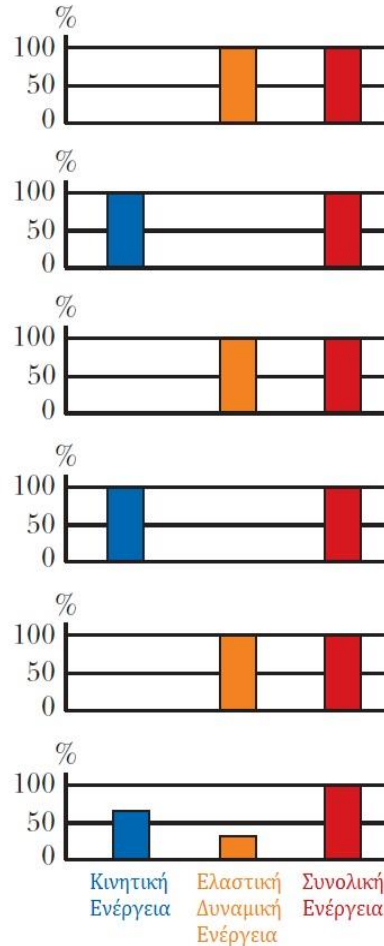
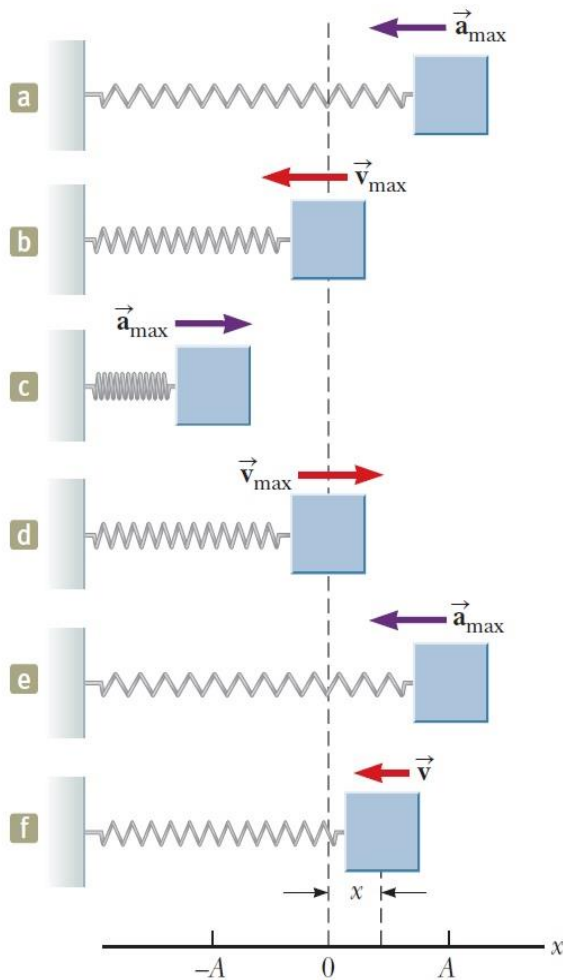
a

— $U = \frac{1}{2}kx^2$ — $K = \frac{1}{2}mv^2$



b

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

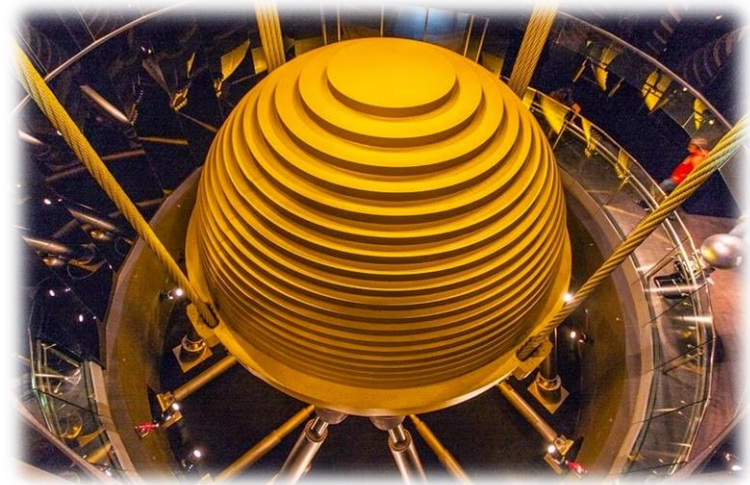


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

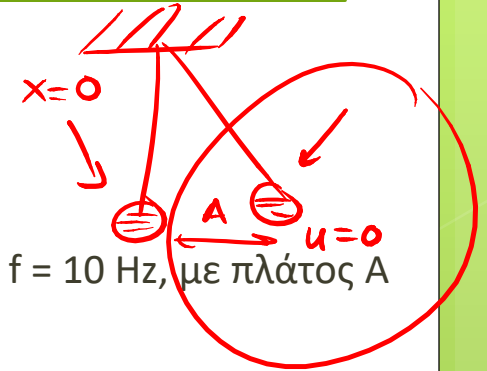
- ◉ Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, οι οποίοι είναι συσκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η συσκευή έχει μάζα $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$ και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10.0 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
 - ◉ A) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
 - ◉ B) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Συσκευή μάζας $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
- Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
- Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



$$A) E_{\text{μηχ}} = K + U_{\text{ελ.}} = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \left. \vphantom{E_{\text{μηχ}}} \right\} \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = 0 + \frac{1}{2} k A^2 \quad ①$$

Όταν $x = A$, τότε $u_{x=A} = 0$

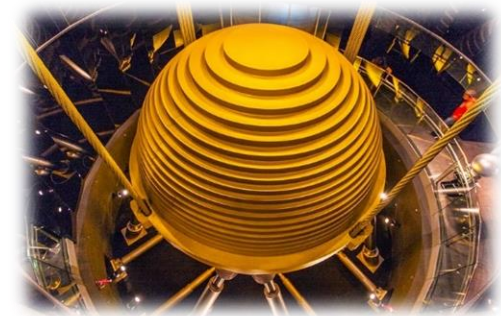
$$\equiv \text{εράυε ότι } f = 10 \text{ Hz}, \text{ άρα } \omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow (2\pi f)^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow k = m(2\pi f)^2 \quad ②$$
$$= 1.07 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\text{Άρα } ① \stackrel{②}{\Rightarrow} E_{\text{μηχ}} = 2.15 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$B) \text{ Όταν } x = 0, \text{ τότε } u = u_{\text{max}} \text{ και } U_{\text{ελ.}} = 0$$

$$\text{Άρα } E_{\text{μηχ}} = K = \frac{1}{2} m u^2 = 2.15 \cdot 10^7 \Rightarrow$$

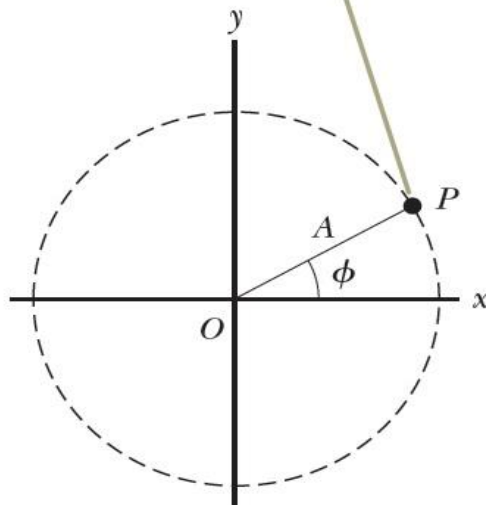
$$\Rightarrow u \approx 12.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

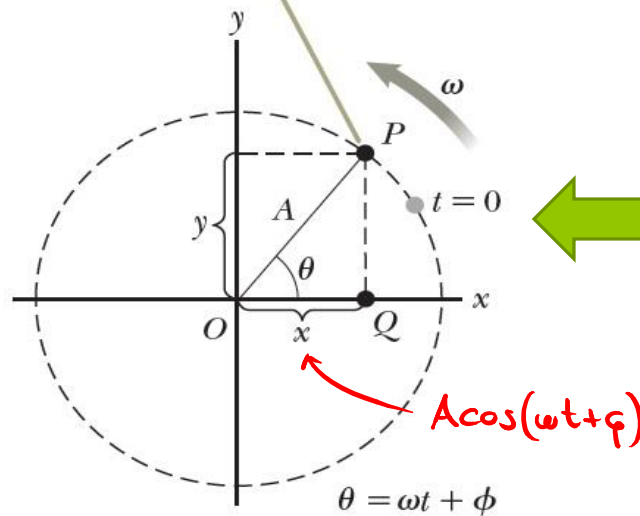
● Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

Ένα σώμα βρίσκεται στο σημείο P όταν $t=0$.



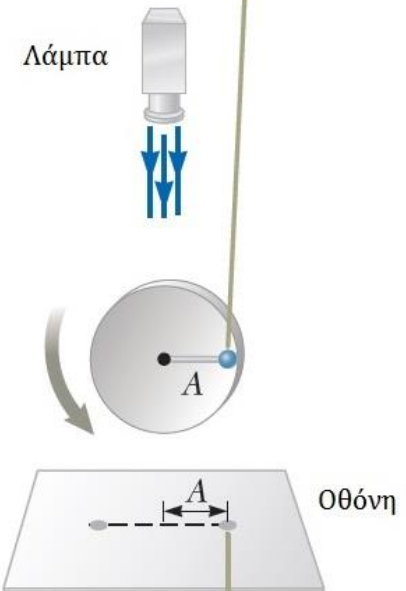
a

Λίγο αργότερα, τη χρονική στιγμή t , οι x -συνιστώσες των σημείων P και Q είναι ίσες.



b

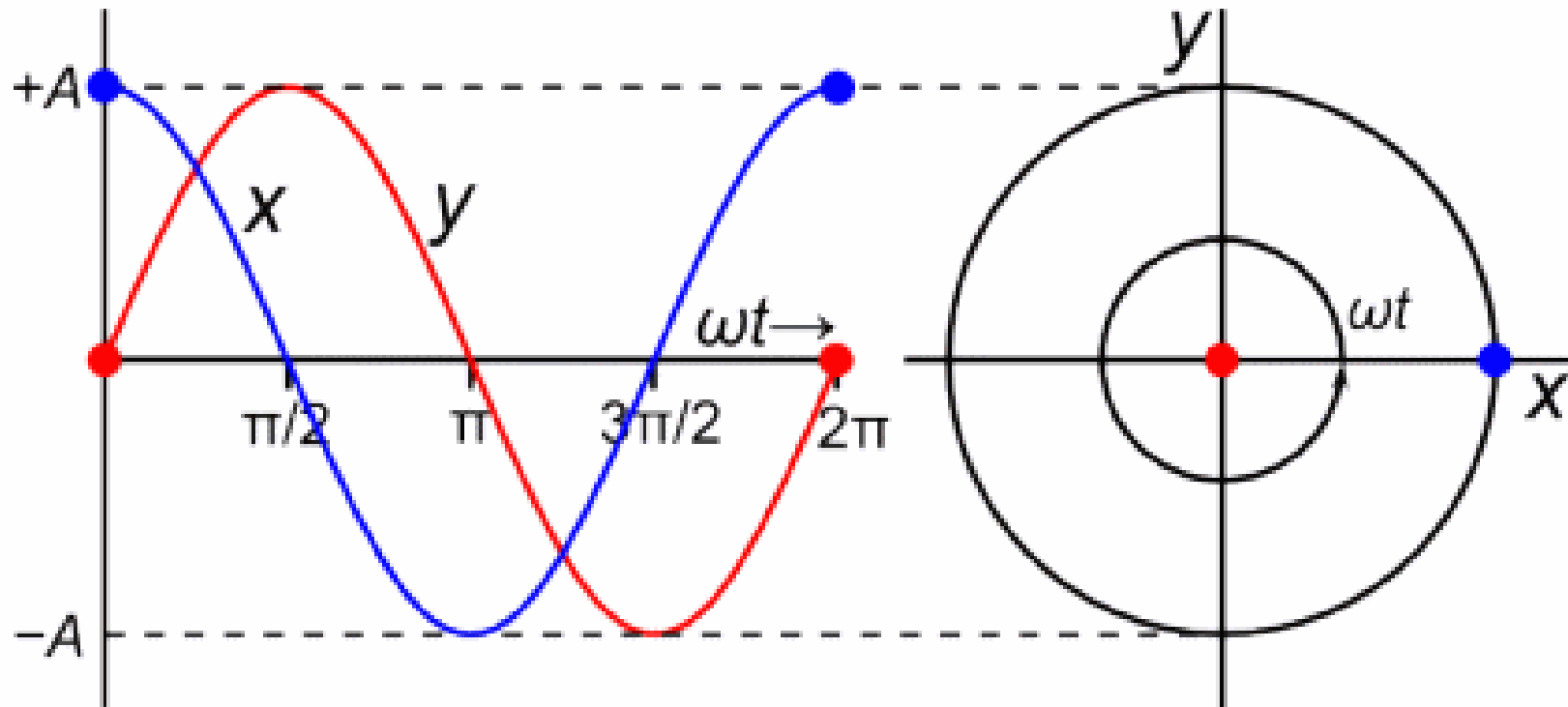
Η μπίλια γυρίζει και συμπεριφέρεται ως σωματίδιο σε ομοιόμορφη κυκλική κίνηση.



Η σκιά της μπάλας κινείται όπως ένα σωματίδιο σε απλή αρμονική κίνηση.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Όταν η γωνία θ είναι $< 10^\circ$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

$$F_{\varepsilon\pi} = ma \leftrightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Επειδή $s = L\theta$,

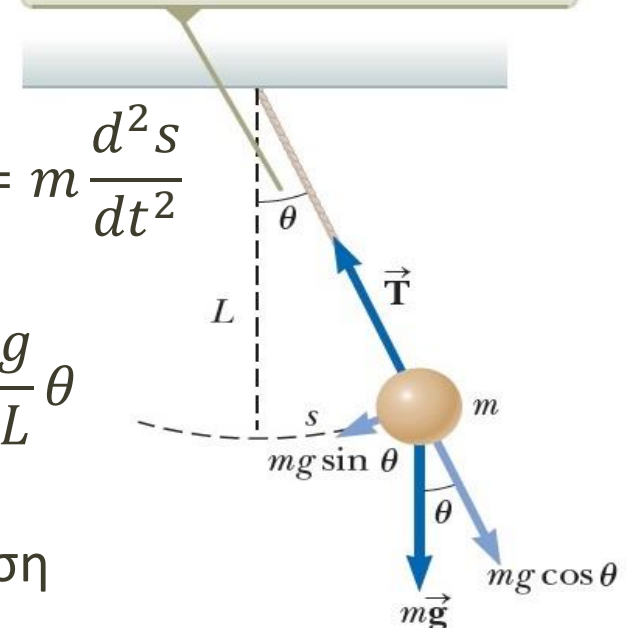
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \approx -\frac{g}{L} \theta$$

όταν θ μικρό.

- Εδώ χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση
 $\sin(\theta) \approx \theta$

για μικρές τιμές του θ (σε rad)

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
- Θυμηθείτε για το ελατήριο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!!
😊
- Άρα το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για μικρό θ !

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

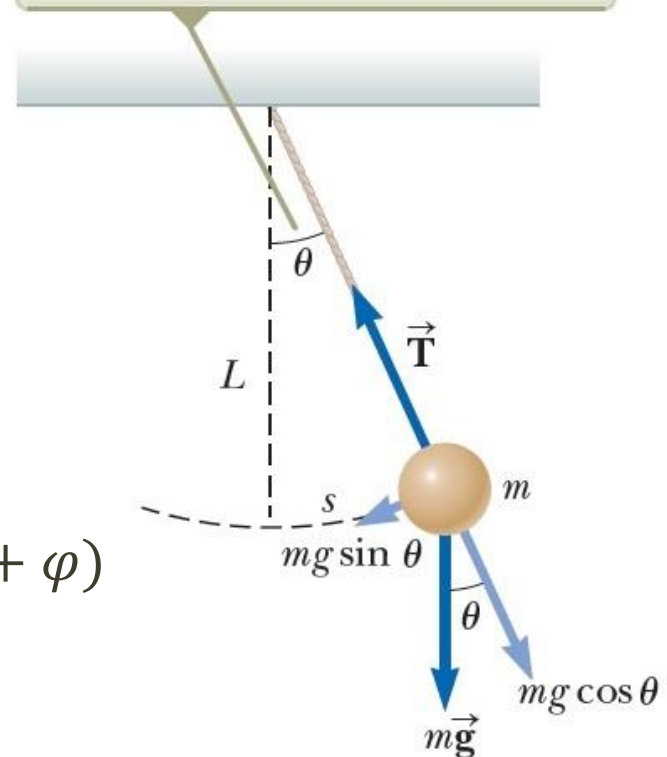
- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

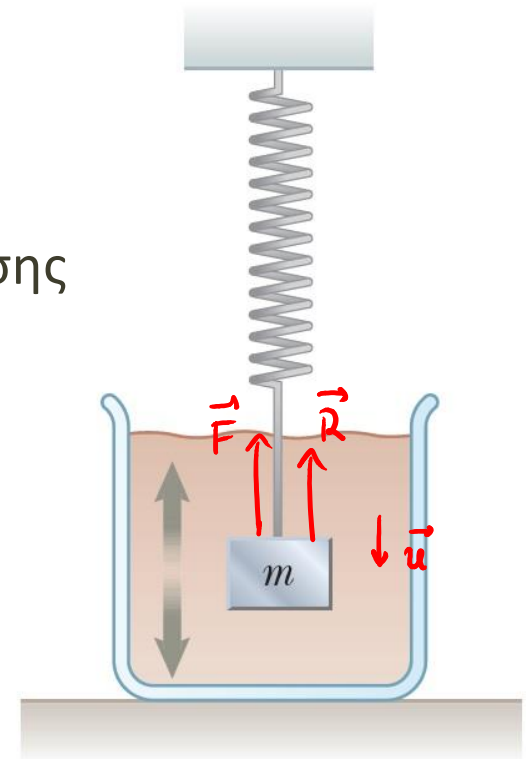
- Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι φθίνουσα ταλάντωση

- Πιο κοντά στην πραγματικότητα:
 - τριβές, αντίσταση αέρα

- $\vec{R} = -b\vec{v} = -b \frac{d\vec{x}}{dt}$: δύναμη επιβράδυνσης

- Συντελεστής απόσβεσης b
- Δρα αντίθετα στην ταχύτητα του σώματος

- $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

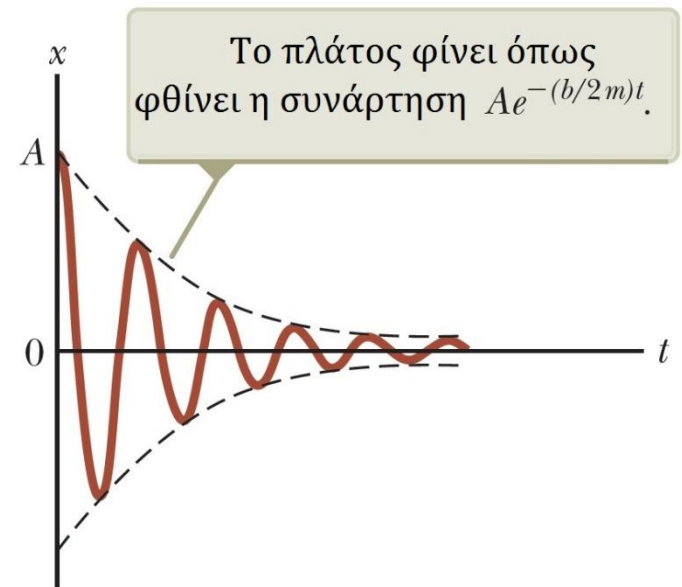
- Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (b μικρό):

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

- Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης

- Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται

φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

του συστήματος

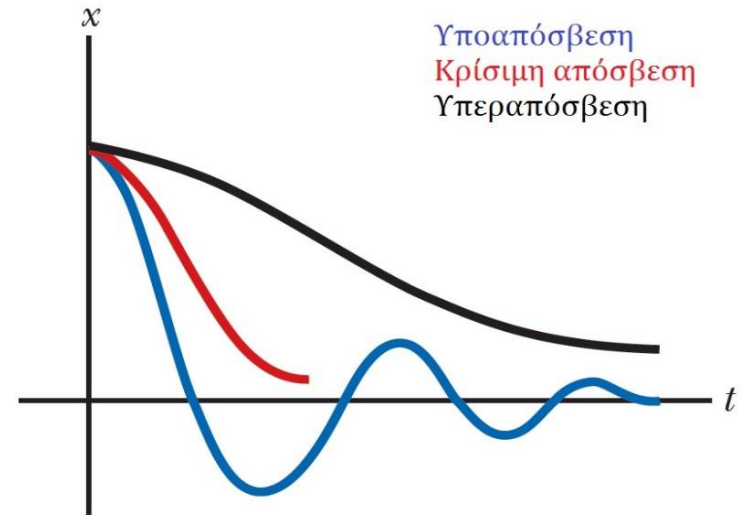
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

- Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση

- Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t)$ δεν ισχύει.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- ◉ Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης λόγω της δύναμης αντίστασης
 - ◉ Ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη στο σύστημα
 - ◉ Π.χ. παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει την ταλάντωσή του
 - ◉ Π.χ. στον έμφωνο στάσιμο λόγο
 - ◉ Π.χ. σε ηλεκτρικά κυκλώματα

- ◉ Εξωτερική δύναμη διέγερσης $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$

- ◉ Τότε

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- $\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- Λύση (σταθερή κατάσταση):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

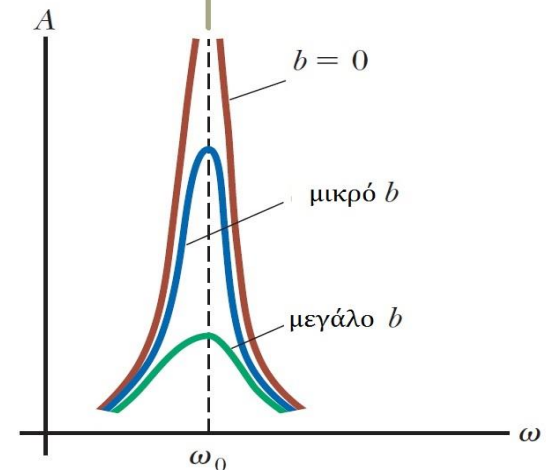
- με

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

- Συντονισμός:** Όταν $\omega \approx \omega_0$ το A γίνεται πολύ μεγάλο

- ω_0 : συχνότητα συντονισμού

Όταν η συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης διέγερσης ισούται με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή, παρατηρείται συντονισμός.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Μηχανική:

AP Photos



a



b

© Topham/The Image Works

- ο Ο κυματισμός του ανέμου στο οδόστρωμα δημιούργησε περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού της γέφυρας. Το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξήθηκε πολύ με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

- https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

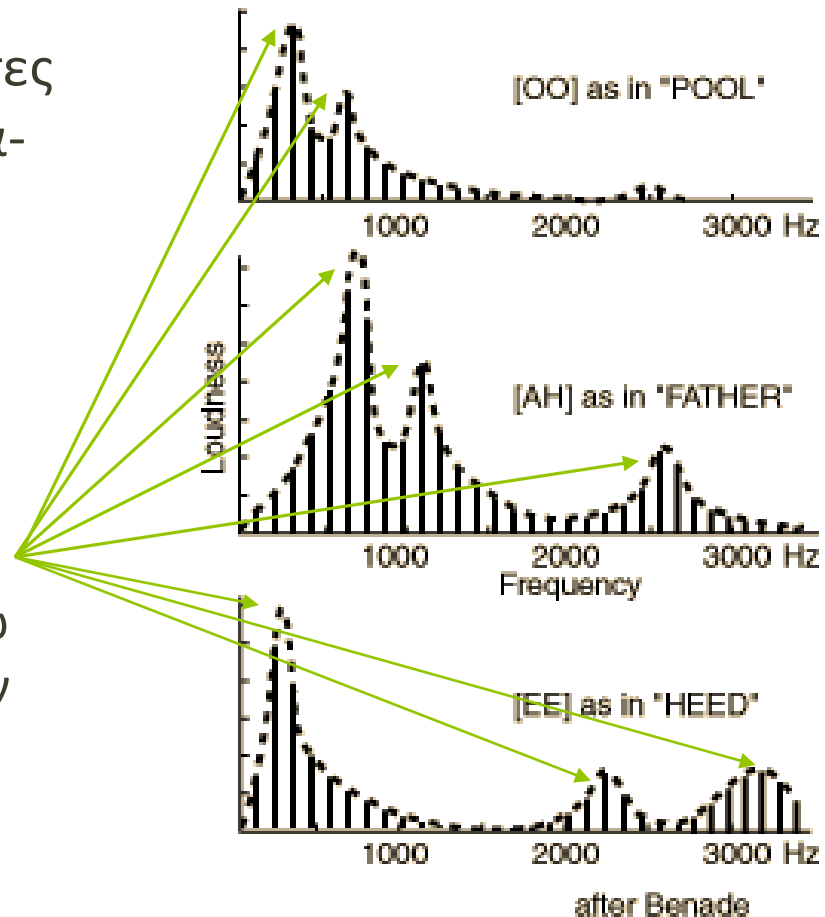
● Παραδείγματα – Ανάλυση Φωνής:

- Διαφορετικές συχνότητες συντονισμού για τα διαφορετικά φωνήματα

- /o/, /α/, /ε/

- Φωνοσυντονισμός (formant)

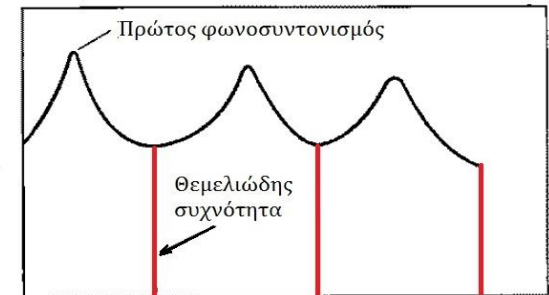
- Περιοχές όπου οι γύρω συχνότητες λαμβάνουν υψηλά πλάτη



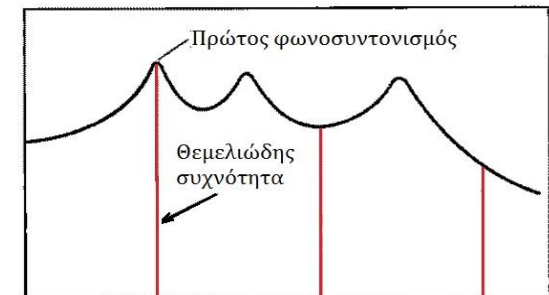
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα - Ακουστική:

- ο Οι σοπράνο προσπαθούν να «φτιάξουν» τη φωνητική οδό τους έτσι ώστε η συχνότητα φωνοσυντονισμού να συμπίπτει με τη θεμελιώδη συχνότητα της φωνής τους, όταν θέλουν να παράξουν δυνατή φωνή (Σχήμα)
- ο Επίσης, με διαφορετική διαμόρφωση της φωνητικής οδού μπορούν να «φτιάξουν» ένα φωνοσυντονισμό στην περιοχή συχνοτήτων 2500-3000 Hz, όπου τα μουσικά όργανα συνήθως δεν έχουν ενέργεια, ώστε να ακούγονται περισσότερο αυτοί παρά τα μουσικά όργανα



Συχνότητα



Συχνότητα



Εικόνα: Ναυαγοςώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα



Εικόνα: Ναυαγосώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα

Κύματα

- Ο κόσμος είναι γεμάτος από κύματα!
 - Μηχανικά & Ηλεκτρομαγνητικά
- Στα μηχανικά κύματα, απαιτείται ένα **μέσο διάδοσης**
- Θα μελετήσουμε πρώτα τα μηχανικά κύματα
 - Αργότερα τα ηλεκτρομαγνητικά
- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μηχανικών κυμάτων
 - Έστω μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια λίμνη
 - Αν ρίξουμε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί
 - **Κυματική κίνηση: μεταφέρεται ενέργεια αλλά όχι ύλη!**

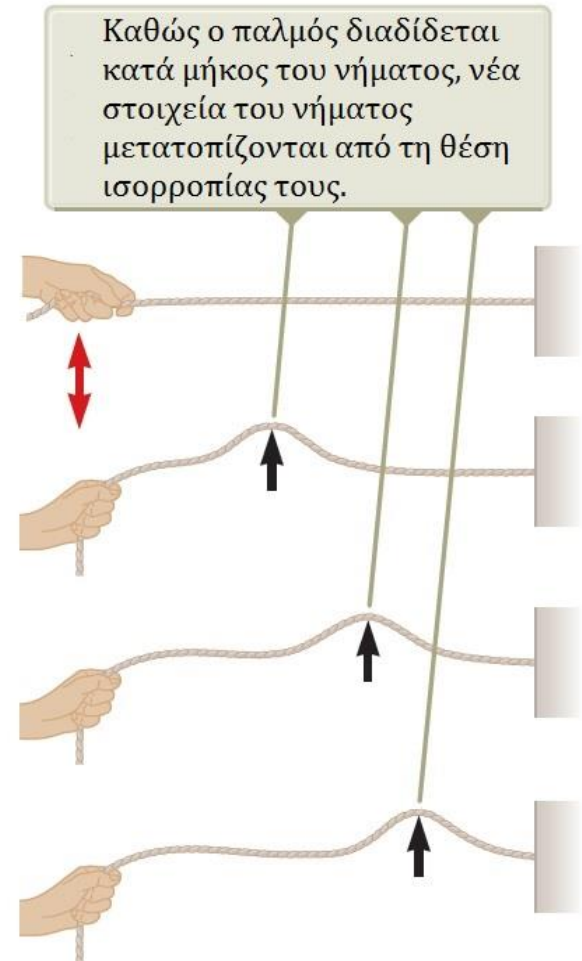
Κύματα

- Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν

- Α) Κάποια πηγή διαταραχής
- Β) Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν
- Γ) Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους

- Κίνηση κύματος

- Παλμός = διαταραχή
- Σχήμα σχεδόν απaráλλαχτο
- Ύψος και ταχύτητα παλμού



Κύματα

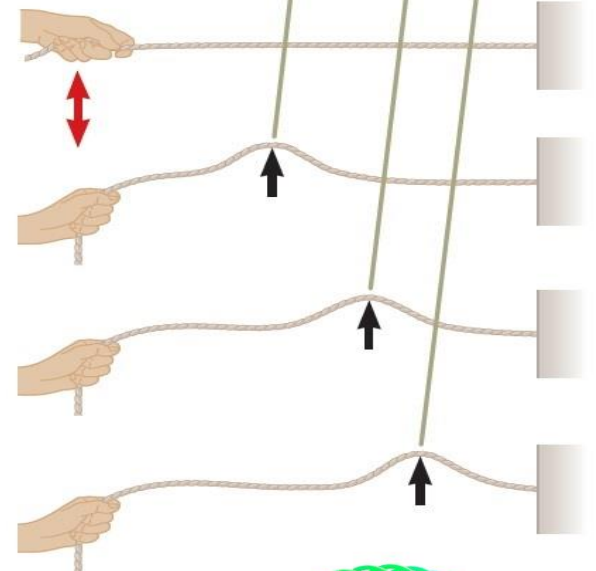
- Προσέξτε την κίνηση των στοιχείων του νήματος
 - Είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης
 - **Εγκάρσιο κύμα**
- Προσέξτε την αντίστοιχη του ελατηρίου
 - Είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης
 - **Διάμηκες κύμα**

Το χέρι κινείται γρήγορα μπρος-πίσω μια φορά και δημιουργεί έναν διαμήκη παλμό.

Κατά τη διάδοση του παλμού, οι σπείρες μετατοπίζονται παράλληλα προς τη διεύθυνση διάδοσης.



Καθώς ο παλμός διαδίδεται κατά μήκος του νήματος, νέα στοιχεία του νήματος μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας τους.

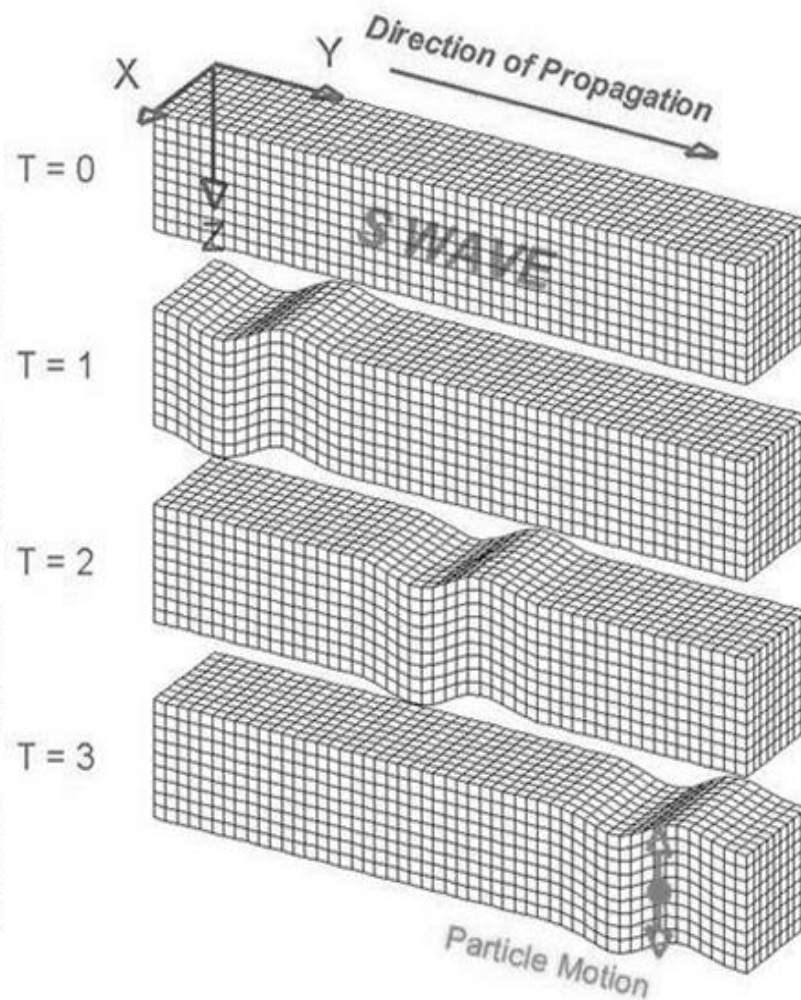
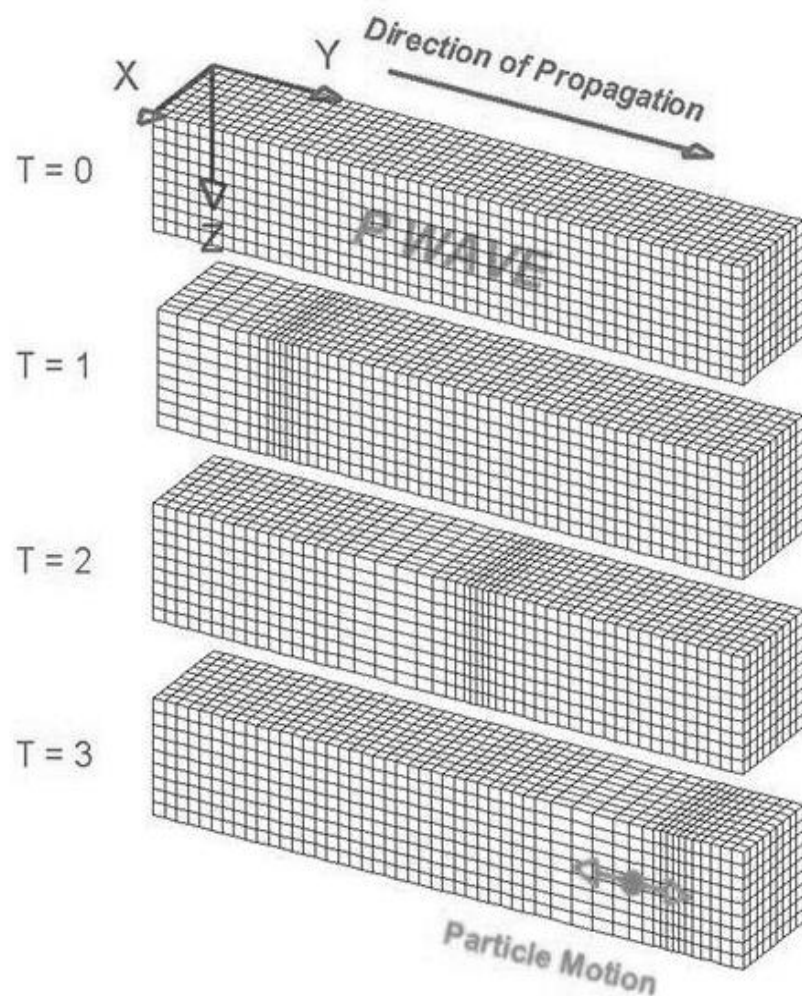


Κύματα



Κύματα

Σεισμικά Κύματα



Κύματα

- Οδεύοντα (ημιτονοειδή) κύματα
- Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος $y(x, t)$
- Συνάρτηση του ύψους (τεταγμένη) y του στοιχείου ενός κύματος ως προς τη θέση του x για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t
 - $y(x, t) = f(x - ut, t)$  κίνηση προς τα δεξιά
 - $y(x, t) = f(x + ut, t)$  κίνηση προς τα αριστερά
 - όπου u η ταχύτητα του παλμού
 - Για $t = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε μια «φωτογραφία» του όλου κύματος για μια χρονική στιγμή
 - Για $x = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε την κίνηση ενός στοιχείου του κύματος με την πάροδο του χρόνου

Κύματα

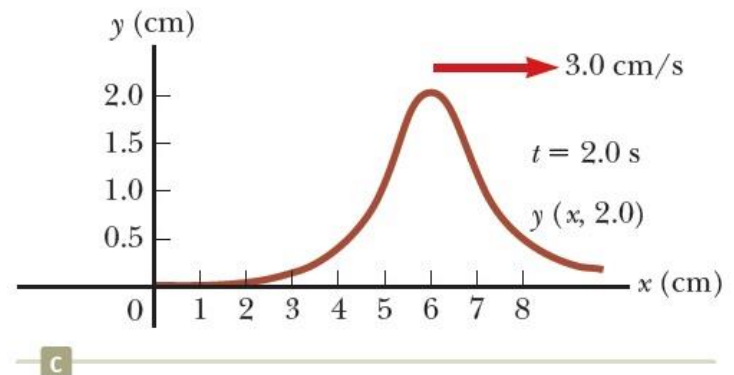
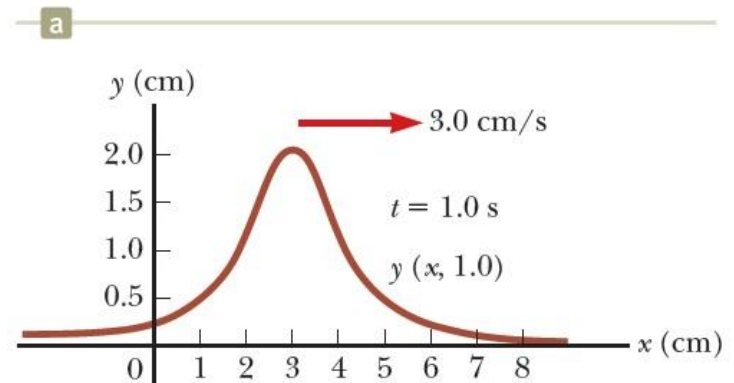
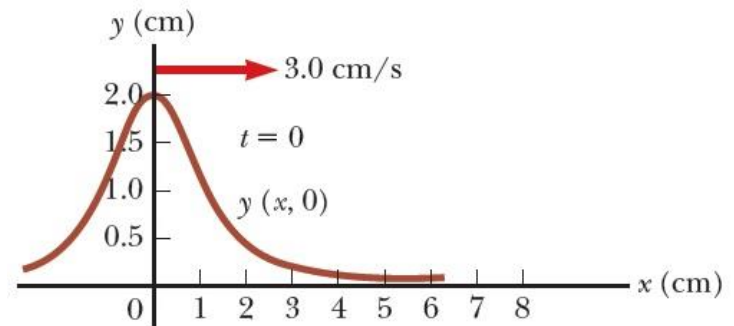
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Έστω ένα παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x και περιγράφεται ως

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

όπου x, y σε εκατοστά και το t σε δευτερόλεπτα.

- ◉ Παλμοί για $t = 0, 1, 2$



Κύματα

- Μήκος κύματος λ

- Περίοδος T

- Συχνότητα f

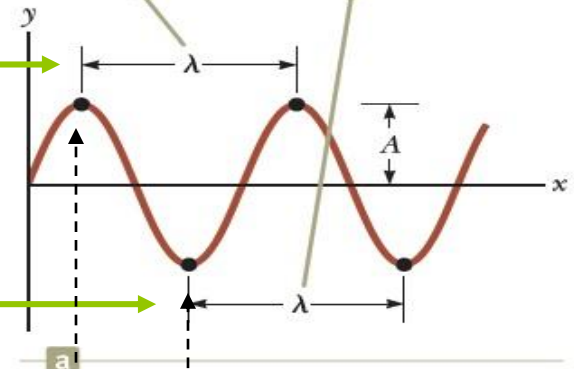
- Αριθμός κορυφών ανά μονάδα χρόνου

- $f = 1/T$

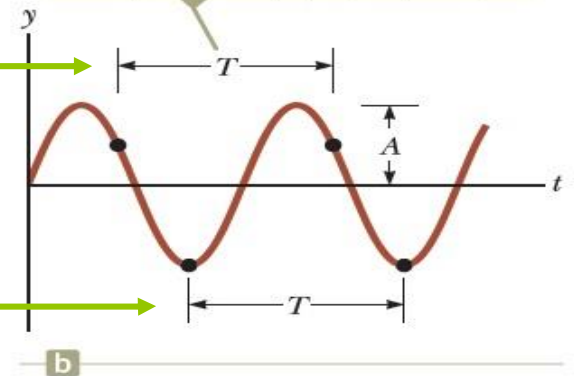
- Μετρίεται σε Hertz (Hz)

- Κορυφές-κοιλάδες

Το μήκος κύματος λ ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων.



Η περίοδος T ενός κύματος είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το στοιχείο για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση ή το κύμα για να διατρέξει ένα μήκος κύματος.



Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x \pm ut) + \varphi \right)$$

- Ταχύτητα διάδοσης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- Κυματαριθμός

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Κυκλική συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

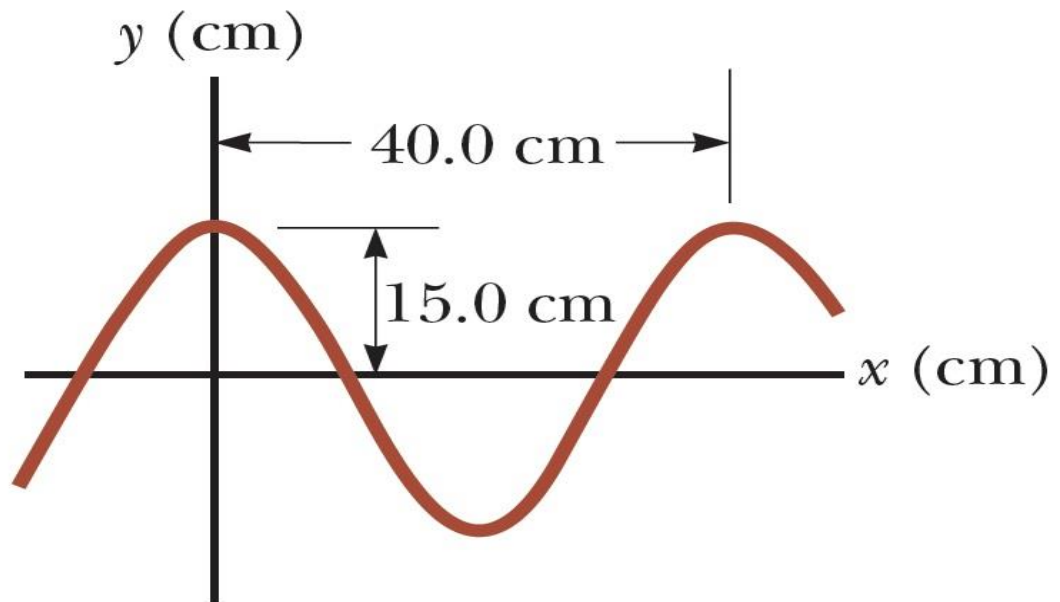
- Οπότε

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t=0$ φαίνεται στο σχήμα.
- ◉ A) Βρείτε τα k , T , ω , u .
- ◉ B) Βρείτε τη σταθερά φάσης ϕ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.



Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t=0$ φαίνεται στο σχήμα.

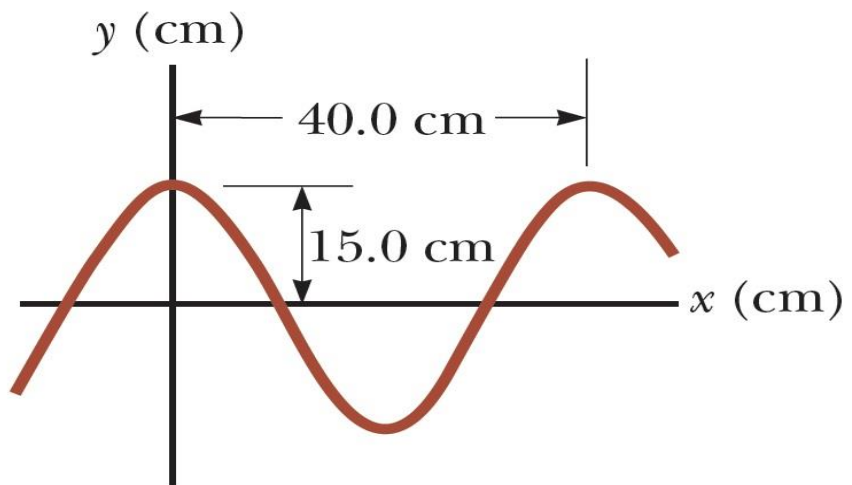
- ◉ Α) Βρείτε τα k , T , ω , u .

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ rad/m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \text{ rad/s}$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.4}{0.125} = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κύματα

Παράδειγμα:

- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t=0$ φαίνεται στο σχήμα.
- B) Βρείτε τη σταθερά φάσης ϕ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.

Είναι $y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$
 $= 0.15 \sin(5\pi x \pm 16\pi t + \phi) = 0.15 \sin(5\pi x - 16\pi t + \phi)$

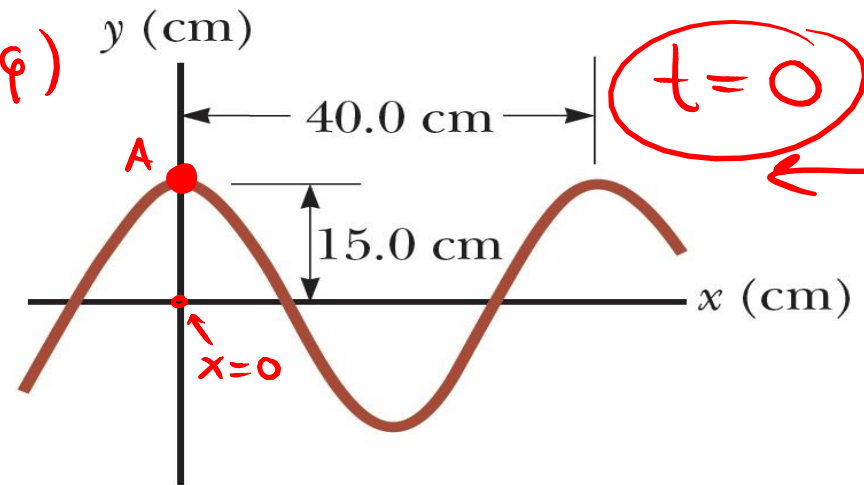
Για $t=0$, $y(x,0) = 0.15 \sin(5\pi x + \phi)$

Για $x=0$, $y(0,0) = 0.15 \sin(0 + \phi)$
 $= 0.15 \sin(\phi)$
 $= 0.15$

Άρα $\sin(\phi) = 1 \Rightarrow \phi = +\frac{\pi}{2} *$

* Για $\phi = \frac{\pi}{2}$, θα έχουμε:

$$y(x,t) = 0.15 \sin(5\pi x - 16\pi t + \frac{\pi}{2})$$
$$= 0.15 \cos(5\pi x - 16\pi t)$$



Κύματα

● Αρμονικά κύματα

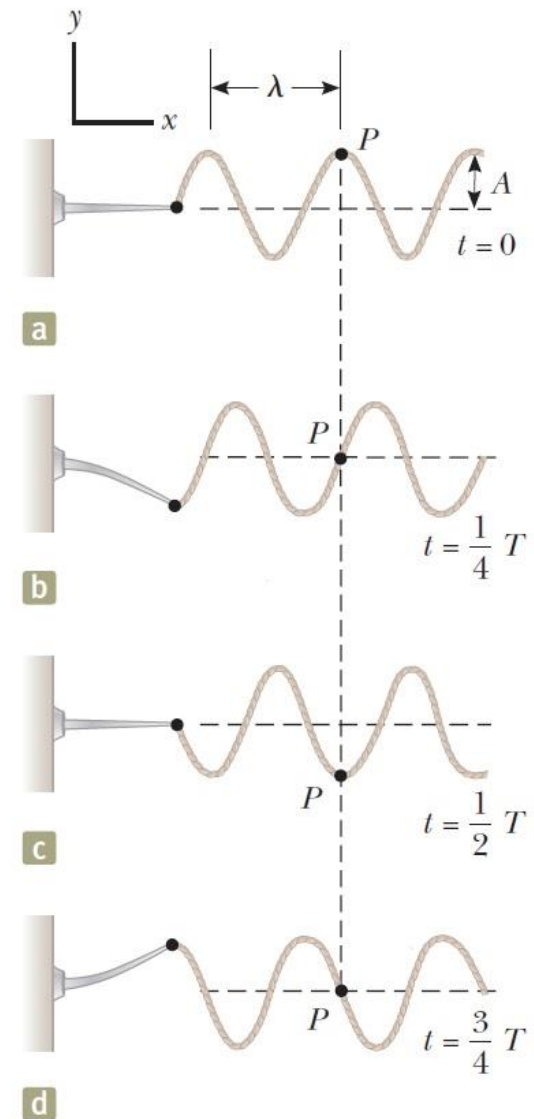
- Κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα του σχήματος

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

- Άρα περιγράφει και την κίνηση κάθε σημείου του όπως το P
- Εγκάρσια ταχύτητα και επιτάχυνση του στοιχείου P

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$



Κύματα

- Ταχύτητα Διάδοσης v κύματος σε τεντωμένο νήμα

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

όπου T η τάση του νήματος, και μ η μάζα του νήματος ανά μονάδα μήκους

- Μάζα ανά μονάδα μήκους

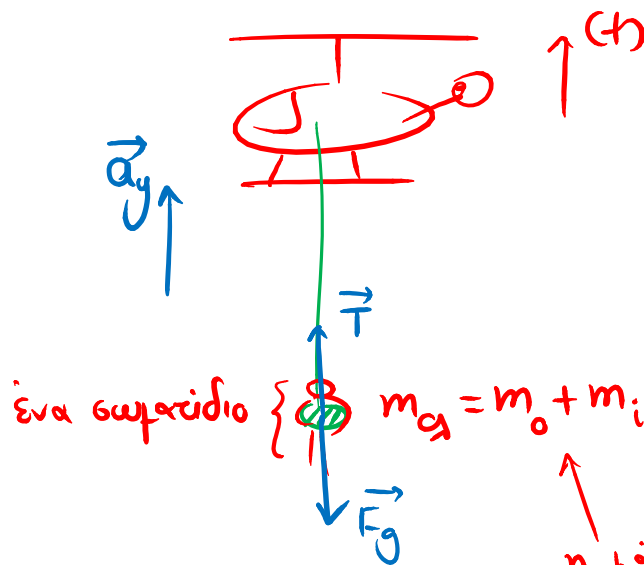
$$\mu = \frac{m}{l}$$

- Λέγεται και γραμμική πυκνότητα

Κύματα

Παράδειγμα:

- Ένας ορειβάτης μάζας 80 kg παγιδεύεται σε ένα βουνό. Ελικόπτερο διάσωσης έρχεται να τον σώσει, χαμηλώνοντας **συρματόσκοινο μήκους 15 m και μάζας 8 kg** προς το μέρος του. Ο **ιμάντας στο άκρο του έχει μάζα 70 kg** . Φοβισμένος ο ορειβάτης από το σκηνικό, κάνει σήμα στον πιλότο στέλνοντας **εγκάρσιους παλμούς μέσω του συρματόσκοινου**. Κάθε παλμός θέλει 0.25 s για να διατρέξει όλο το συρματόσκοινο. Ποια είναι η επιτάχυνση του ελικοπτερου;



ένα σωματίδιο $\left\{ \begin{array}{l} m_{\alpha} = m_o + m_i \end{array} \right.$

η μάζα του
συρματόσκοινου δε
χατράνεται υπ' όψη



Κύματα

$$\text{Η } \textcircled{1} \xrightarrow{\textcircled{2}} a_y = 3 \text{ m/s}^2$$

● Παράδειγμα:

- ορειβάτης μάζας 80 kg, συρματόσκοινο μήκους 15 m και μάζας 8 kg, ιμάντας στο άκρο του έχει μάζα 70 kg, εγκάρσιοι παλμοί μέσω του συρματόσκοινου, κάθε παλμός θέλει 0.25 s για να διατρέξει όλο το συρματόσκοινο.

Ποια είναι η επιτάχυνση του ελικοπτέρου;



Ισχύει ότι

$$\Sigma \vec{F}_y = m_a \cdot \vec{a}_y \Leftrightarrow \vec{F}_g + \vec{T} = m_a \vec{a}_y$$

Άρα

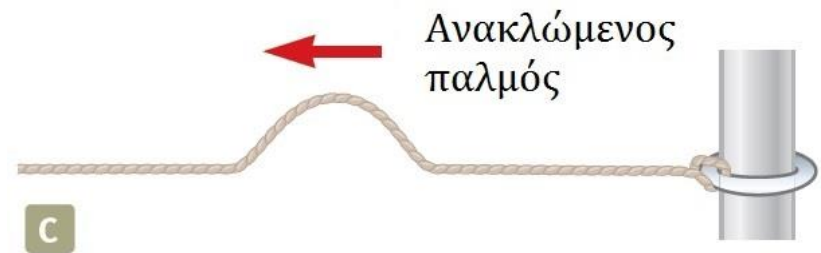
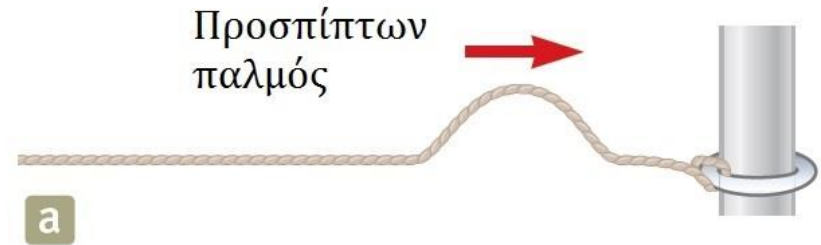
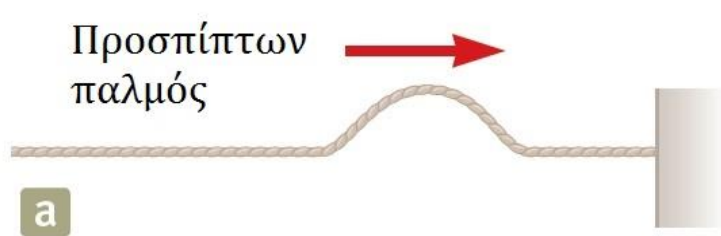
$$T - F_g = m_a \cdot a_y \Leftrightarrow T - m_a \cdot g = m_a a_y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_y = \frac{T - m_a g}{m_a} \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{Ξέρουμε ότι } u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu \cdot u^2 = \frac{m_{\text{σχ}}}{l_{\text{σχ}}} u^2 \left. \vphantom{\frac{m_{\text{σχ}}}{l_{\text{σχ}}} u^2} \right\} \Rightarrow T = \frac{8}{15} \left(\frac{15}{0.25} \right)^2 \textcircled{2} \\ u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15}{0.25} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Κύματα

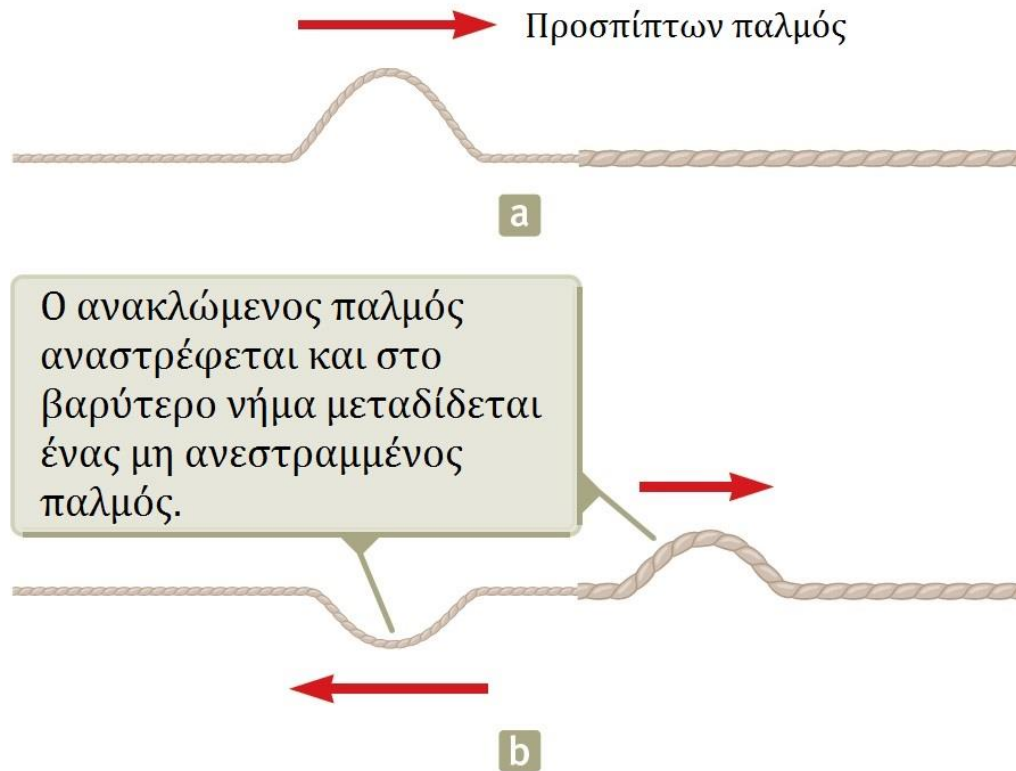
○ Ανάκλαση και διέλευση παλμών



○ 3^{ος} νόμος του Newton (δράση-αντίδραση)

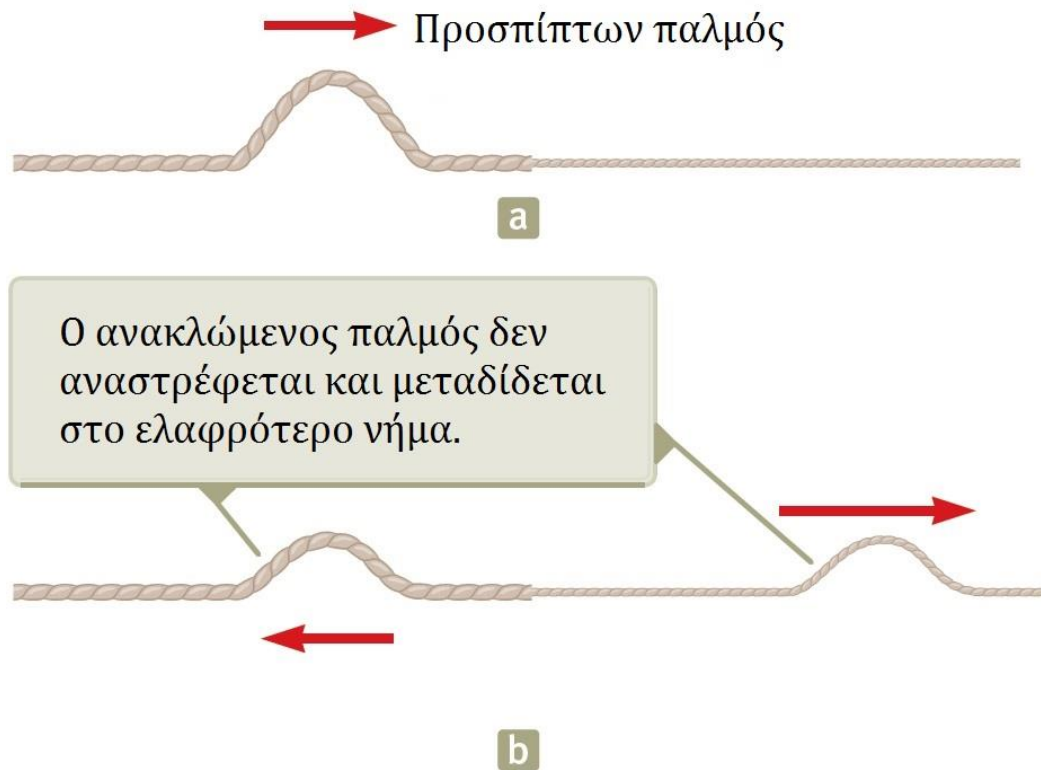
Κύματα

○ Ανάκλαση και διέλευση παλμών



Κύματα

○ Ανάκλαση και διέλευση παλμών



Κύματα

- Ανάκλαση και διέλευση παλμών

- Κανόνες:

- Όταν η διάδοση είναι από το μέσο A στο μέσο B, με B πιο πυκνό απ'το A, τότε συμβαίνει αναστροφή κατά την ανάκλαση.

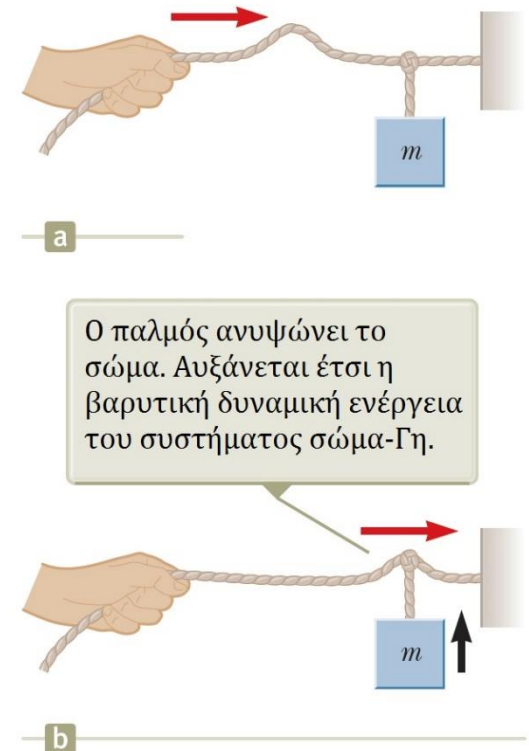
- Όταν η διάδοση είναι από το μέσο A στο μέσο B, με A πιο πυκνό απ'το B, τότε δεν συμβαίνει αναστροφή κατά την ανάκλαση.

- Α πυκνότερο B $\longleftrightarrow v_a < v_b$

Κύματα

● Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Είπαμε ότι στα μηχανικά κύματα μεταφέρεται ενέργεια
- Που πηγαίνει αυτή η ενέργεια;
- Παράδειγμα:
 - Έστω το νήμα ως μη απομονωμένο σύστημα
 - Ενέργεια λόγω έργου (χέρι)
 - Εξωτερική στο σύστημα
 - Διάδοση κατά μήκος του νήματος
 - Ανύψωση σώματος
 - Μεταβολή δυναμικής ενέργειας συστήματος Γη-σώμα

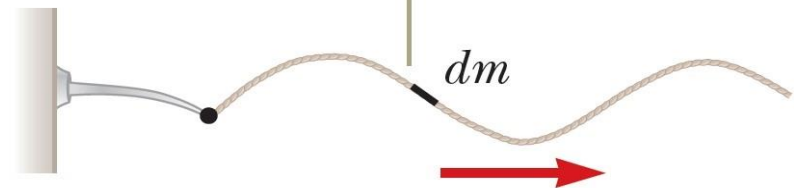


Κύματα

● Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Ας θεωρήσουμε ένα απειροστά μικρό τμήμα του νήματος μήκους dx και μάζας dm
- Εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (y-άξονα)!
- Άρα έχει κινητική και δυναμική ενέργεια!

Κάθε απειροστά μικρό (στοιχειώδες) τμήμα του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, και άρα έχει δυναμική και κινητική ενέργεια.



Κύματα

- Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

γραμμική πυκνότητα
ή μ

- Κινητική ενέργεια

$$dK = \frac{1}{2}(dm)v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)v_y^2 \stackrel{(t=0)}{=} \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx$$

- Ολοκληρώνοντας για ένα μήκος κύματος

$$K_\lambda = \int dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

- Δυναμική ενέργεια (με όμοιο τρόπο)

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**

- Η συνολική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος ισούται με το άθροισμα κινητικής και δυναμικής

$$E_{mech} = K + U = E_{\lambda} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

- **Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας (= Ισχύς)**

$$P = \frac{T_{MK}}{\Delta t} = \frac{E_{\lambda}}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$

Κύματα

- Γραμμική εξίσωση κύματος που διαδίδεται σε νήμα

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Γενική μορφή εξίσωσης κύματος

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Η παραπάνω σχέση ισχύει για διάφορους τύπους κυμάτων



Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηχητικά Κύματα



Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηχητικά Κύματα

Ηχητικά Κύματα

- Τρεις κατηγορίες ηχητικών κυμάτων

- *Ακουστικά κύματα*

- Μουσική, φωνή, ηχεία

- *Κύματα υποήχων (υπόηχοι)*

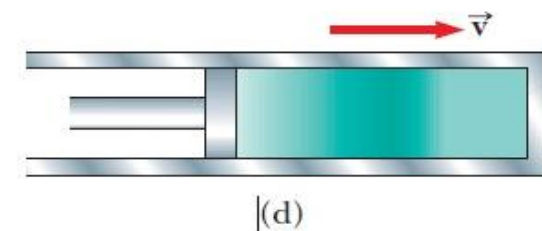
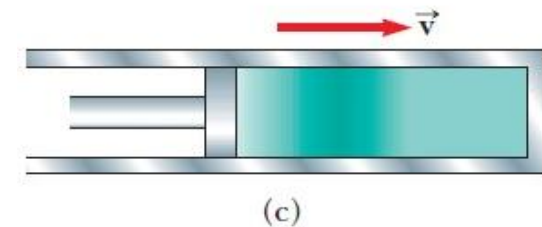
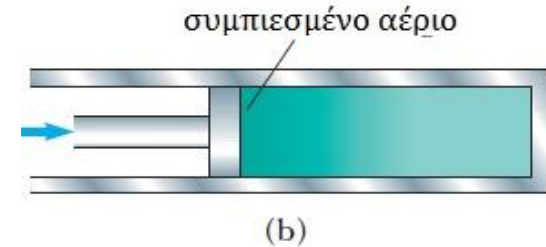
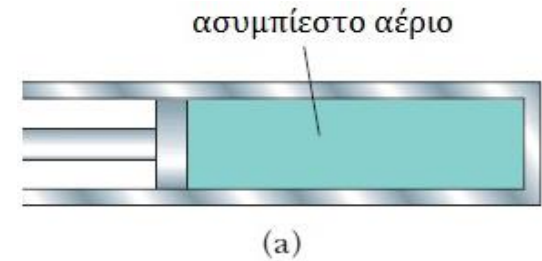
- Ελέφαντες επικοινωνούν με υπόηχους

- *Κύματα υπερήχων*

- Σφυρίχτρες σκύλων
 - Ιατρική απεικόνιση εμβρύων

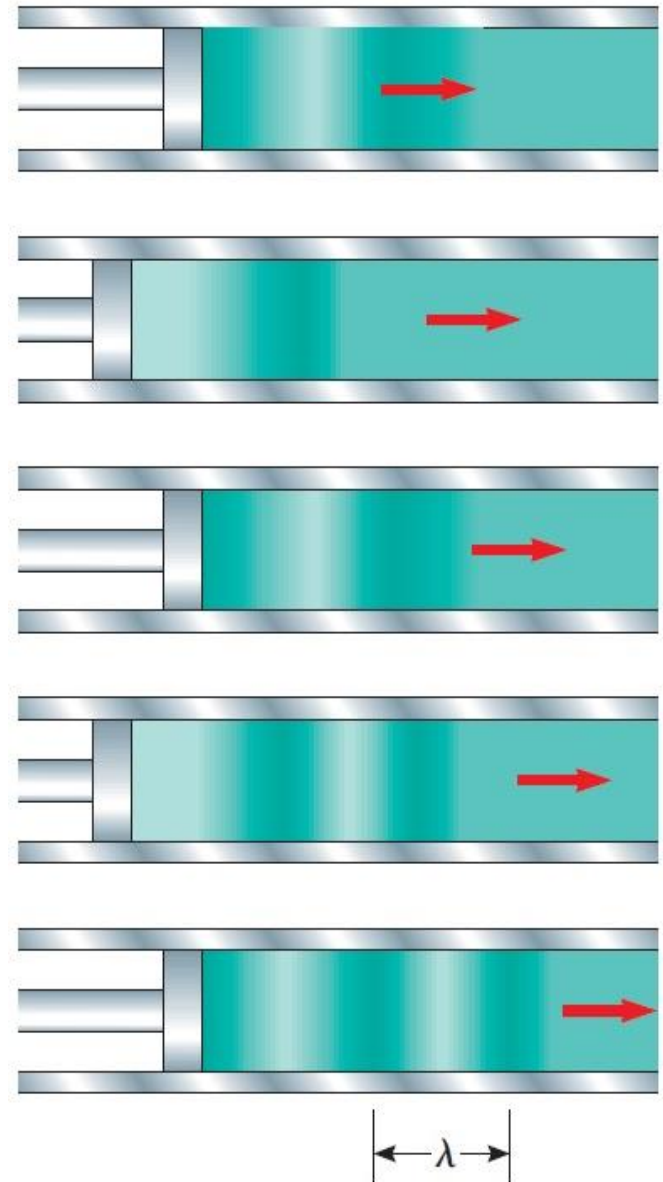
Ηχητικά Κύματα

- Έμβολο σε ακινησία – (a)
 - Αέριο ασυμπίεστο και σε ομοιόμορφη κατανομή
- Έμβολο σε κίνηση προς τα δεξιά – (b)
 - Πίεση και πυκνότητα αερίου μπροστά στο έμβολο είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στο υπόλοιπο μέρος του
- Έμβολο σε ακινησία – (c)
 - Διάμηκες κύμα διαδίδεται με ταχύτητα v
- Η διάδοση συνεχίζεται – (d)



Ηχητικά Κύματα

- Έμβολο σε απλή αρμονική ταλάντωση
 - Πίεση προς τα εμπρός
 - Περιοχές συμπίεσης (σκούρο)
 - Πυκνώματα
 - Τράβηγμα προς τα πίσω
 - Περιοχές αραιώσης (ανοιχτό)
 - Αραιώματα
- Διάδοση με ταχύτητα ήχου

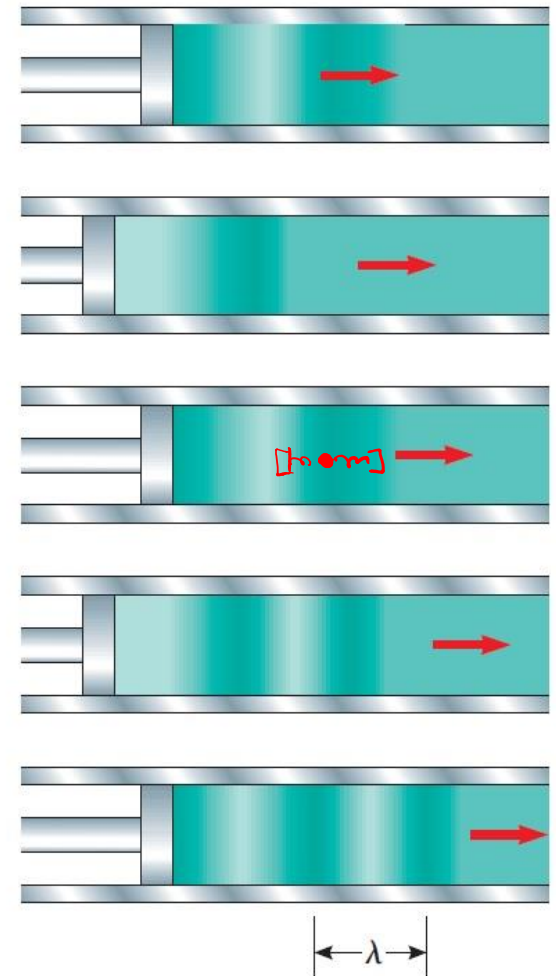


Ηχητικά Κύματα

- ◉ Έμβολο σε απλή αρμονική ταλάντωση
- ◉ Απόσταση μεταξύ διαδοχικών πυκνωμάτων ή αραιωμάτων
 - ◉ Μήκος κύματος λ
- ◉ Κάθε μικρός όγκος αερίου εκτελεί απλή αρμονική κίνηση παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης

$$s(x, t) = s_{max} \cos(kx - \omega t)$$

- ◉ Ο όρος s_{max} δηλώνει το πλάτος μετατόπισης
 - ◉ Είναι η μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου από τη θέση ισορροπίας



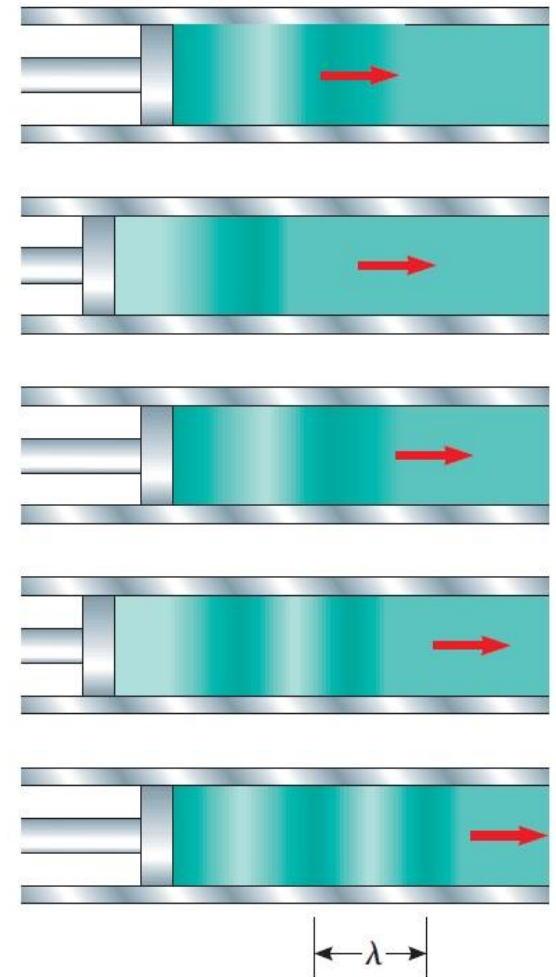
Ηχητικά Κύματα

- Μεταβολή πίεσης αερίου ΔP

$$\Delta P = \Delta P_{max} \sin(kx - \omega t)$$

όπου ΔP_{max} η μέγιστη μεταβολή της πίεσης γύρω από την τιμή ισορροπίας

- Ο όρος ΔP_{max} ονομάζεται πλάτος πίεσης



Ηχητικά Κύματα

- Ταχύτητα διάδοσης ήχου στον αέρα

$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}}$$

όπου T_c η θερμοκρασία του αέρα

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = u \cdot \Delta t = ut$$

- Παράδειγμα:

- Πώς θα μετρήσουμε σε πόση απόσταση από μας έπεσε ένας κεραυνός, αν ακούσουμε τον κρότο του σε t δευτερόλεπτα?



Ηχητικά Κύματα

- ◉ Ένταση περιοδικών ηχητικών κυμάτων

$$I = \frac{(Iσχύς)_{μεση}}{A} = \frac{1}{2} \rho u (\omega s_{max})^2 = \frac{(\Delta P_{max})^2}{2\rho u}$$

όπου ρ η πυκνότητα του μέσου διάδοσης και A το εμβαδό της επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης

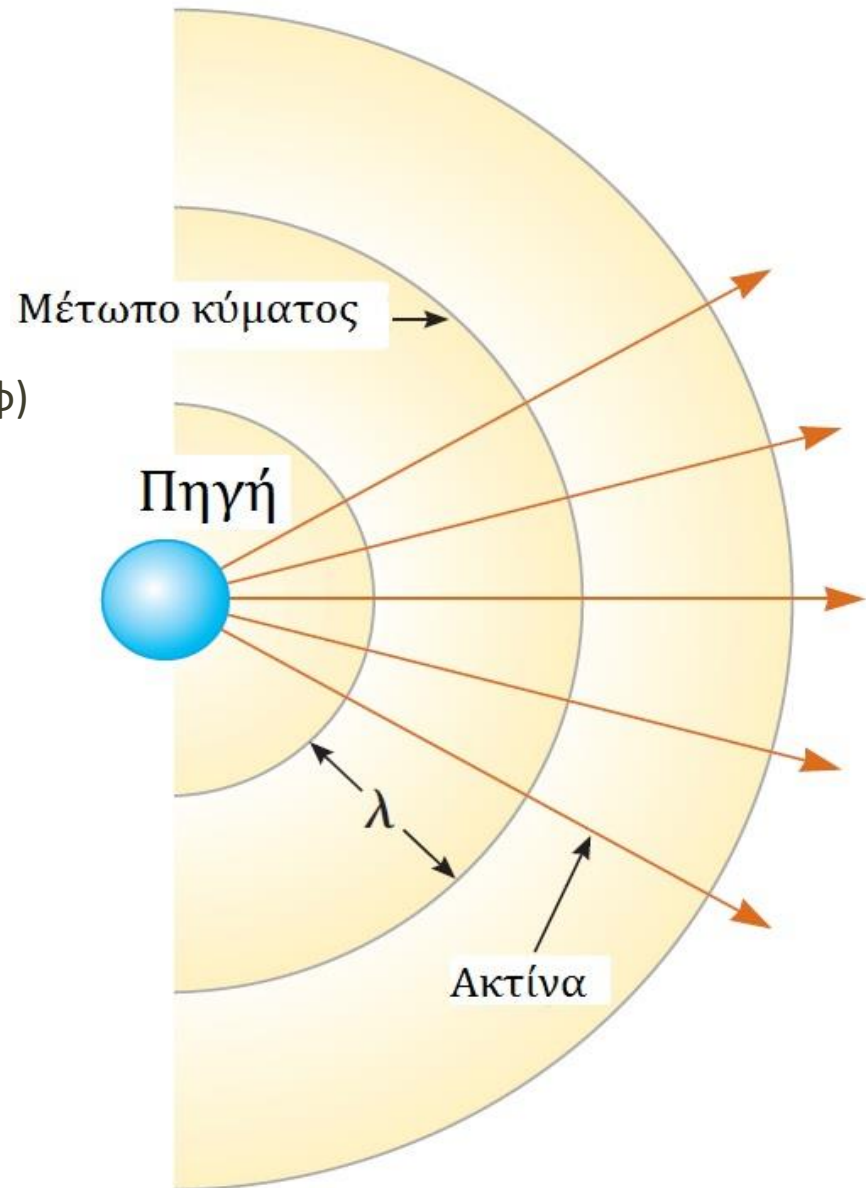
- ◉ Τα κύματα που είδαμε ως τώρα μοντελοποιούνταν ως διαμήκη κύματα
 - ◉ Διαδίδονταν σε ευθεία γραμμή
- ◉ Στην πράξη, τα κύματα διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις
 - ◉ Σφαιρικά κύματα

Ηχητικά Κύματα

- **Σφαιρικό κύμα**
 - Ομόκεντρα κυκλικά τόξα
- **Μέτωπο κύματος**
 - Επιφάνεια όπου η φάση ($kx - \omega t + \phi$) του κύματος είναι σταθερή
- **Ακτίνες**
 - Ευθείες που ξεκινούν απ' την πηγή
 - Δείχνουν την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
- **Ένταση κύματος σε απόσταση r**

$$I = \frac{(\text{Ισχύς})_{\text{μεση}}}{A} = \frac{(\text{Ισχύς})_{\text{μεση}}}{4\pi r^2}$$

Εμβαδό μετώπου



Ηχητικά Κύματα

- Οι ασθενέστεροι ήχοι που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα των 1000 Hz έχουν ένταση περίπου $10^{-12} \frac{W}{m^2}$.
- Αυτό είναι το λεγόμενο **κατώφλι ακοής**.
- Οι δυνατότεροι ήχοι που μπορούμε να ακούσουμε (χωρίς πόνο) είναι έντασης $1 \frac{W}{m^2}$.
- Για τις τιμές ταχύτητας και πυκνότητας αέρα $u = 343 \frac{m}{s}$, και $\rho = 1.2 \frac{kg}{m^3}$, το πλάτος πίεσης και μετατόπισης είναι:

Για τον χαμηλότερης έντασης ήχο:

$$\Delta P_{max} = \sqrt{2\rho v I} = 2.87 \times 10^{-5} \frac{N}{m^2}, \quad s_{max} = \frac{\Delta P_{max}}{\rho v \omega} = 1.11 \times 10^{-11} m$$

Για τον υψηλότερης έντασης ήχο:

$$\Delta P_{max} = \sqrt{2\rho v I} = 28.7 \frac{N}{m^2}, \quad s_{max} = \frac{\Delta P_{max}}{\rho v \omega} = 1.11 \times 10^{-5} m$$

Ηχητικά Κύματα

- ◉ **Εύρος έντασης**

- ◉ Μεγάλο εύρος εντάσεων αντιληπτό απ' το αυτί
- ◉ Μια λογαριθμική κλίμακα είναι βολικότερη
 - ◉ Το αυτί μας ακούει «λογαριθμικά»

- ◉ **Ηχοστάθμη**

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

- ◉ I_0 : ένταση αναφοράς (κατώφλι ακοής)
- ◉ β : μετριέται σε Decibel (dB)
 - ◉ Προς τιμήν του A. G. Bell
- ◉ Κατώφλι ακοής: 0 dB
- ◉ Όριο πόνου: 120-130 dB

Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με

$$I = 2 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2.$$

A) Βρείτε την ηχοστάθμη β που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.

B) Βρείτε την ηχοστάθμη β που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δυο μηχανές.

Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

A) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.

$$\text{Είναι } \beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{2 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log_{10} (2 \cdot 10^5)$$

$$= 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10} 10^5 = 10 \log_{10} 2 + 50 \log_{10} 10 =$$

$$= 10 \log_{10} 2 + 50 \cdot 1 \approx 3 + 50 = 53 \text{ dB}$$

Άρα για μια μηχανή, $\beta_1 = 53 \text{ dB}$.

Άρα αν διπλασιάσαμε τις μηχανές, θα είχαμε $\beta_2 = 2\beta_1$?

$$\log_{10} a^{\beta} = \beta \log_{10} a$$
$$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ηχητικά Κύματα

● Παράδειγμα:

- Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

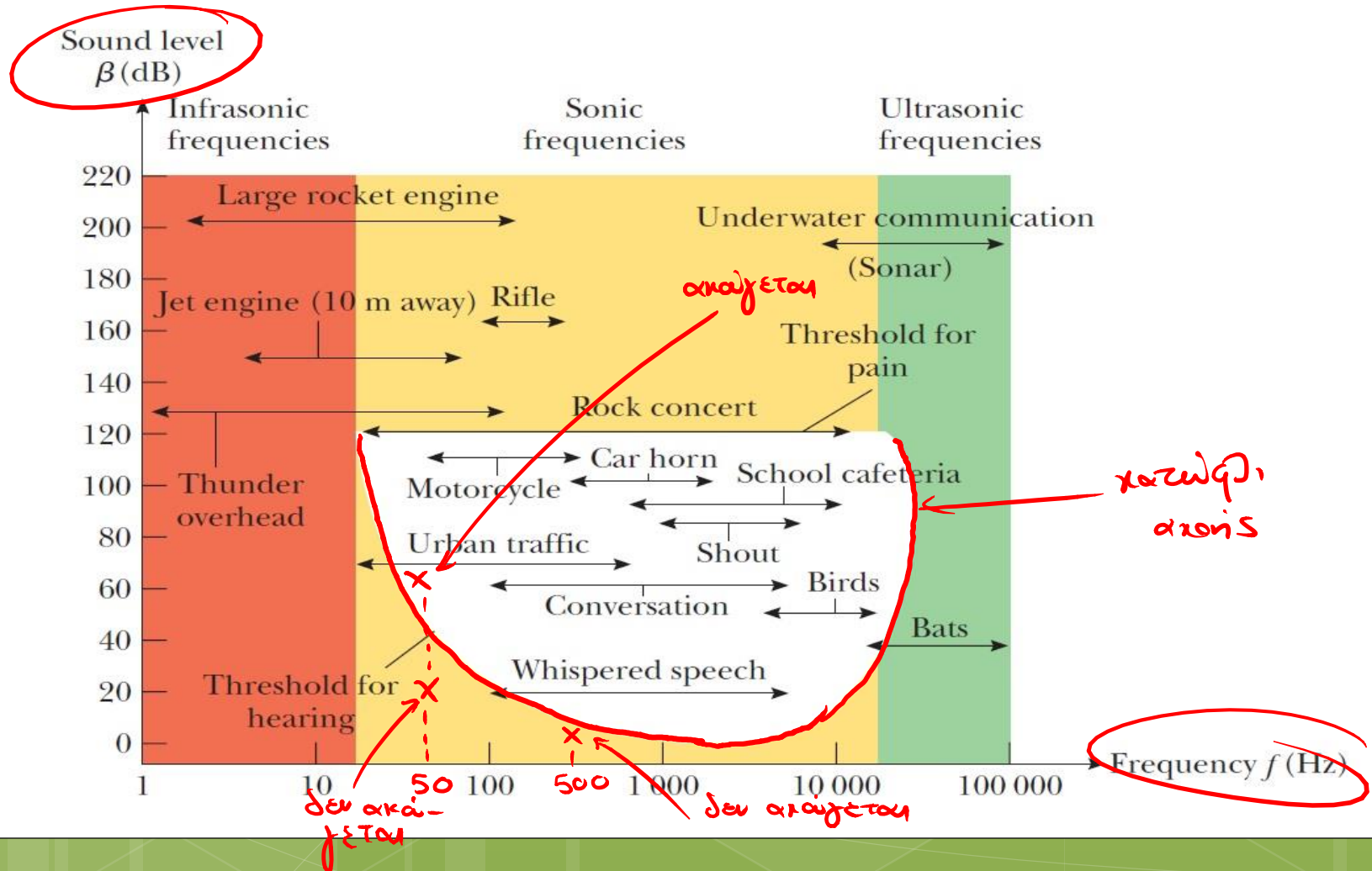
Β) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δυο μηχανές.

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \beta &= 10 \log_{10} \left(\frac{I_1 + I_2}{I_0} \right) = 10 \log_{10} \frac{2I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{4 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = \\ &= 10 \log_{10} (4 \cdot 10^5) = 10 \log_{10} 4 + 10 \log_{10} 10^5 = 10 \log_{10} 4 + 50 \approx \\ &\approx 6 + 50 = 56 \text{ dB}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \beta_2 \neq 2\beta_1 \text{ αλλά } \beta_2 \approx \beta_1 + 3 \text{ dB} !$$

Ηχητικά Κύματα

Ακουστότητα - Ψυχοακουστική



Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

- Συμπίεση ήχου (MP3 standard)

- Τρεις σημαντικοί παράγοντες

- Α. Εξάλειψη ήχων που δεν ακούγονται ($<$ κατώφλι ακοής)

- Μπορούμε να τους αφαιρέσουμε (μην αποθηκεύσουμε)

- Β. Κάποιοι ήχοι ακούγονται «καλύτερα» από άλλους

- Χρήση κρίσιμων ευρών ζώνης (critical bands)

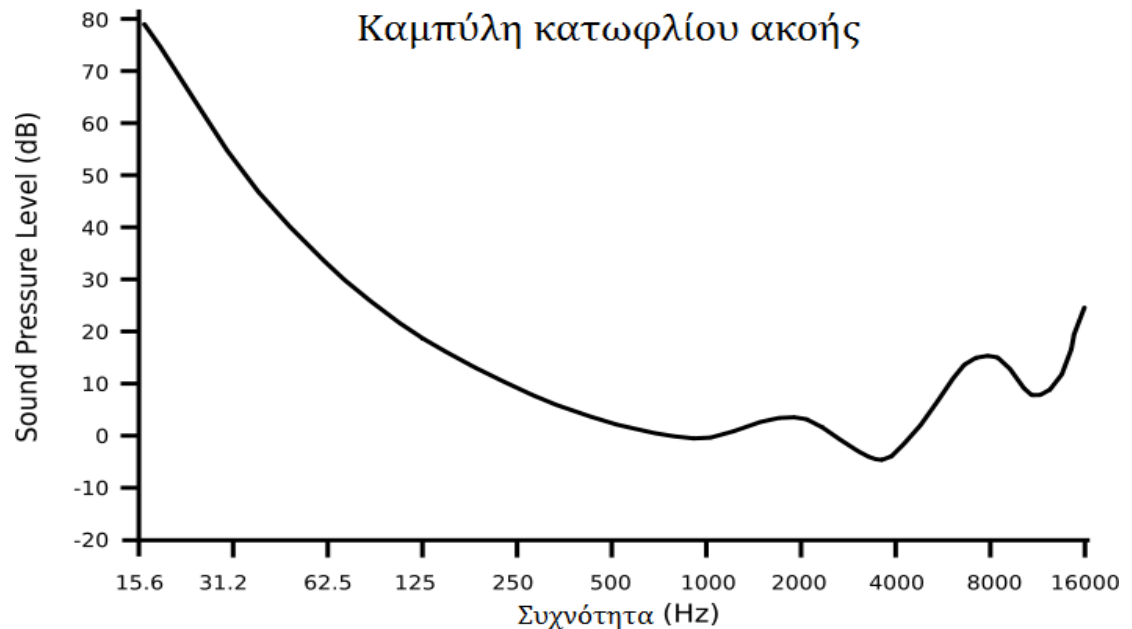
- Γ. Κάποιοι ήχοι επικαλύπτουν άλλους γειτονικούς

- Το φαινόμενο του masking (masking effect)

Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

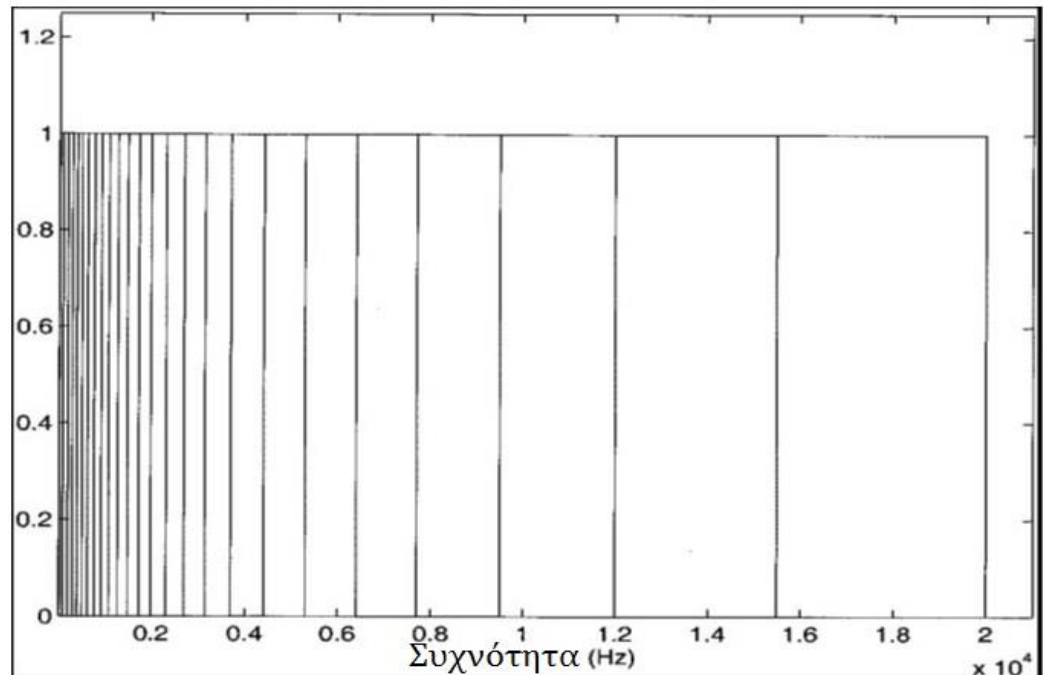
- Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
- Α. Εξάλειψη ήχων που δεν ακούγονται ($<$ κατώφλι ακοής)
 - Μπορούμε να τους αφαιρέσουμε
 - Ό,τι βρίσκεται κάτω από το κατώφλι, δε χρειάζεται να αποθηκευθεί



Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

- Συμπύεση ήχου (MP3 standard)
- Β. Κάποιοι ήχοι ακούγονται «καλύτερα» από άλλους
 - Χρήση κρίσιμων ευρών ζώνης (critical bands)
 - Διαφορετική «βαρύτητα» σε κάθε ζώνη
 - Διαφορετική «ευαισθησία» του αυτιού σε κάθε ζώνη



Ηχητικά Κύματα

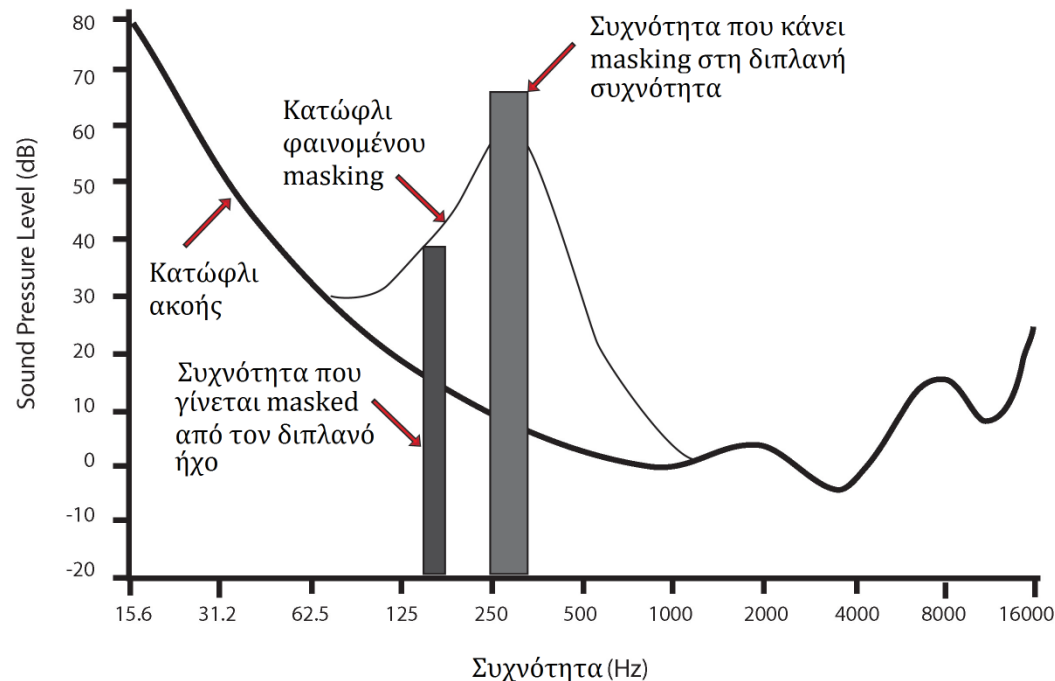
- Παράδειγμα εφαρμογής:

- Συμπίεση ήχου (MP3 standard)

- Γ. Masking effect

- Ένας πιο δυνατός ήχος μπορεί να επικαλύψει ένα γειτονικό του

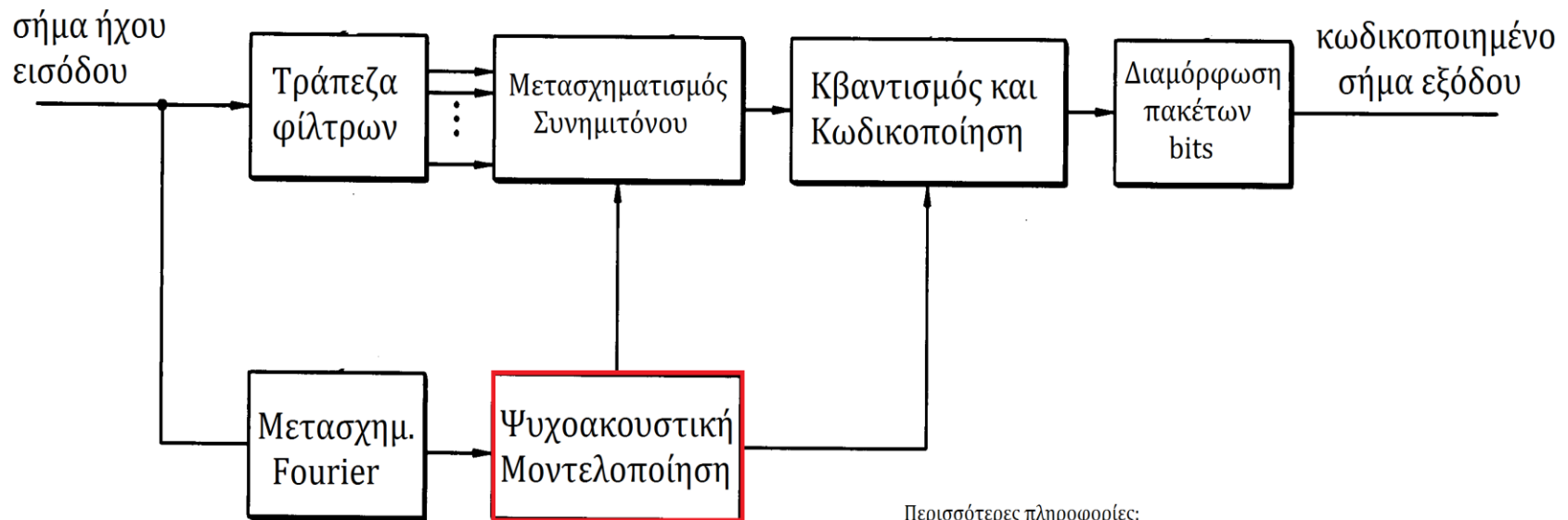
- Η πληροφορία του γειτονικού ήχου δε χρειάζεται να αποθηκευτεί



Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

- Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
- Απλοποιημένο διάγραμμα



Περισσότερες πληροφορίες:
<http://www.cns.nyu.edu/~msl/courses/2223/Readings/IEEEXplore-1.pdf>

Ηχητικά Κύματα

● Το φαινόμενο Doppler

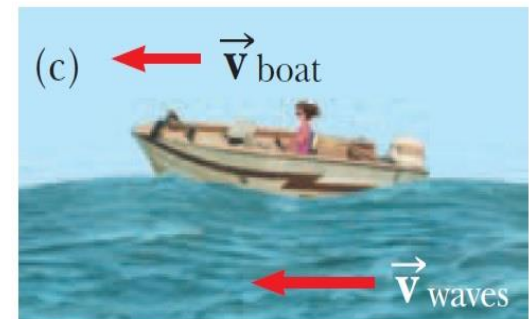
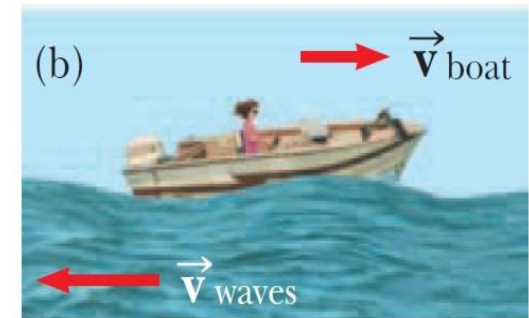
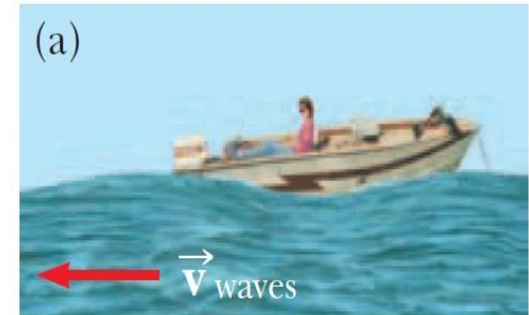
- Άκρως συχνή εμπειρία!
- Ένα όχημα με σειρήνα μας πλησιάζει και απομακρύνεται από μας
 - Το ακούμε με υψηλότερη συχνότητα καθώς έρχεται προς εμάς
 - Το ακούμε με χαμηλότερη συχνότητα καθώς απομακρύνεται



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

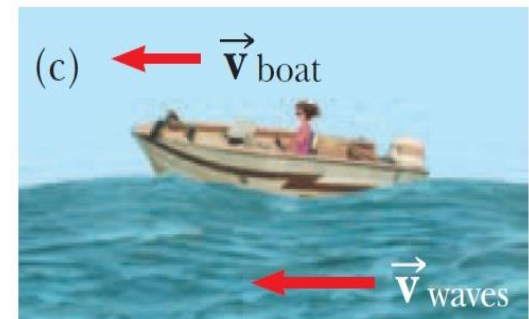
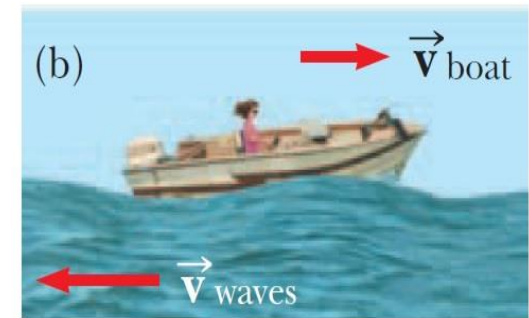
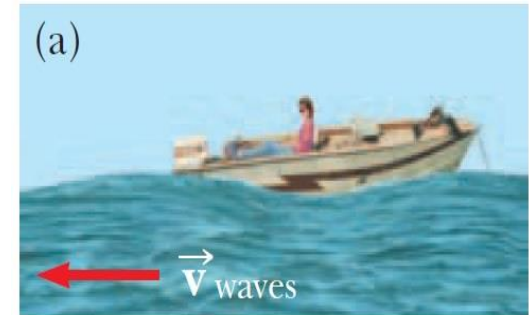
- Διαισθητική κατανόηση
 - Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
 - Αν προχωρήσει η βάρκα προς την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει γρηγορότερα απ' ό,τι πριν
 - Λόγω της κίνησής μας προς την πηγή
- Μετράμε περίοδο $T' < T$
- Τα κύματα φτάνουν «πιο συχνά» στη βάρκα
 - $f' = 1/T' > f = 1/T$



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

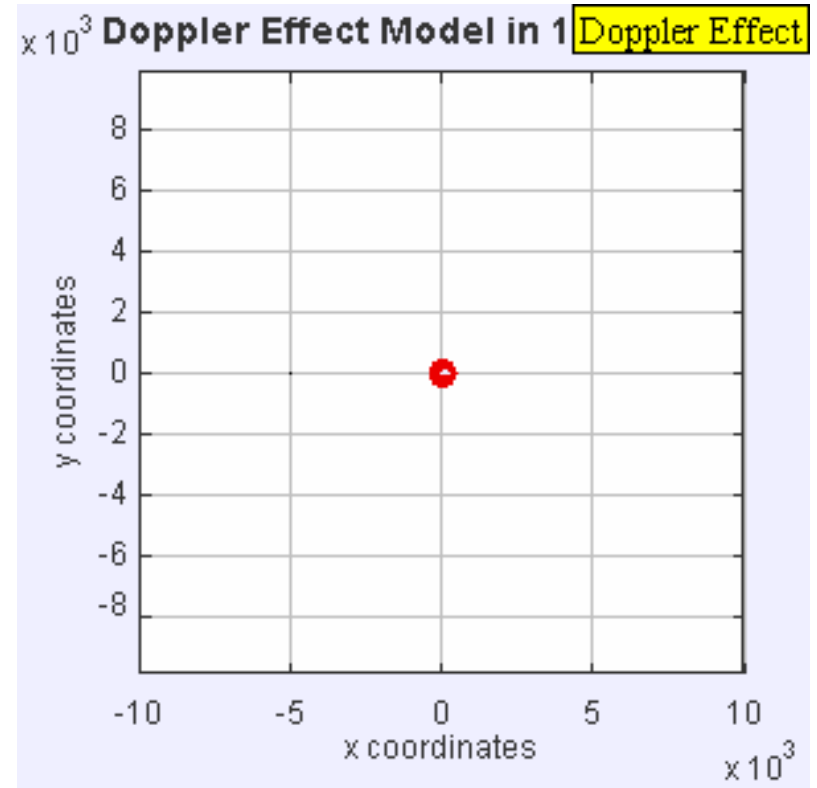
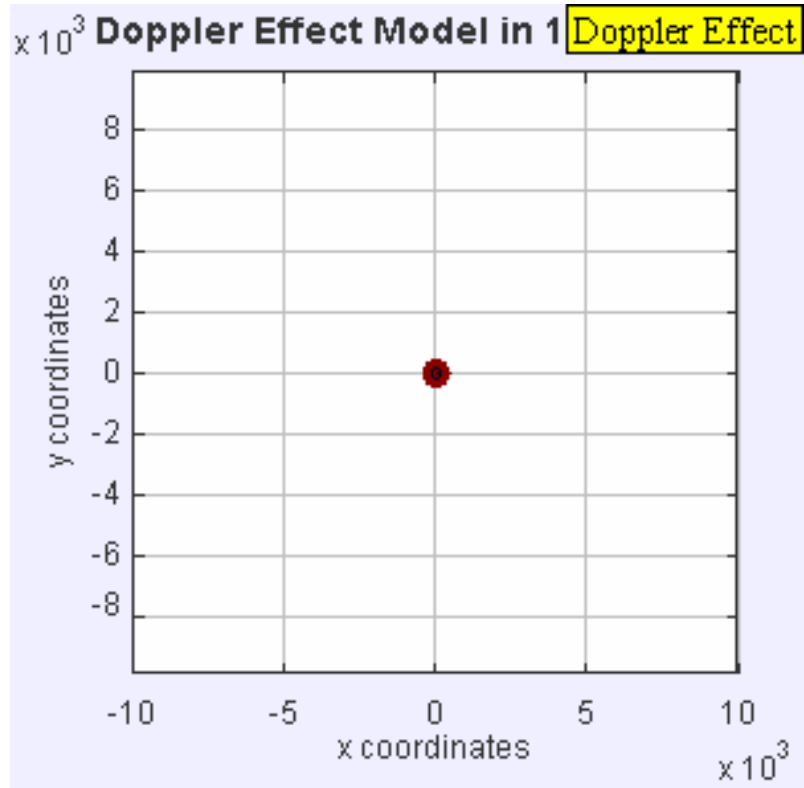
- Διαισθητική κατανόηση
 - Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
 - Αν προχωρήσει η βάρκα μακριά από την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει αργότερα απ' ό,τι πριν
 - Λόγω της κίνησής μας μακριά από την πηγή
 - Μετράμε περίοδο $T' > T$
 - Τα κύματα φτάνουν «πιο αραιά» στη βάρκα
 - $f' = 1/T' < f = 1/T$



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

- Ευθέως ανάλογα για μια ηχητική πηγή



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

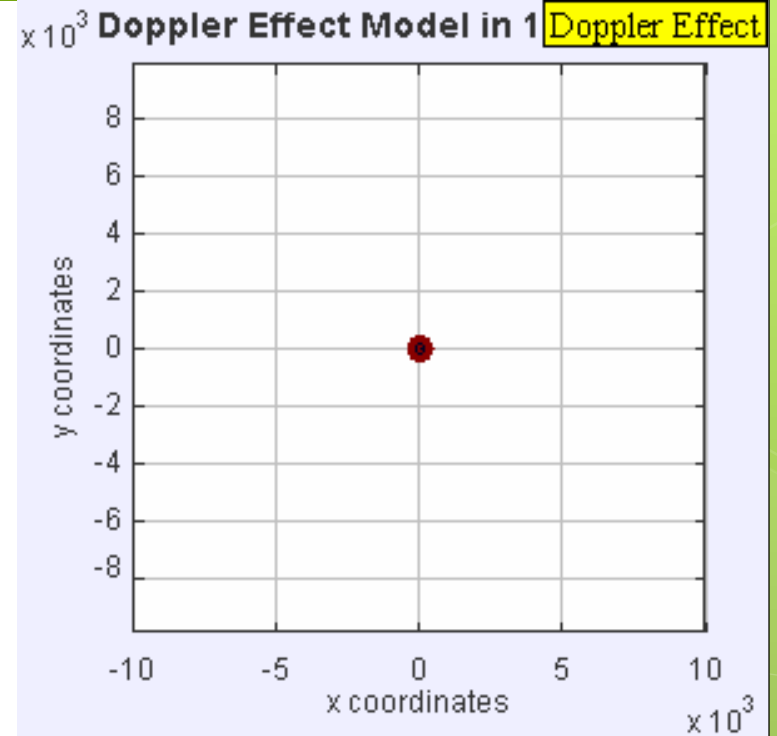
- Στάσιμη πηγή

- Συχνότητα πηγής f

- Περίοδος T

- Μήκος κύματος λ

- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται τη συχνότητα f της πηγής



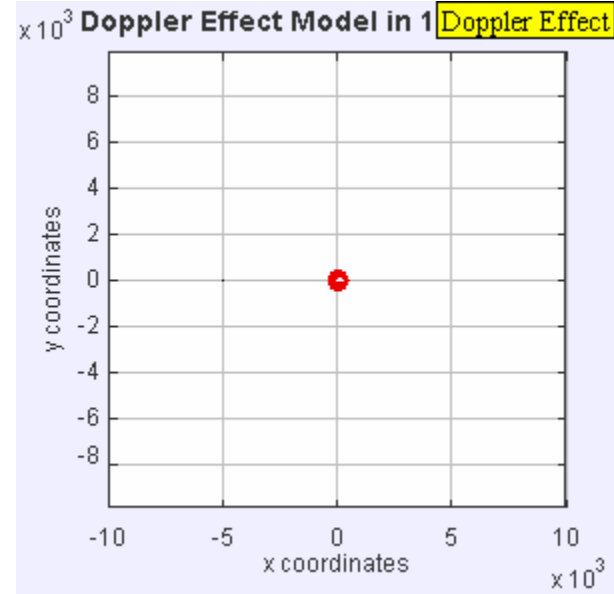
Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Κινούμενη πηγή
 - Προς τον παρατηρητή
- Συχνότητα πηγής f
- Περίοδος T
- Μήκος κύματος λ
- Ταχύτητα πηγής v_s

- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \left(\frac{v}{v - v_s} \right) f = \left(\frac{1}{1 - v_s/v} \right) f$$



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

- Κινούμενη πηγή

- Μακριά από τον παρατηρητή

- Συχνότητα πηγής f

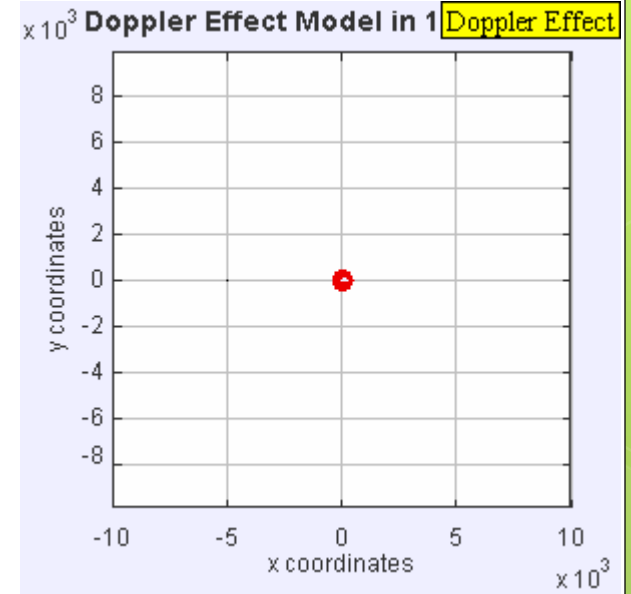
- Περίοδος T

- Μήκος κύματος λ

- Ταχύτητα πηγής v_s

- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \left(\frac{v}{v+v_s} \right) f = \left(\frac{1}{1+v_s/v} \right) f$$



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

- Κινούμενος παρατηρητής

- Πλησιάζει την πηγή

- Συχνότητα πηγής f

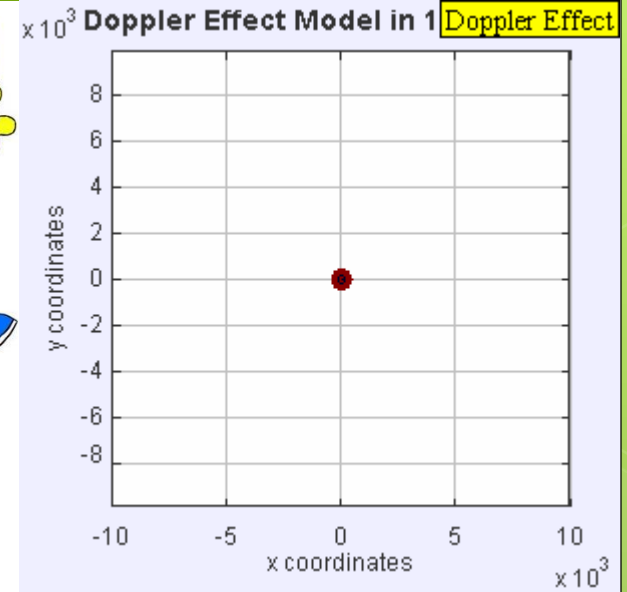
- Περίοδος T

- Μήκος κύματος λ

- Ταχύτητα παρατηρητή v_o

- Ένας κινούμενος παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

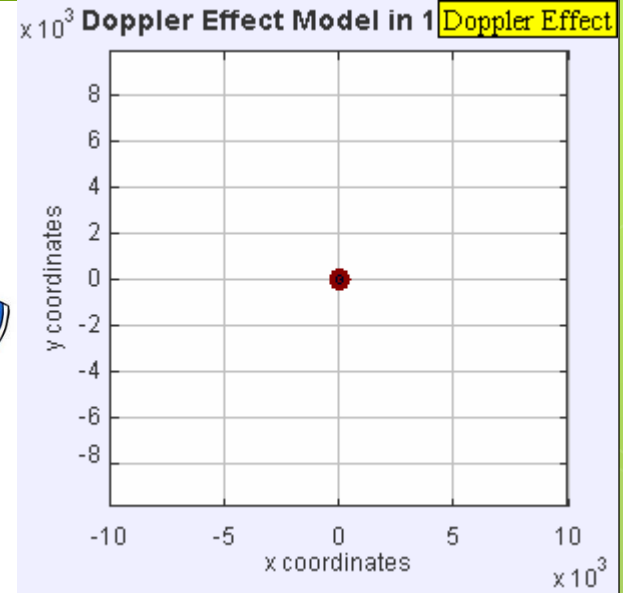
$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \left(\frac{v+v_o}{v} \right) f = \left(1 + \frac{v_o}{v} \right) f$$



Ηχητικά Κύματα

○ Το φαινόμενο Doppler

- Κινούμενος παρατηρητής
 - Απομακρύνεται από την πηγή
- Συχνότητα πηγής f
- Περίοδος T
- Μήκος κύματος λ
- Ταχύτητα παρατηρητή v_o



- Ένας κινούμενος παρατηρητής που απομακρύνεται από την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \left(\frac{v - v_o}{v} \right) f = \left(1 - \frac{v_o}{v} \right) f$$

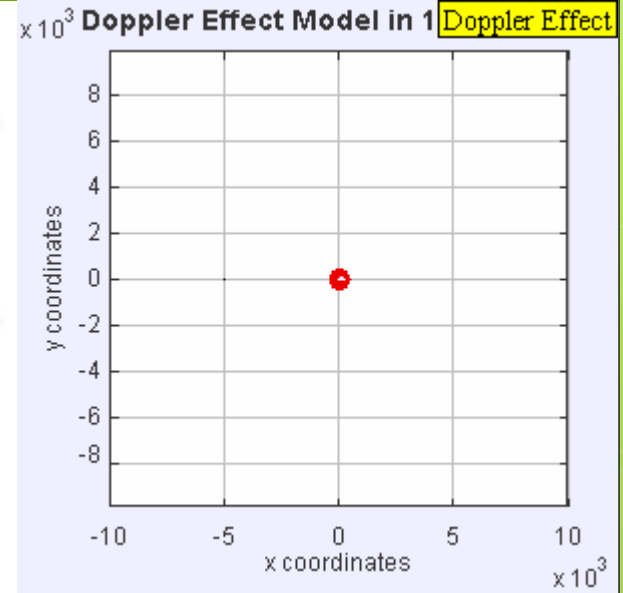
Ηχητικά Κύματα

○ Το φαινόμενο Doppler

- Κίνηση και των δυο
- Συχνότητα πηγής f
- Περίοδος T
- Μήκος κύματος λ
- Ταχύτητα παρατηρητή v_o
- Ταχύτητα πηγής v_s

- Ένας κινούμενος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα μιας κινούμενης πηγής

$$f' = \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right) f$$



1. Πηγή ή παρατηρητής **κινούνται ο ένας προς τον άλλο**: πρόσημα που αυξάνουν το f'
2. Πηγή ή παρατηρητής **απομακρύνονται ο ένας προς τον άλλο**: πρόσημα που μειώνουν το f'

Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί, «κολλάει» και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4^ο όροφο (15 m από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;



Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί, «κολλάει» και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4^ο όροφο (15 m από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Η ταχύτητα του ρολοιού είναι $u_s = g \cdot t$ (αγνωστο!)
 Γνωρίζουμε ότι:

$$y_B = y_A + u_{iy} \cdot t + \frac{1}{2} g t_B^2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{2} g t_B^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_B^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ . Άρα } u_s = g \sqrt{\frac{2h}{g}} =$$

$$= \sqrt{2hg} = u_s^{(B)} \text{ . Οπότε } f' = \frac{u}{u + u_s^{(B)}} f = \frac{343}{343 + \sqrt{2gh}} \approx 571 \text{ Hz}$$

 Άρα $f' \approx 571 \text{ Hz}$.

A (ορ) $\leftarrow$ f (εστία)
 B (ορ) $\leftarrow$ f'
 $h = 15 \text{ m}$
 $\downarrow g$
 $\downarrow (+)$ θετική φορά

$$f' = \frac{u \pm u_o}{u \mp u_s} f$$

Παρατηρητής
 πηγή

Ηχητικά Κύματα

● Παράδειγμα:

- Από το ηχείο ενός πλανόδιου πωλητή που κινείται με σταθερή ταχύτητα εκπέμπεται ένα ημίτονο στα 210 Hz. Όταν βρίσκεστε στα 10 m από το ηχείο, μετράτε την ηχοστάθμη του ήχου και τη βρίσκετε στα 95 dB στα 208 Hz. Πόσο χρόνο θα πάρει μέχρι η ηχοστάθμη να πέσει στα ανεκτά επίπεδα των 55 dB? Υποθέστε ότι η θερμοκρασία είναι 20 C.

Ηχητικά Κύματα

Παράδειγμα – Λύση:

- Από το ηχείο ενός πλανόδιου πωλητή που κινείται εκπέμπεται ένα ημίτονο στα 210 Hz. Όταν βρίσκεστε στα 10 m από το ηχείο, μετράτε την ηχοστάθμη του ήχου και τη βρίσκετε στα 95 dB στα 208 Hz. Πόσο χρόνο θα πάρει μέχρι η ηχοστάθμη να πέσει στα ανεκτά επίπεδα των 55 dB? Υποθέστε ότι η θερμοκρασία είναι 20 C.

Είναι $f' = \frac{u}{u + u_s} f$

$$u_s = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}} \Big|_{T_c=20} = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow u_s = \left(\frac{f - f'}{f'} \right) u = \frac{210 - 208}{208} \cdot 343 = 3.3 \text{ m/s}$$

Όπως γνωρίζουμε ότι $I = \frac{P_{\text{έξοδ}}}{A} = \frac{P_{\text{έξοδ}}}{4\pi r^2}$

$$\begin{aligned} \text{Αν } I_1 &= \frac{P_{\text{έξοδ}}}{4\pi r_1^2} \\ I_2 &= \frac{P_{\text{έξοδ}}}{4\pi r_2^2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2}}{\frac{P}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}} \quad (2)$$

$$\text{Η } (1) \Rightarrow \frac{\beta}{10} = \log_{10} \frac{I}{I_0} \Rightarrow 10^{\frac{\beta}{10}} = \frac{I}{I_0} \Rightarrow \boxed{I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}}$$

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f$$

$$\rightarrow \beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (1)$$

Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Από το ηχείο ενός πλανόδιου πωλητή που κινείται εκπέμπεται ένα ημίτονο στα 210 Hz. Όταν βρίσκεστε στα 10 m από το ηχείο, μετράτε την ηχοστάθμη του ήχου και τη βρίσκετε στα 95 dB στα 208 Hz. Πόσο χρόνο θα πάρει μέχρι η ηχοστάθμη να πέσει στα ανεκτά επίπεδα των 55 dB? Υποθέστε ότι η θερμοκρασία είναι 20 C.

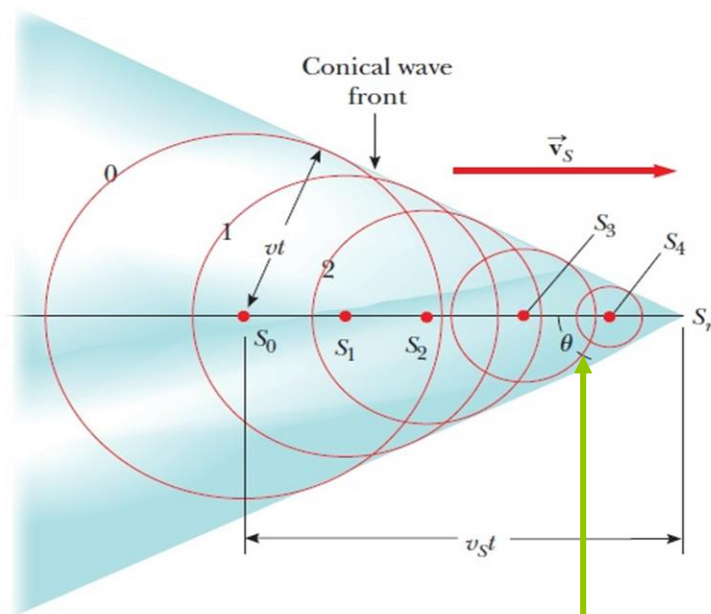
$$\begin{aligned} \text{Είναι } \left. \begin{aligned} I_1 &= I_0 \cdot 10^{\frac{\beta_1}{10}} \\ \beta_1 &= 95 \text{ dB} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow I_1 = I_0 \cdot 10^{9.5} \\ \left. \begin{aligned} I_2 &= I_0 \cdot 10^{\frac{\beta_2}{10}} \\ \beta_2 &= 55 \text{ dB} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow I_2 = I_0 \cdot 10^{5.5} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{I_0 \cdot 10^{9.5}}{I_0 \cdot 10^{5.5}} &= \frac{r_2^2}{10^2} \Rightarrow \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{10^{9.5}}{10^{5.5}} = \frac{r_2^2}{100} \Rightarrow 10^{9.5-5.5} = \frac{r_2^2}{100} \Rightarrow r_2^2 = 100 \cdot 10^4 = 10^6 \Rightarrow r_2 = 1000 \text{ m}$$

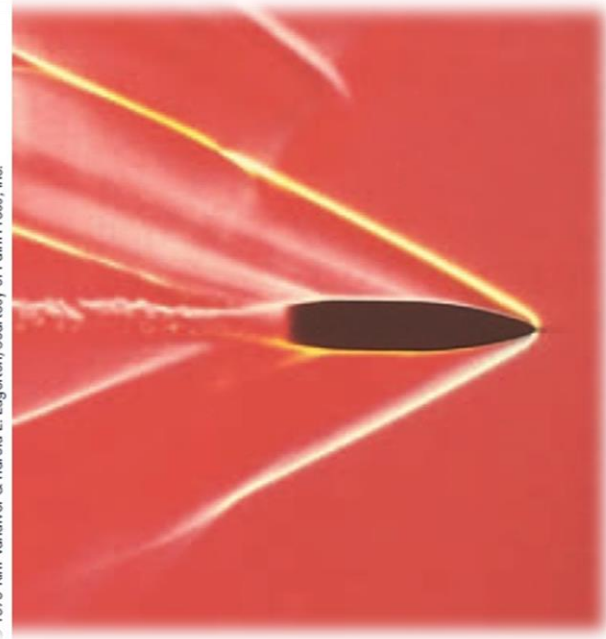
$$\text{Βρίσκουμε ότι } u_s = 3.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ σταθερή. Άρα } u = \frac{\Delta r}{\Delta t} \overset{990}{=} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta r}{u} = 300 \text{ s}$$

Ηχητικά Κύματα

- Κρουστικά κύματα
 - Πηγές με ταχύτητα $v_s > v_{wave}$



© 1973 Kim Vandiver & Harold E. Edgerton/Courtesy of Palm Press, Inc.



- Αριθμός Mach:

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{v_s}{v_{wave}}$$

Ηχητικά Κύματα

◉ Ψηφιακή Ηχογράφηση

- ◉ Πρώτη αναλογική ηχογράφηση (Edison, 19^{ος} αιώνας)

- ◉ Φωνογράφος

- ◉ Αποθηκεύει τον ήχο ως διακυμάνσεις του βάθους αυλακώσεων, δημιουργώντας «κορυφές» και «κοιλίες» επάνω σε έναν κύλινδρο, μέσω μιας βελόνας που συνδεόταν σε έναν φωναγωγό που λάμβανε τα μηχανικά κύματα

- ◉ Κατά την αναπαραγωγή, η βελόνα «ακολουθεί» το μονοπάτι των αυλακώσεων, και συνδεδεμένη με το διάφραγμα και τον φωναγωγό, παράγει τον ήχο



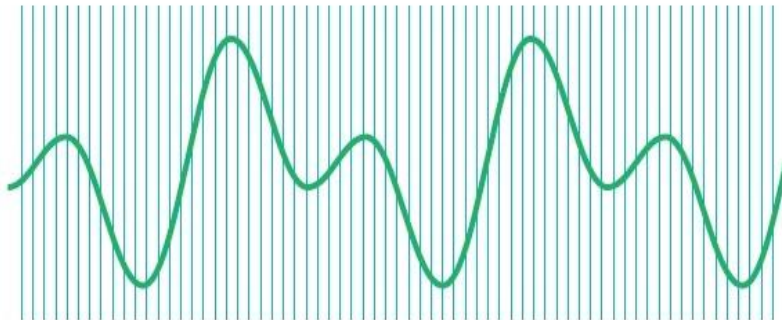
Ηχητικά Κύματα

- Ψηφιακή Ηχογράφηση

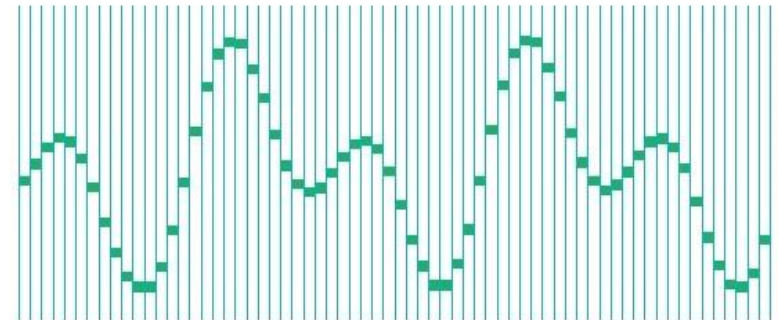
- Ακολουθία bits (1 και 0)

- Βήμα 1^ο: Δειγματοληψία

- Παίρνουμε δείγματα από τον ήχο ανά τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ. 44100 δείγματα σε 1 sec, με σταθερή απόσταση μεταξύ τους)



(a)

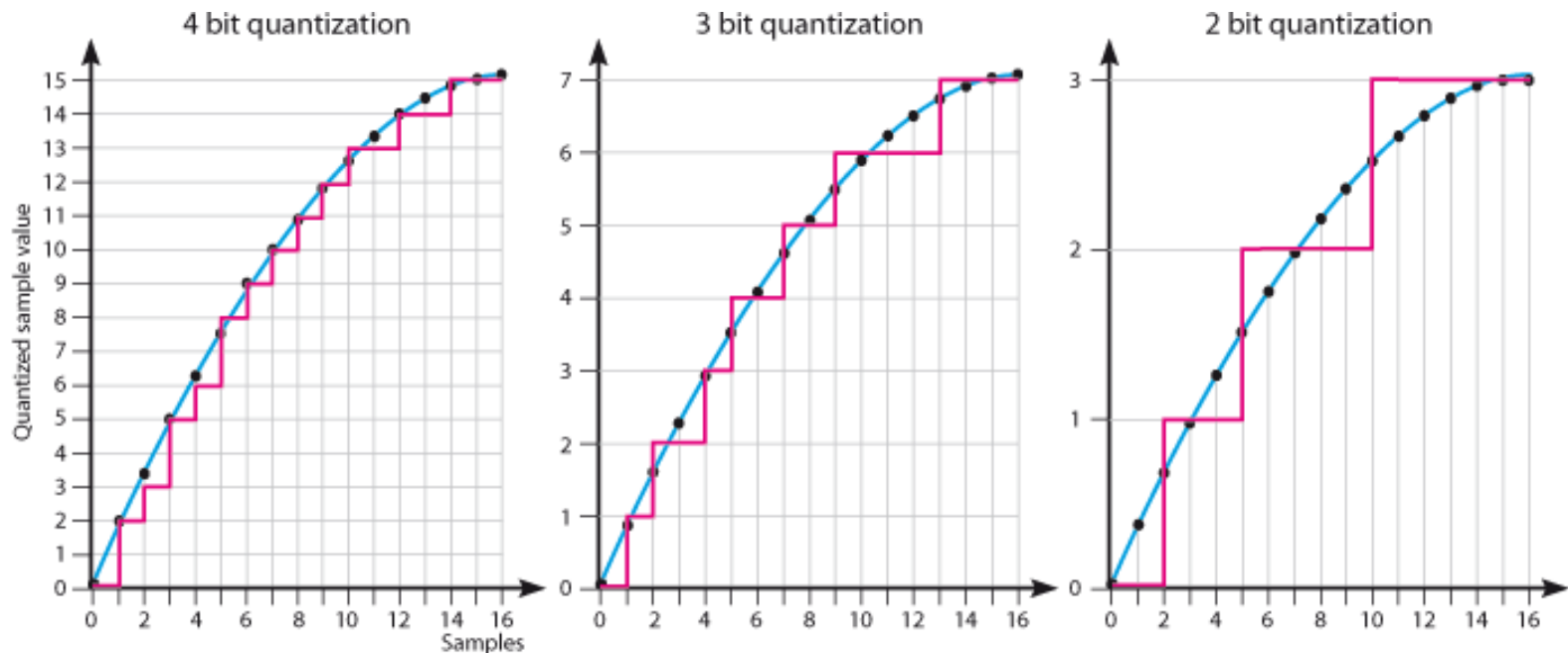


(b)

Ηχητικά Κύματα

Ψηφιακή Ηχογράφηση

- Ακολουθία bits (1 και 0)
- Βήμα 2^ο: Κβαντισμός – Μετατροπή σε ψηφιακό σήμα
 - «Στρογγυλεύουμε» τις τιμές πλάτους των δειγμάτων
 - Μετατρέπουμε τις τιμές στο δυαδικό σύστημα

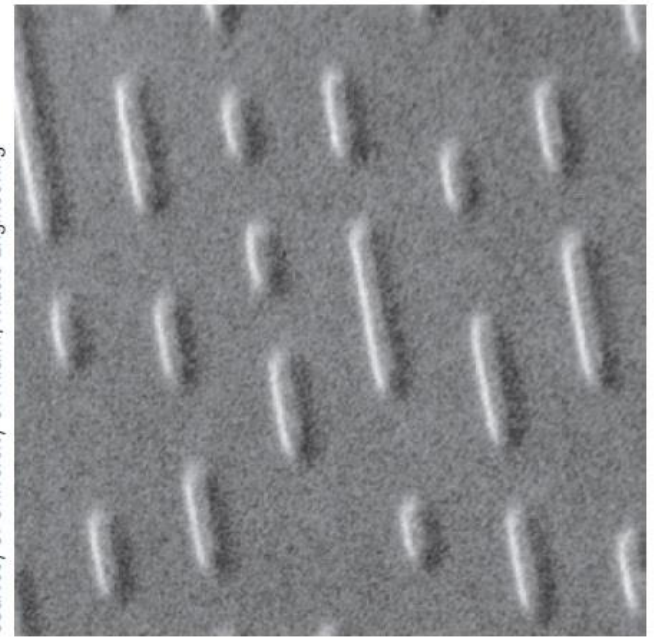


Ηχητικά Κύματα

○ Ψηφιακή Ηχογράφηση

- Επιφάνεια ψηφιακού δίσκου (compact disk)
- Οι «κορυφές» και οι «κοιλίες» ανιχνεύονται από ένα σύστημα laser
 - Αναπαριστούν 1 και 0
- Οι δυαδικοί αριθμοί μετατρέπονται ξανά σε τάσεις (voltage)
 - Ουσιαστικά σε διακριτές τιμές
- Το αρχικό ηχητικό σήμα ανασυντίθεται

Courtesy of University of Miami, Music Engineering





Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Υπέρθεση

- Μελέτη κυματικής
- Κύματα διαφορετικά από σωματίδια
 - Συνδυασμός σωματιδίων δίνει ένα σώμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία
 - Συνδυασμός κυμάτων δίνει ένα κύμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο ίδιο σημείο!
- Σημαντικό: τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην ίδια θέση του χώρου!
 - Για να αναλύσουμε τέτοιες συμπεριφορές, απαιτείται η **αρχή της υπέρθεσης**

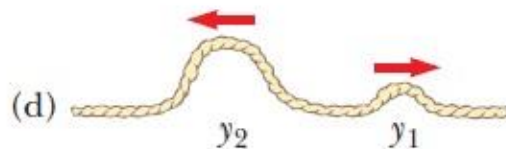
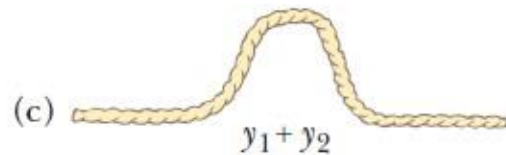
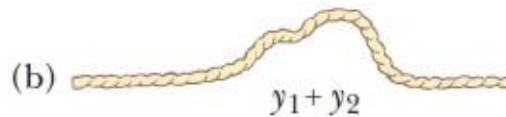
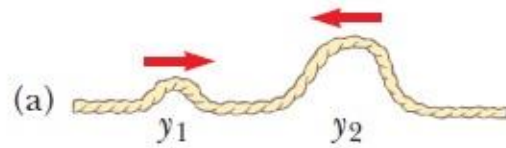
Υπέρθεση

- Αρχή της υπέρθεσης

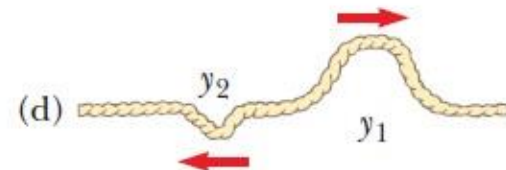
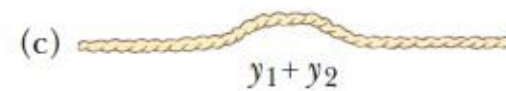
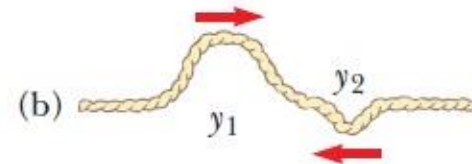
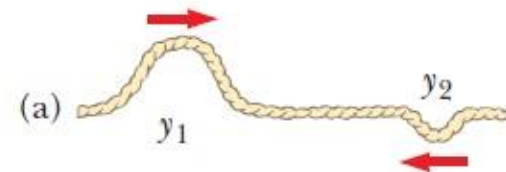
- *Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων*
- Τέτοια κύματα λέγονται **γραμμικά**
- Ο συνδυασμός δυο διαφορετικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου λέγεται **συμβολή**

Υπέρθεση

○ Αρχή της υπέρθεσης



Ενισχυτική Συμβολή



Καταστρεπτική Συμβολή

Υπέρθεση

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

○ Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- Δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά
 - Ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, και πλάτος
 - Διαφορετική φάση

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- $y = y_1 + y_2$

$$= A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

$$= 2A \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Υπέρθεση

Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- $y = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$

- Ίδια συχνότητα

- Ίδιο μήκος κύματος

- (α) $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

- Πλάτος $2A$

- Κύματα **σε φάση**

- **Ενισχυτική συμβολή**

- (b) $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

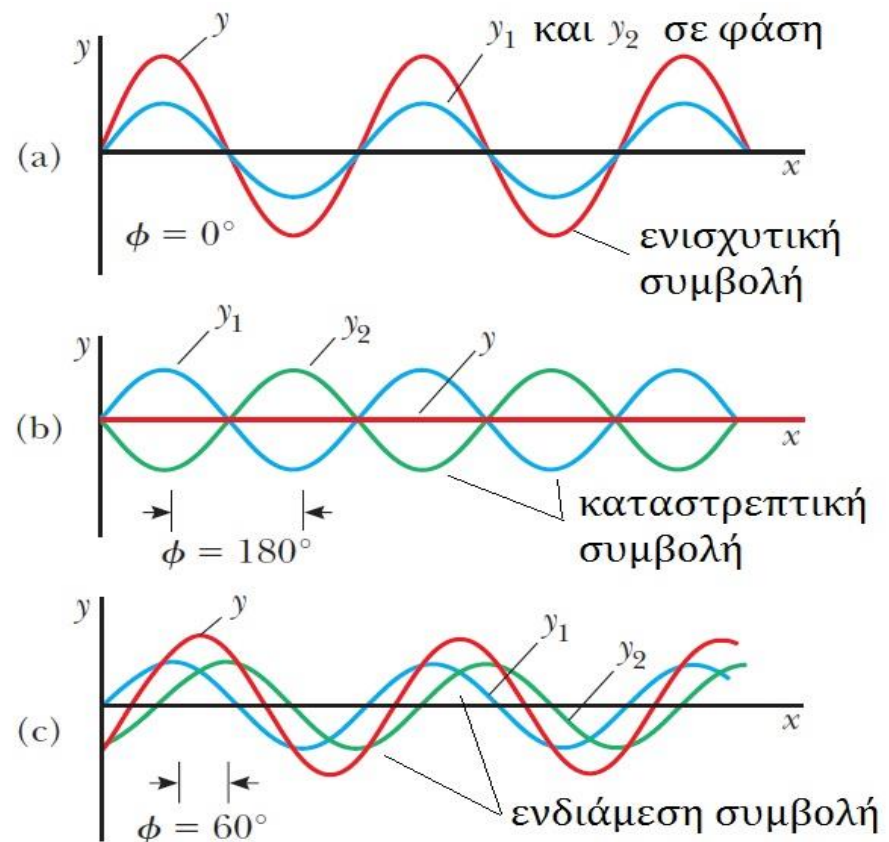
- Πλάτος 0

- Κύματα **εκτός φάσης**

- **Καταστρεπτική συμβολή**

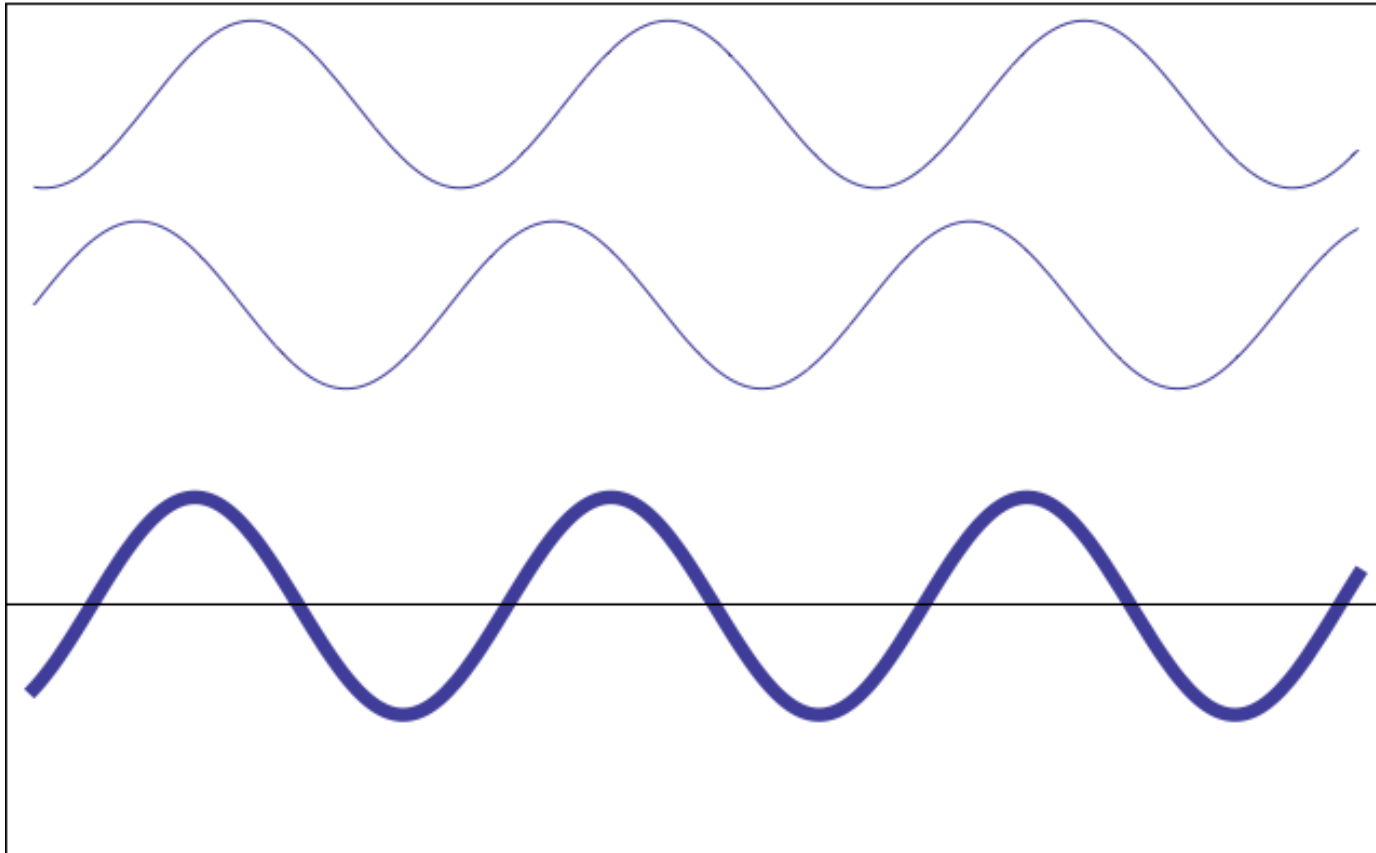
- (c) $0 \leq \phi \leq 2\pi$

- $0 \leq \text{Πλάτος} \leq 2A$



Υπέρθεση

- Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων



Υπέρθεση

• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του φάση
 - ενώ μπορεί να διανύουν και διαφορετικές διαδρομές
- Ηχητικά κύματα από το ηχείο ακολουθούν διαφορετική διαδρομή
 - Έχουν το ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω
 - Απόσταση ηχείου από δέκτη = **μήκος διαδρομής**

- Διαφορά διαδρομής

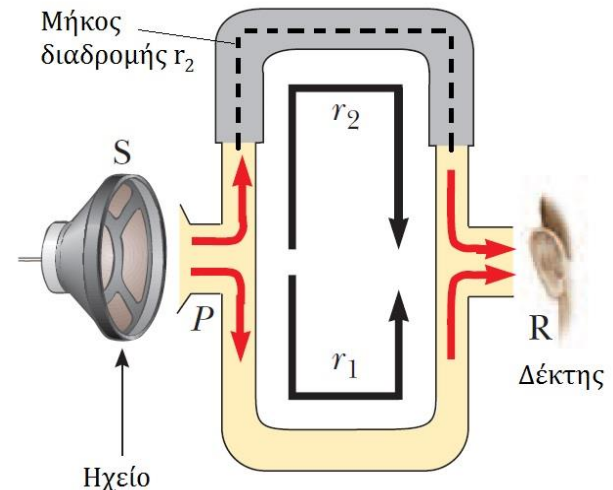
$$\Delta r = |r_2 - r_1|$$

- Φάση του καθενός κύματος

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- Τότε

$$y = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$



Υπέρθεση

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**

- Είναι

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\varphi$$

- Αν $\Delta\Phi = 2m\pi$, $m = 0,1,2,3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά

- Αν $\Delta\Phi = (2m+1)\pi$, $m = 0,1,2,3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν καταστρεπτικά

- Αν η αρχική φάση είναι ίδια (π.χ. κοινή πηγή ήχου): $\Delta\varphi = 0$

- Ενισχυτική: $\Delta r = m\lambda$, $m = 0,1,2,3, \dots$

- Καταστρεπτική: $\Delta r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, $m = 0,1,2,3 \dots$

Υπέρθεση

• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

• Καταστρεπτική συμβολή

- Λόγω διαφορετικής αρχικής φάσης $\Delta\phi$ - (a)

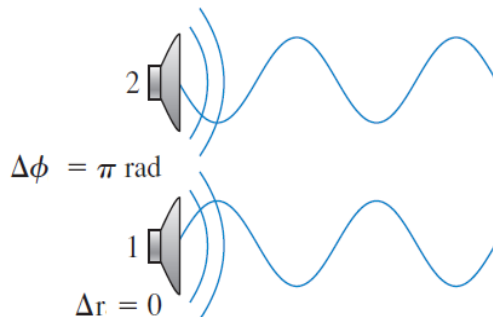
- Λόγω διαφορετικής θέσης - (b)

- Διαφορετικό μήκος διαδρομής Δr

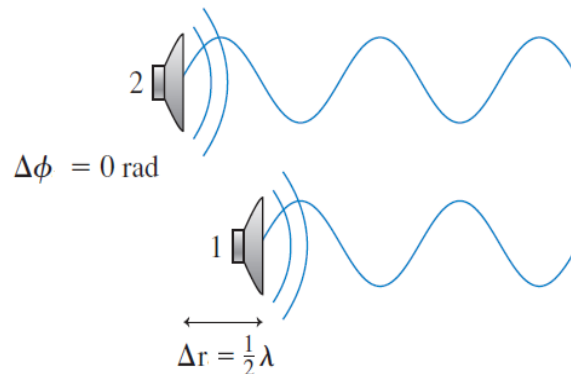
- Λόγω και των δυο παραπάνω παραγόντων - (c)

- Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε $\Delta\phi = \pi$ σε κάθε περίπτωση

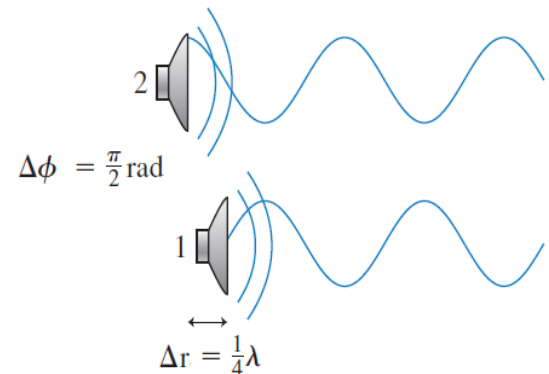
(a) Οι πηγές είναι εκτός φάσης



(b) Ίδιες πηγές διαφέρουν από μισό μήκος κύματος



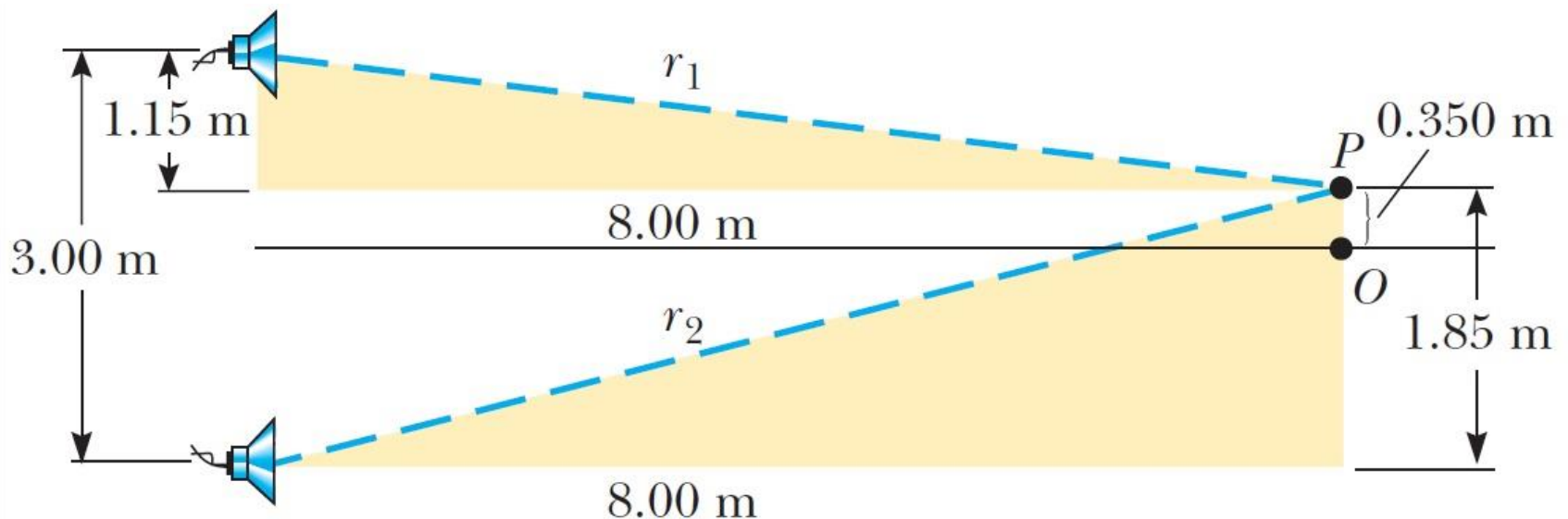
(c) Οι πηγές είναι ξεχωριστές και (μερικώς) εκτός φάσης



Υπέρθεση

◉ Παράδειγμα:

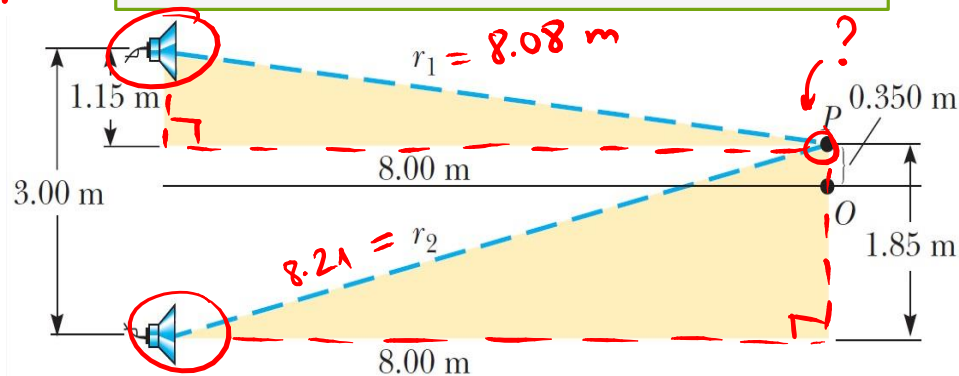
- ◉ Δυο ηχεία απέχουν 3 m μεταξύ τους είναι συνδεδεμένα με το ίδιο στερεοφωνικό. Ένας ακροατής βρίσκεται αρχικά στο σημείο O, που απέχει 8 m από το μέσον της ευθείας που ενώνει τα δυο ηχεία. Στη συνέχεια μετακινείται στο σημείο Σ, το οποίο έχει κάθετη απόσταση 0.35 m από το O και ακούει το πρώτο ελάχιστο της έντασης του ήχου. Ποια είναι η συχνότητα του ήχου;



* Υποθέτουμε κοινή πηγή ήχου: $\Delta\phi = 0$

Υπέρθεση

* Παράδειγμα – Λύση:



Το μήκος διαδρομής r_1 ισούται με:

$$r_1^2 = 8^2 + (1.15)^2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{8^2 + (1.15)^2} \simeq 8.08 \text{ m}$$

Αντίστοιχα,

$$r_2^2 = 8^2 + (1.85)^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{8^2 + (1.85)^2} \simeq 8.21 \text{ m}$$

Διαφορετικό
μήκος διαδρ.
για κάθε κύμα!

$$\text{Άρα } \Delta r = |r_2 - r_1| = 8.21 - 8.08 = 0.13 \text{ m}$$

Ο αρακτός ακαίει το πρώτο ελάχιστο στο σημείο P.

$$\text{Άρα } \Delta r = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \Bigg|_{m=0} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\Delta r = 0.26 \text{ m}$$

$$\text{Άρα τελικά } f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343}{0.26} = 1.319 \text{ Hz} \simeq 1.3 \text{ kHz}$$

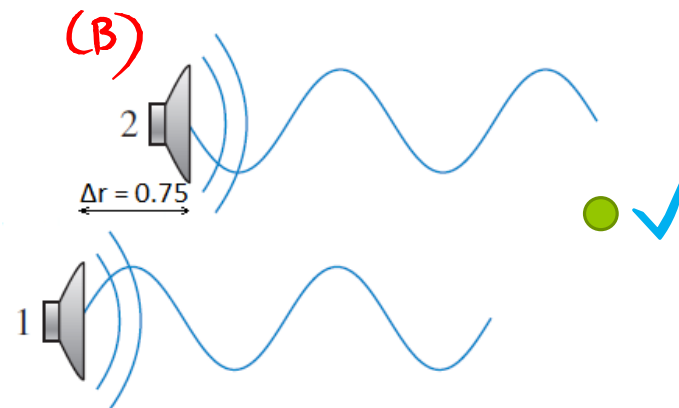
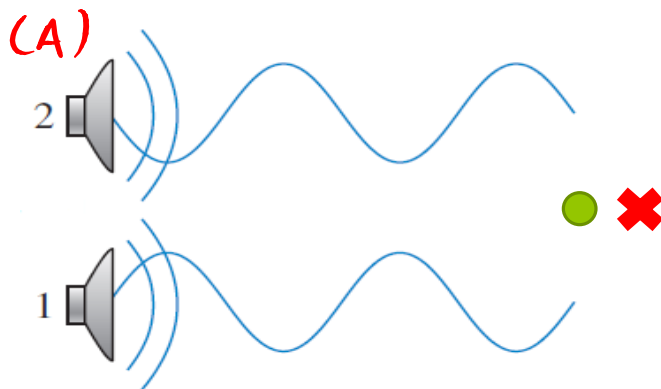
Υπέρθεση

● Παράδειγμα:

Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο.

Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους.

Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



Υπέρθεση

ο Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?

$$\text{Διάταξη (A): } \left. \begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi \\ \Delta r &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\phi = \Delta\phi = (2m+1)\pi, m=0 = \pi$$

Άρα $\boxed{\Delta\phi = \pi}$ Διαφορά
αρχικών φάσεων

$$\text{Διάταξη (B): } \left. \begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \pi \\ \Delta r &= 0.75 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0.75 + \pi = 2m\pi, m=1$$

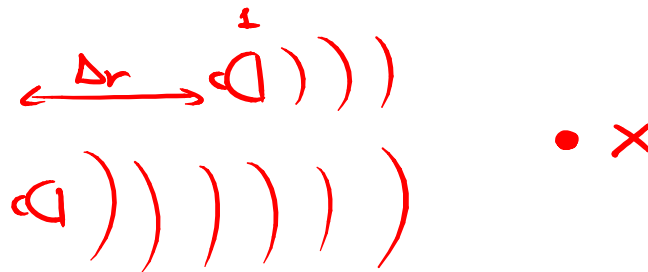
$$\text{Άρα } \Delta\phi = \frac{1.5\pi}{\lambda} = \pi \Leftrightarrow 1.5 = \lambda, \text{ άρα το μέγιστο κύμα είναι } \lambda = 1.5 \text{ m}$$

Υπέρθεση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?

Διάταξη (Γ):



$$\text{Είναι } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi \Leftrightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{1.5} \Delta r + \pi = (2m+1)\pi \Big|_{m=1} = 3\pi$$

$$\text{Άρα } \frac{2\pi}{1.5} \Delta r = 2\pi \Leftrightarrow \frac{\Delta r}{1.5} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\Delta r = 1.5 \text{ m}}$$



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Στάσιμα Κύματα

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

● Στάσιμα κύματα

- Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους
- Τι θα γίνει αν τα βάλουμε αντικρουστά;
 - Ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος
 - Αντίθετη ταχύτητα
- $y = y_1 + y_2$
 $= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$
 $= (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$
- Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα **στάσιμο κύμα**
 - Γενικότερα, **στάσιμη λέγεται μια ταλάντωση με στάσιμο περίγραμμα που αποτελείται από την υπέρθεση δυο όμοιων κυμάτων που ταξιδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις**

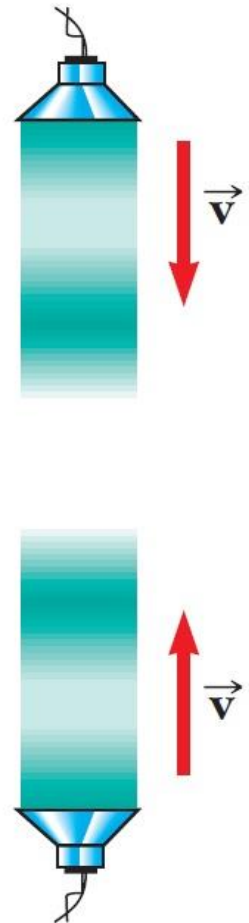


Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Παρατηρήστε ότι δεν εξαρτάται από την έκφραση $kx - \omega t$
- Άρα **δεν** είναι οδεύον κύμα
- Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα στάσιμο κύμα



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

- Ας συγκρίνουμε:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

και

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Τι παρατηρείτε;

- Η δεύτερη περιγράφει μια ειδική μορφή της πρώτης

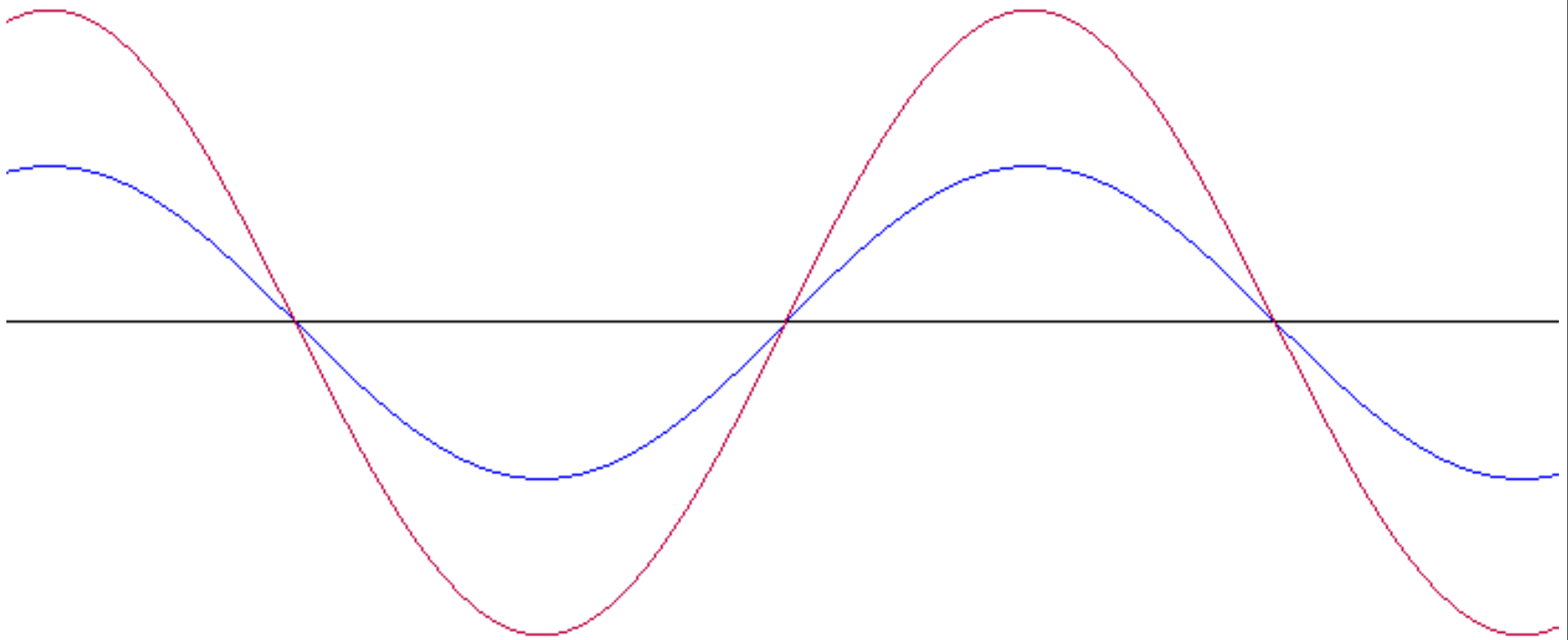
- $\varphi = 0$

- Κάθε στοιχείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

- Πλάτος απλής αρμονικής κίνησης εξαρτάται από τη θέση του, x , στο μέσο

Στάσιμα Κύματα

- *Στάσιμα κύματα*



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

$$y = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Πότε μηδενίζεται το πλάτος;

- $kx = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί**

- Πότε μεγιστοποιείται το πλάτος;

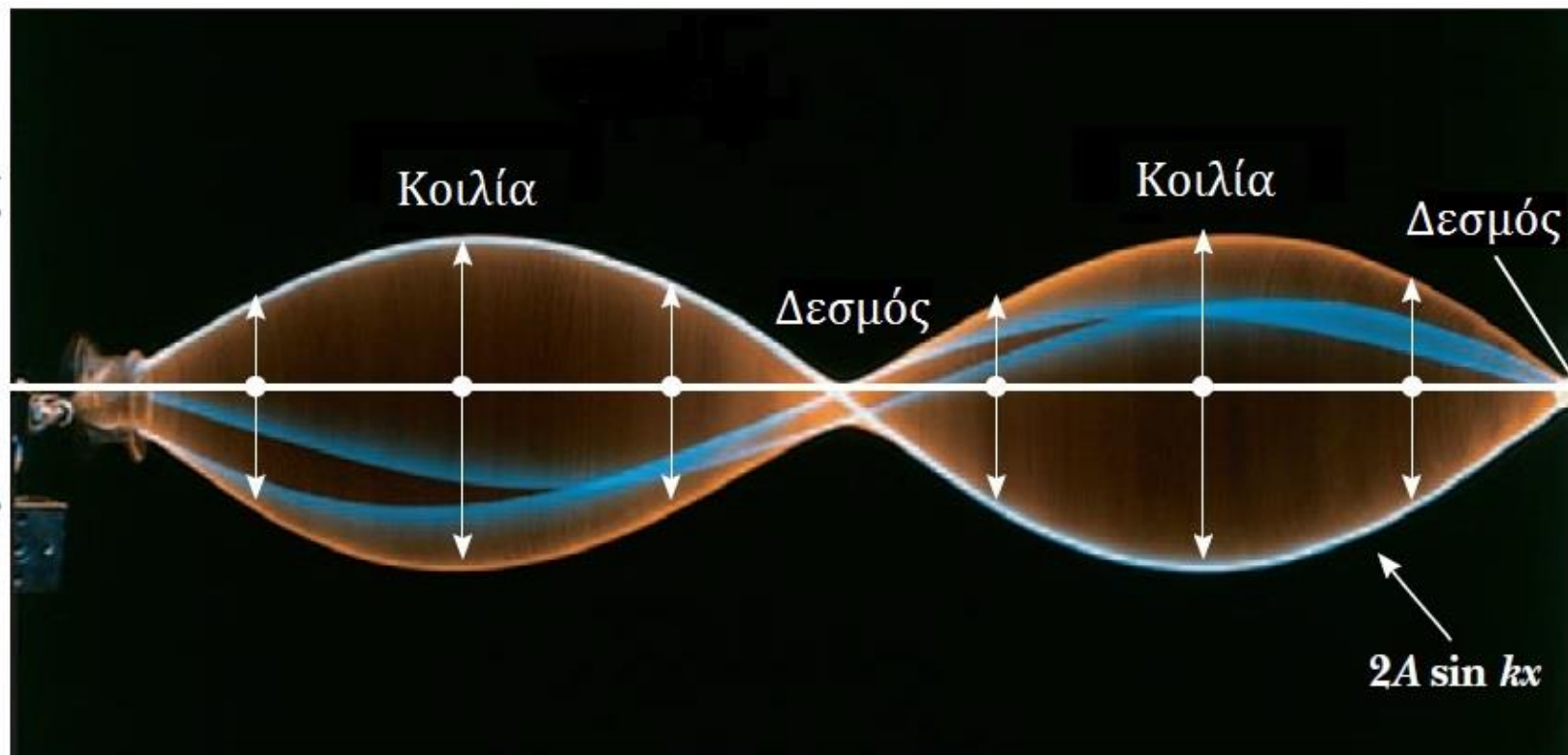
- $kx = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί)**

Στάσιμα Κύματα

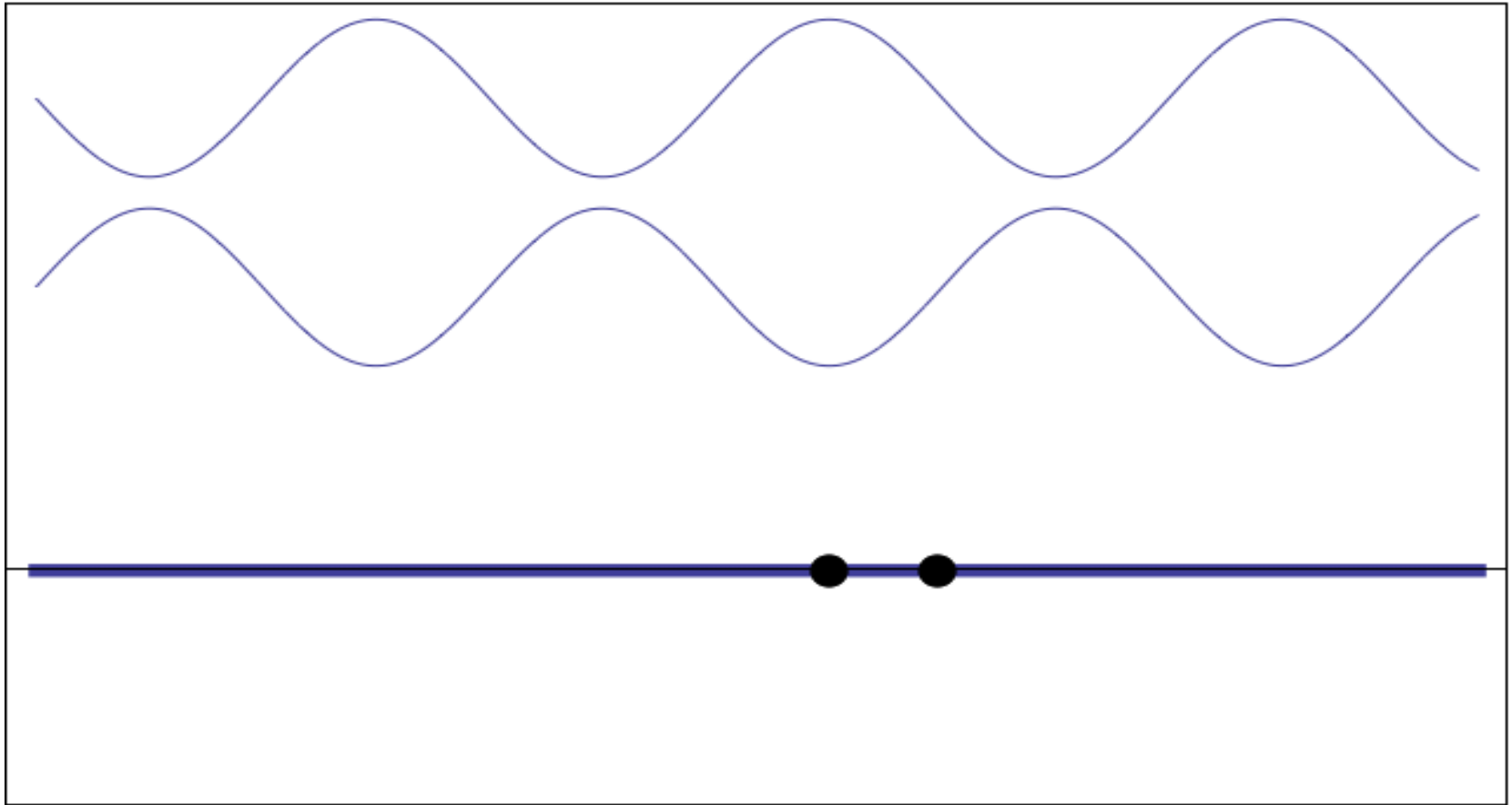
● Στάσιμα κύματα

© 1991 Richard Megna/Fundamental Photographs



Στάσιμα Κύματα

○ Στάσιμα κύματα



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

- Άρα:

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας $= \frac{\lambda}{4}$

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα:

- Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

με x, y να μετρώνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

- Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Στάσιμα Κύματα

Παράδειγμα – Λύση:

- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

- A) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- B) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

$$A) \left. \begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \\ k &= 3, \omega = 2 \\ A &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 8 \sin(3x) \cos(2t)$$

$$\text{αν } x = 2.3 \text{ εκ, τότε } y_{\max} \Big|_{x=2.3 \text{ εκ}} = 8 \sin(3 \cdot 2.3) = 8 \sin(6.9) \approx 4.6 \text{ εκ.}$$

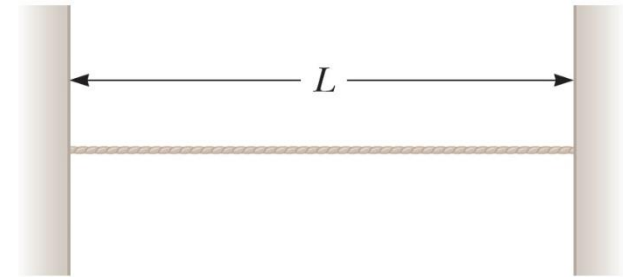
$$B) \text{ Δεσφci: } x_\delta = \frac{n\lambda}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Είνα} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow 3 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{Αντιδεσφci: } x_\alpha = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Αρα } x_\delta = \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{\pi}, x_\alpha = \frac{(2n+1)}{4} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**

- Θεωρήστε το νήμα της εικόνας
 - Χορδή κιθάρας, πιάνου

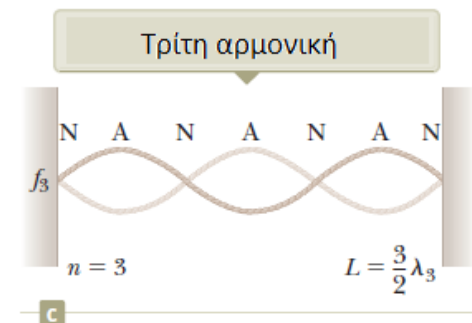
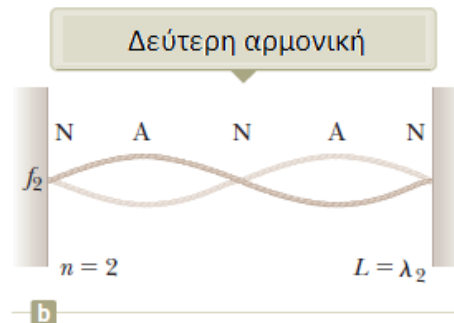
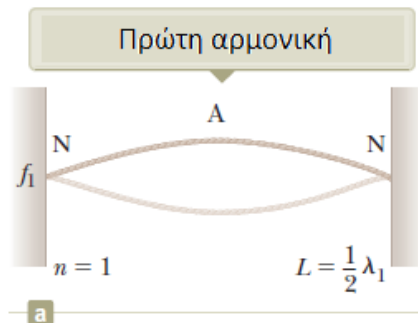


- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα του
 - Άρα το μήκος κύματος είναι προκαθορισμένο
 - Όπως και η συχνότητά του
- Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών ταλαντώσεων στο νήμα, που λέγονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** ή **ιδιομορφές (modes)**
 - Καθεμιά έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα
- Το φαινόμενο όπου μόνο συγκεκριμένες συχνότητες ταλάντωσης οδηγούν σε στάσιμο κύμα λέγεται **κβαντισμός**

Στάσιμα Κύματα

Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Κανονικός τρόπος (mode) n
- Περιγράφεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει μισό μήκος κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό



- Μήκη κύματος

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}$$

- Φυσικές συχνότητες

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, n \in \mathbb{N}$$

- Για νήμα τάσης T και γραμμικής πυκνότητας μ ,

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, n \in \mathbb{N}$$

Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

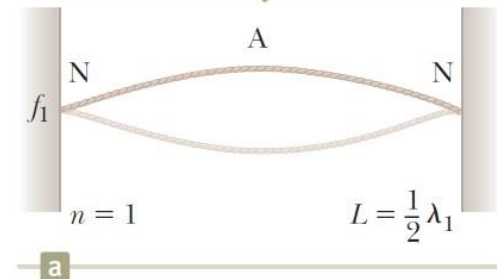
- Κανονικές μορφές (modes) n

- Για $n = 1$, η συχνότητα αυτή λέγεται **θεμελιώδης συχνότητα**

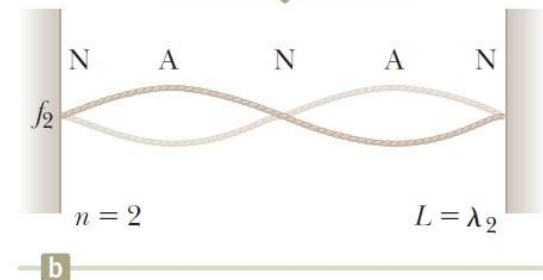
- Οι υπόλοιπες είναι ακέραιες πολλαπλάσιες αυτής

- Συχνότητες κανονικών τρόπων που παρουσιάζουν αυτήν την ακέραια πολλαπλάσια σχέση δημιουργούν **αρμονικές σειρές** και οι τρόποι αυτοί λέγονται **αρμονικές**

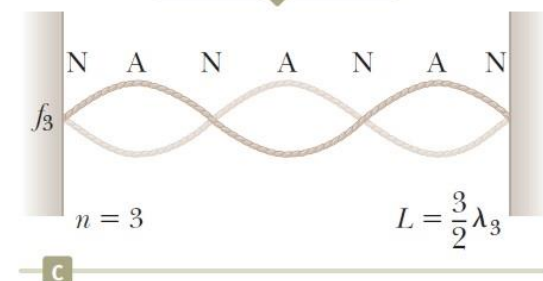
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική



Τρίτη αρμονική

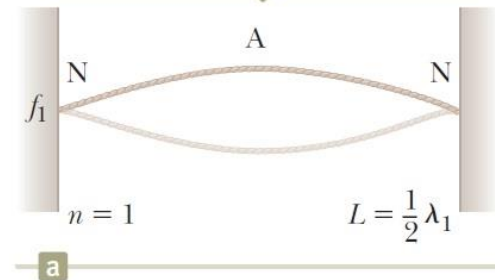


Στάσιμα Κύματα

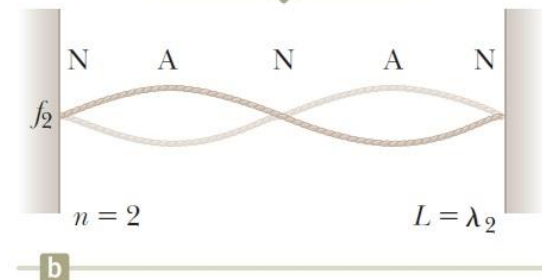
● Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Για να παρουσιαστεί μια μόνο αρμονική, πρέπει να διεγείρουμε το νήμα ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής
 - Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνότητα
 - Δύσκολο να επιτευχθεί για περισσότερες από μια αρμονικές
- Αν διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες θα «επιζήσουν» στο νήμα
 - Αυτά είναι οι αρμονικές ☺

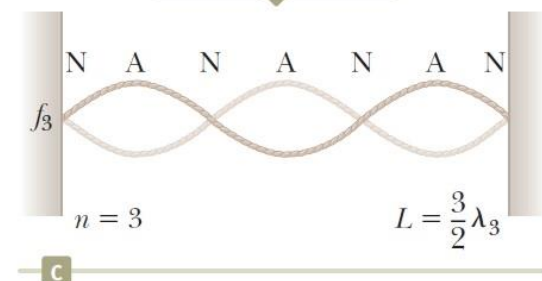
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική



Τρίτη αρμονική

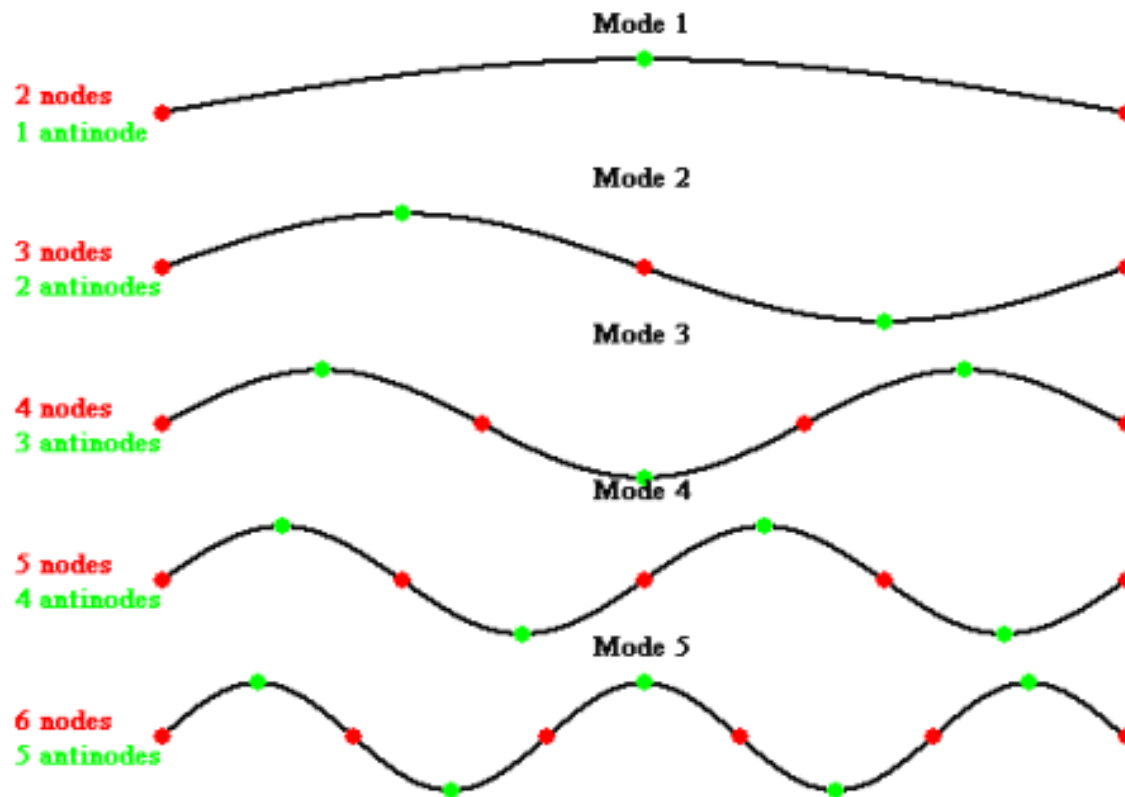


Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Κανονικές μορφές (modes) n

node = δεσμός
antinode = ανυψωτός

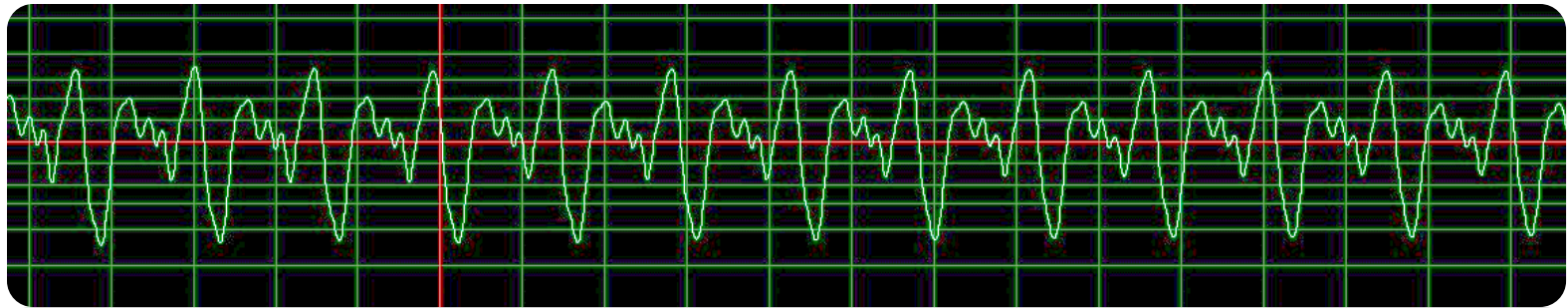


isvr

Στάσιμα Κύματα

- Μη-ημιτονοειδή κύματα

- Πολλά κύματα δεν είναι ημιτονοειδή
- Αν όμως είναι περιοδικά, τότε μπορούν να αναπαρασταθούν ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων
- Παίξιμο μιας νότας στην κιθάρα



- Το άθροισμα αυτό βρίσκεται μέσω μιας τεχνικής που ονομάζεται **Θεώρημα Fourier**
- Το αντίστοιχο άθροισμα ονομάζεται **Σειρά Fourier**

Στάσιμα Κύματα

Θεώρημα Fourier - Σειρά Fourier

- Έστω μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T
- Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_0 t)$$

με

$$A_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Στάσιμα Κύματα

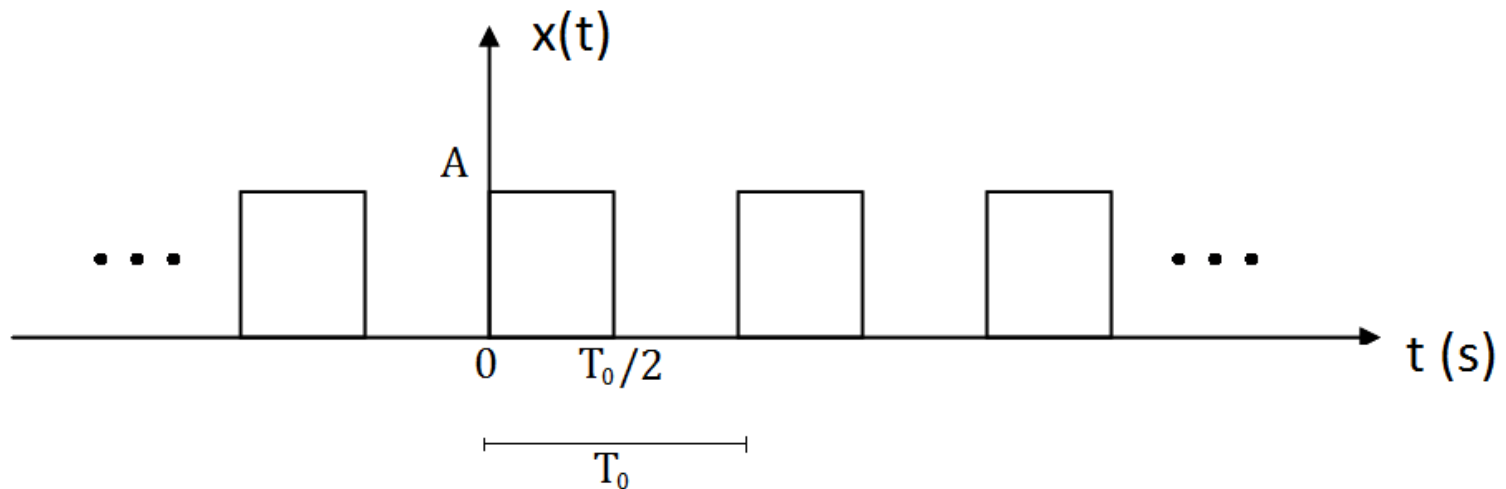
- **Θεώρημα Fourier - Σειρά Fourier**

- Το θεώρημα Fourier απαντά στην ερώτηση:
 - «Πόσα και ποια ημίτονα χρειάζομαι (δηλ. με ποια πλάτη, συχνότητες, και φάσεις) να προσθέσω μεταξύ τους για να παράξω ένα δεδομένο περιοδικό κύμα?»
- Εναλλακτικά:
 - «Ποιες συχνότητες υπάρχουν μέσα σε ένα δεδομένο περιοδικό κύμα, και πόσο ισχυρή είναι η καθεμιά τους?»

Στάσιμα Κύματα

- Παράδειγμα:

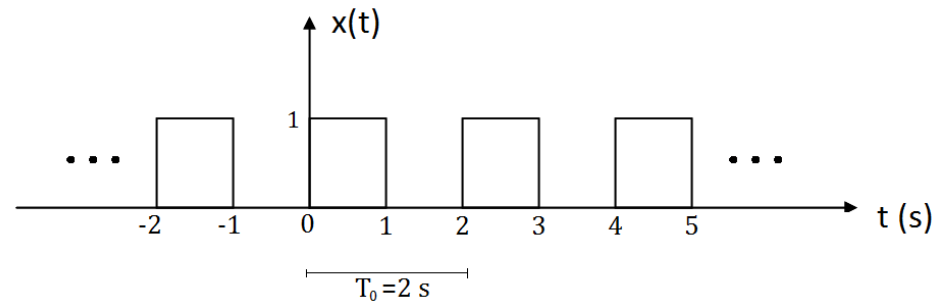
- Έστω το περιοδικό σήμα του σχήματος.



- Μπορείτε να βρείτε ποια ημίτονα και συνημίτονα πρέπει να προσθέσουμε για να το συνθέσουμε;

Στάσιμα Κύματα

◉ Παράδειγμα - Λύση:



$$\begin{aligned} \text{Αρχικά, } \beta_0 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A dt = \frac{2A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} dt = \frac{2A}{T_0} t \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} = A, \end{aligned}$$

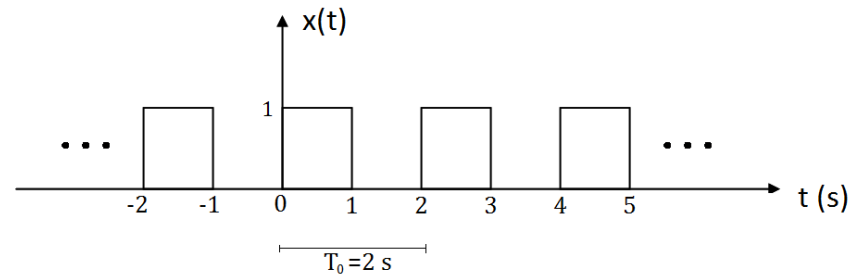
$$\text{άρα } \frac{\beta_0}{2} = \frac{A}{2}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης, } A_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A \sin(n\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{2A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{T_0} \left(-\frac{1}{n\omega_0} \right) (\cos(n\omega_0 t)) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} = \end{aligned}$$

Στάσιμα Κύματα

○ Παράδειγμα - Λύση:

$$\begin{aligned} * \omega_0 &= \frac{2\pi}{T_0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_0 T_0 &= 2\pi \end{aligned}$$



$$= -\frac{2A}{n\omega_0 T_0} \left(\cos(n\omega_0 \frac{T_0}{2}) - \cos 0 \right) \stackrel{*}{=} -\frac{2A}{2\pi n} \left(\cos(n \frac{2\pi}{2}) - 1 \right) =$$

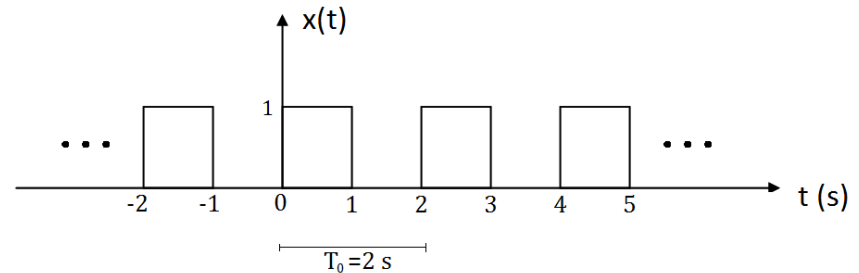
$$= \frac{A}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)). \text{ Όμως } \cos(\pi n) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Άρα}$$

$$A_n = \frac{A}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{2A}{\pi n}, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα - Λύση:

$$\ast \underline{\omega_0 T_0 = 2\pi}$$



$$\text{Τέλος, } B_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt =$$

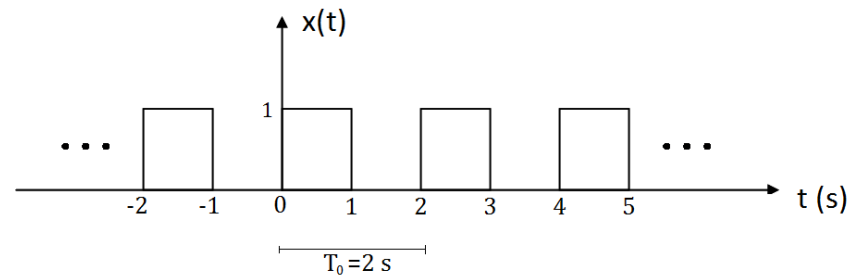
$$= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{T_0} \left(\frac{1}{n\omega_0} \right) \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{2A}{2\pi n} \left(\sin\left(n \frac{T_0}{2} \omega_0\right) - \sin 0 \right) = \frac{A}{\pi n} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{2}\right) - 0 \right) =$$

$$= \frac{A}{\pi n} \left(\sin(\pi n) \right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Στάσιμα Κύματα

Παράδειγμα - Λύση:



Άρα ζεστικά,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 \cdot \cos(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)\omega_0 t). \end{aligned}$$

Οπότε το $x(t)$ αποτελείται από άθροισμα ημιτόνων πλάτους

$$A_n = \frac{2A}{\pi(2n-1)} \text{ και συχνότητες } (2n-1)\omega_0.$$

Στάσιμα Κύματα

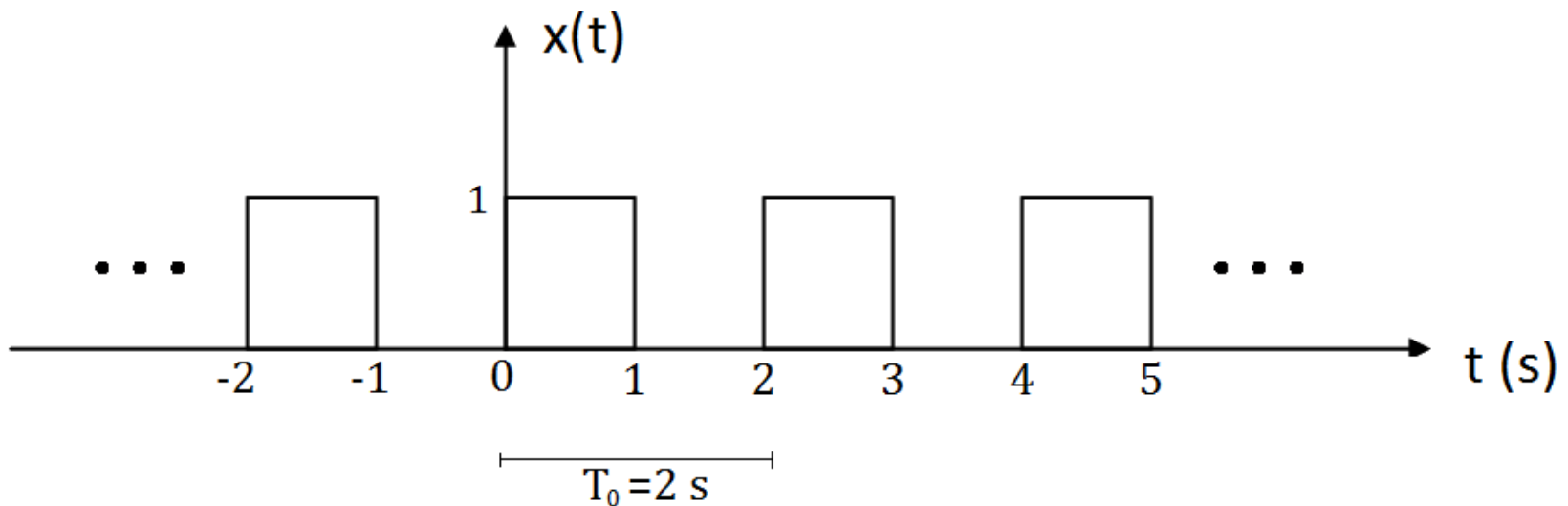
Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Ανάλυση

- Ας βάλουμε αριθμητικά δεδομένα κι ας γράψουμε ένα πρόγραμμα που θα φτιάξει αυτά τα ημίτονα για εμάς

- $T_0 = 2 \text{ s}$

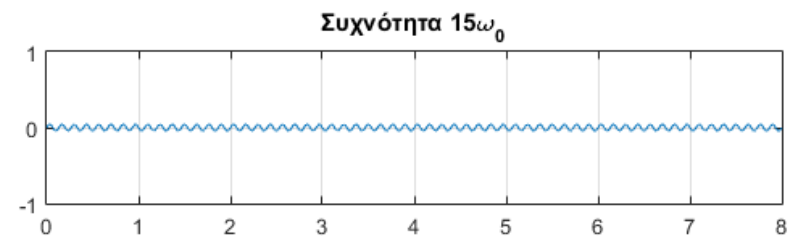
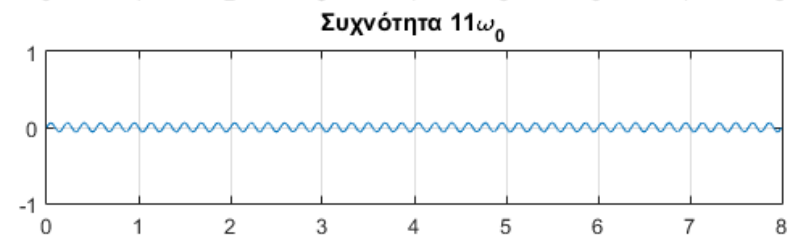
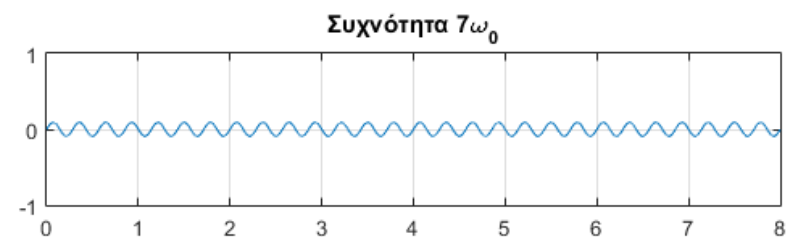
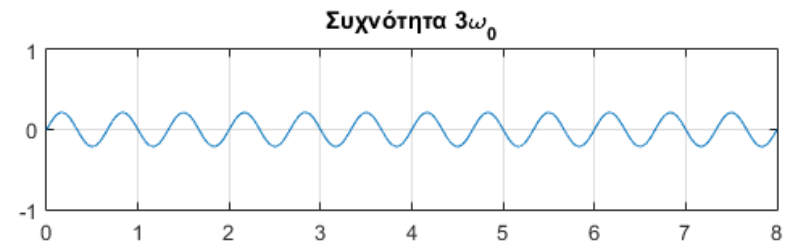
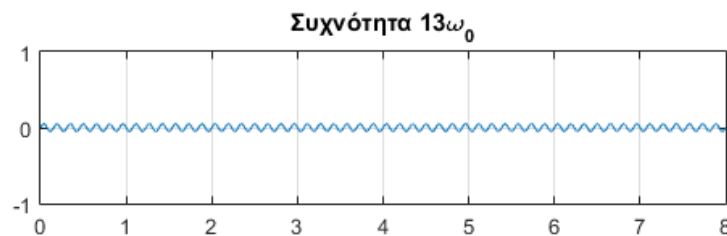
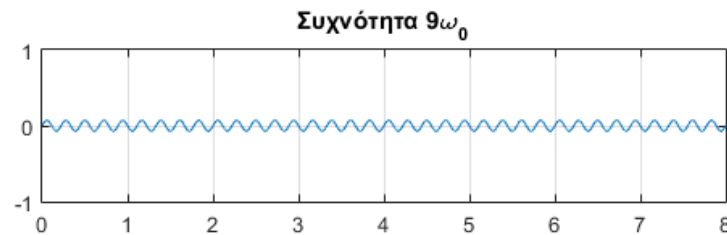
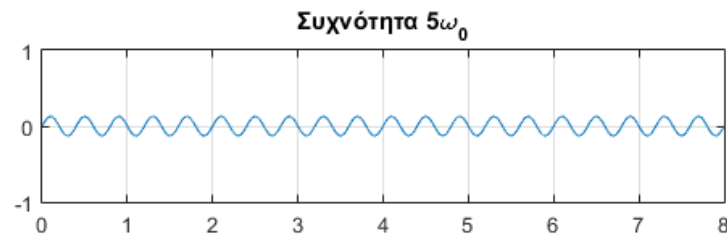
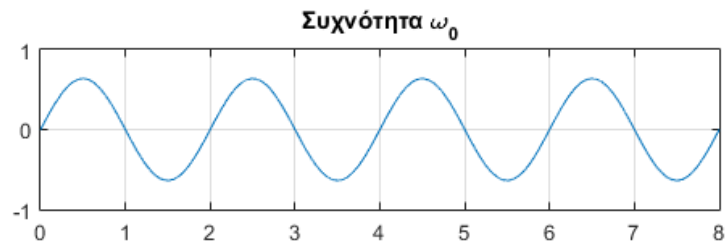
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$

- $A = 1$



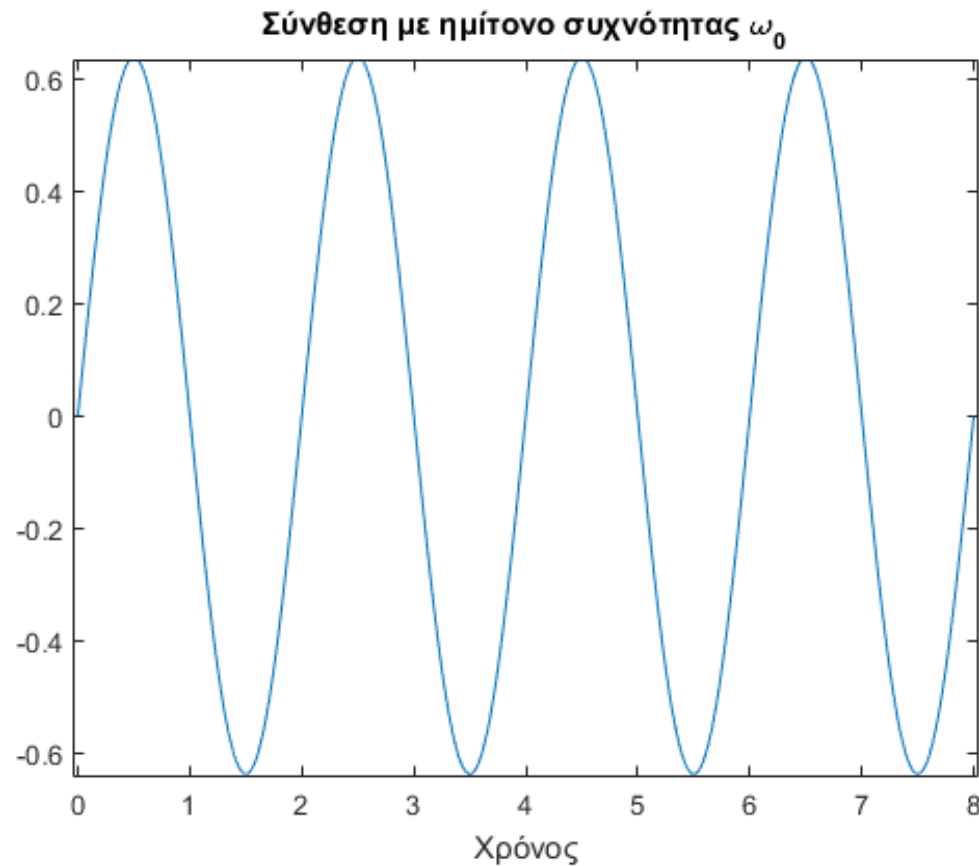
Στάσιμα Κύματα

Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Ανάλυση



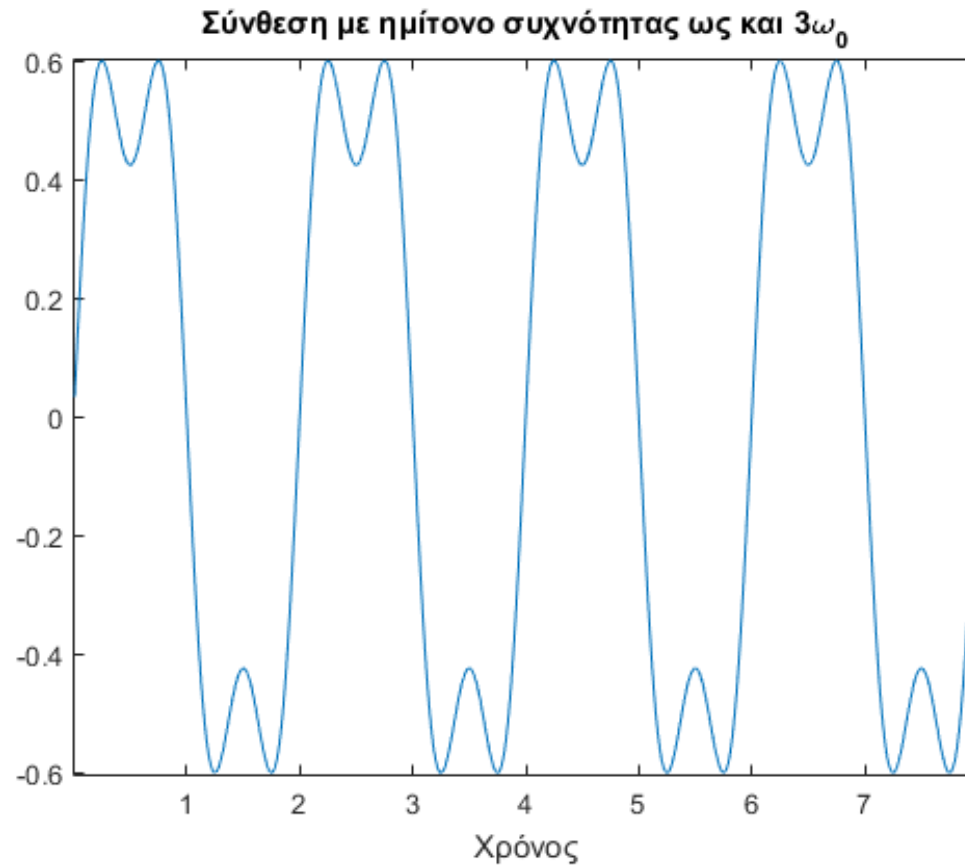
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



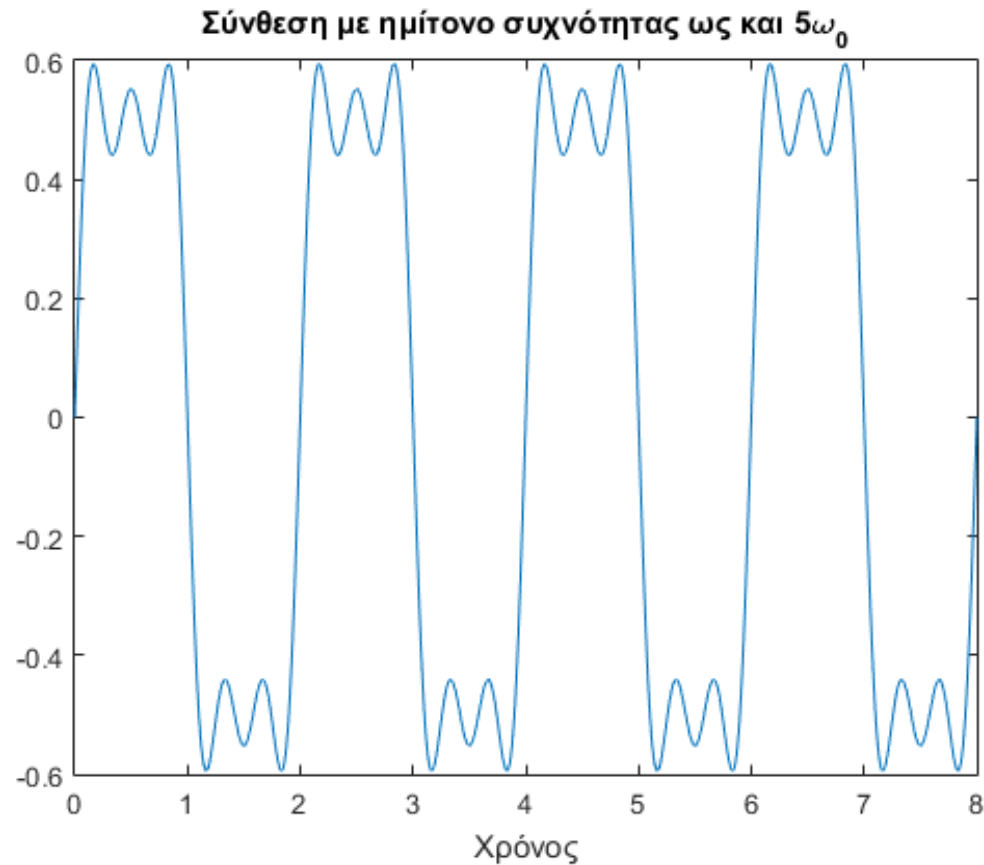
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



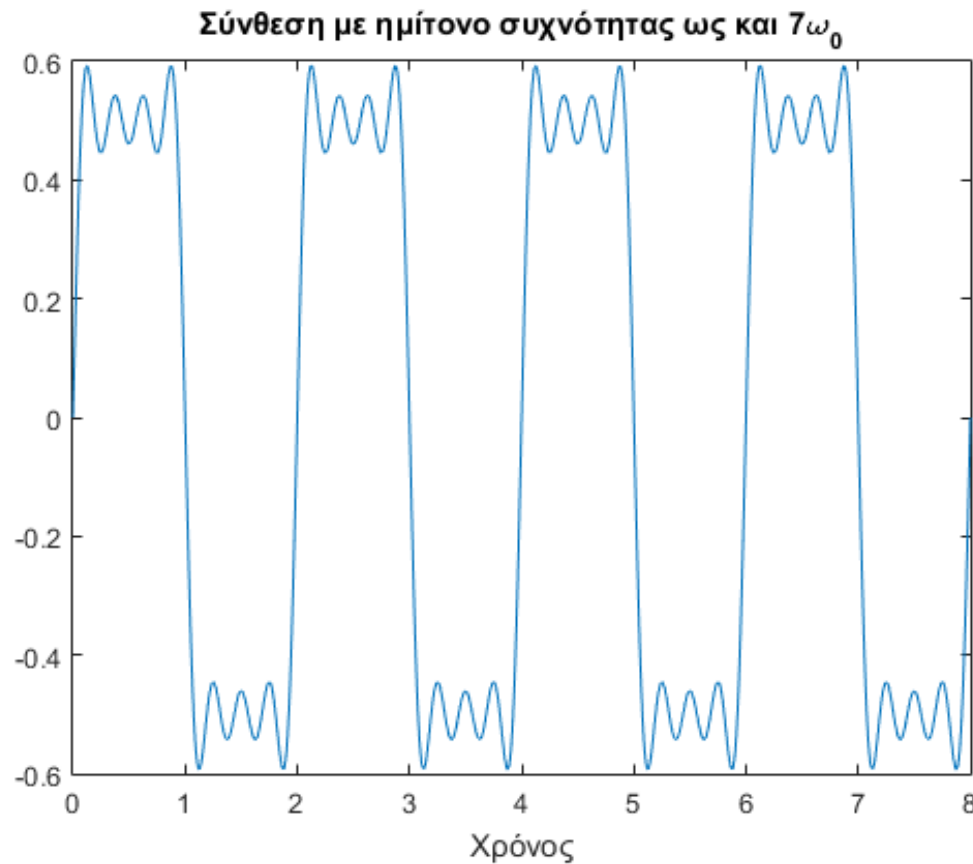
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



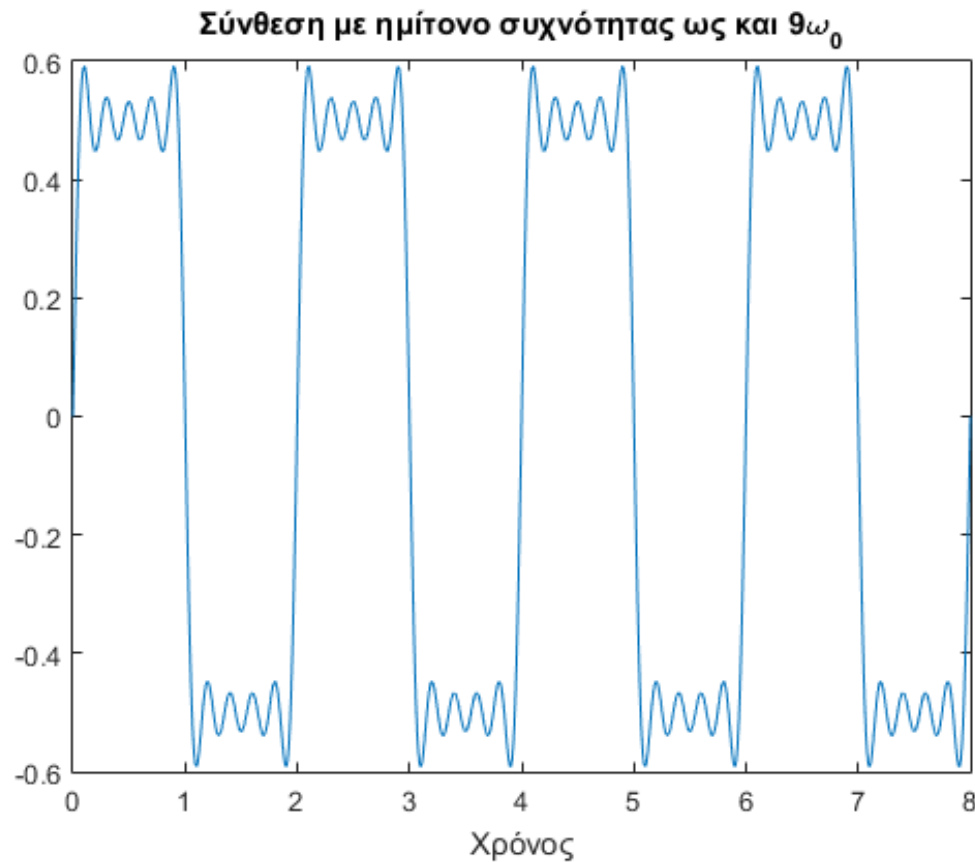
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



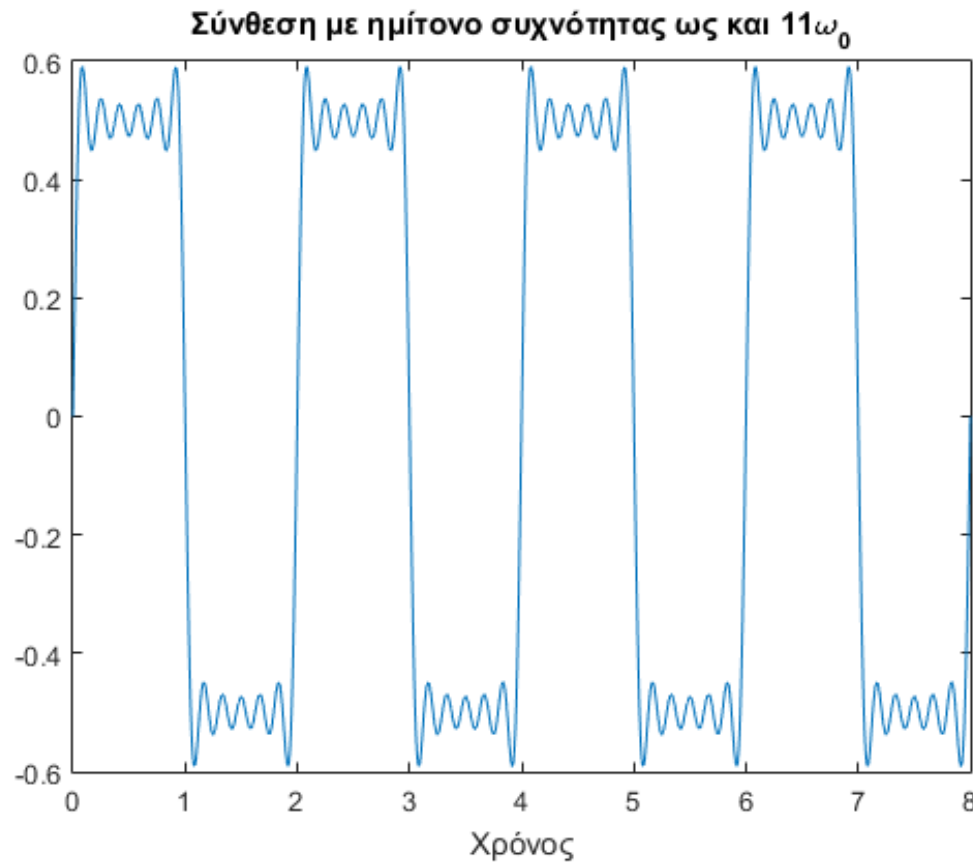
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



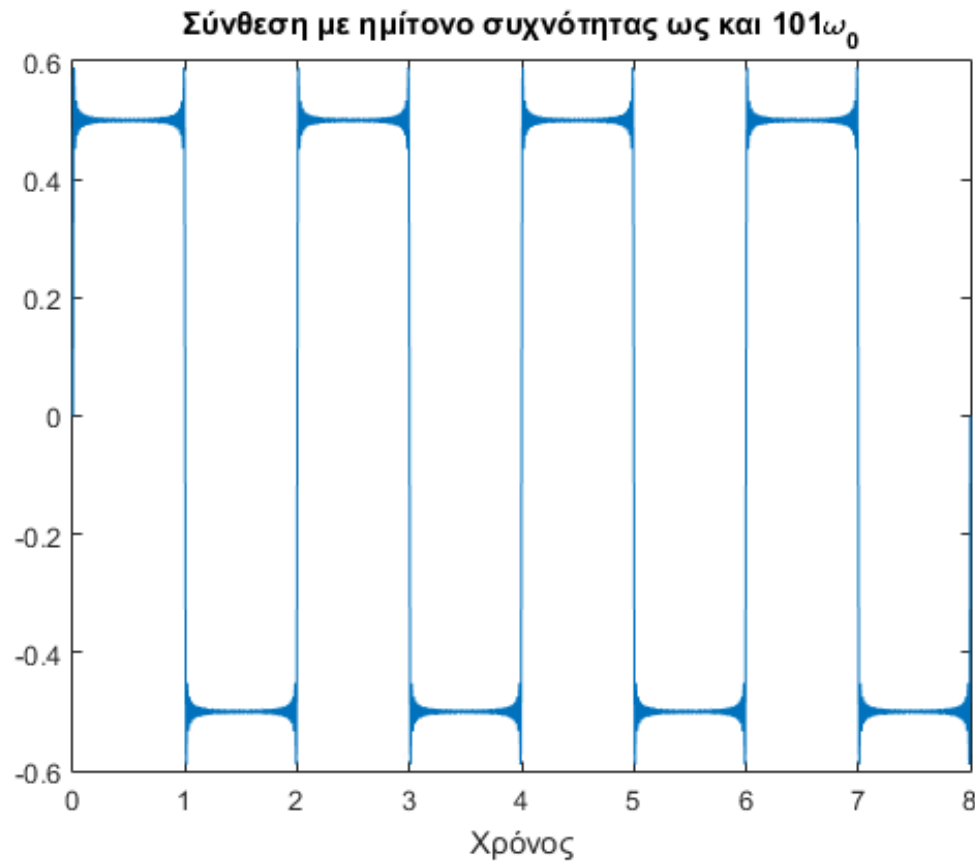
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



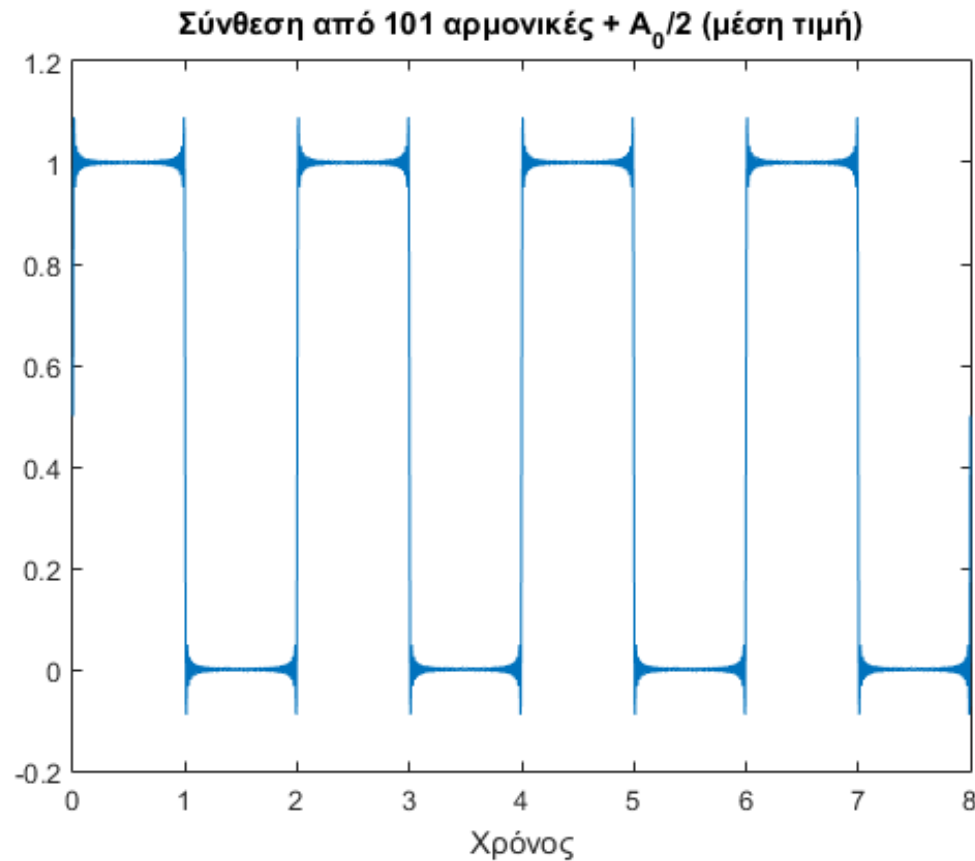
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



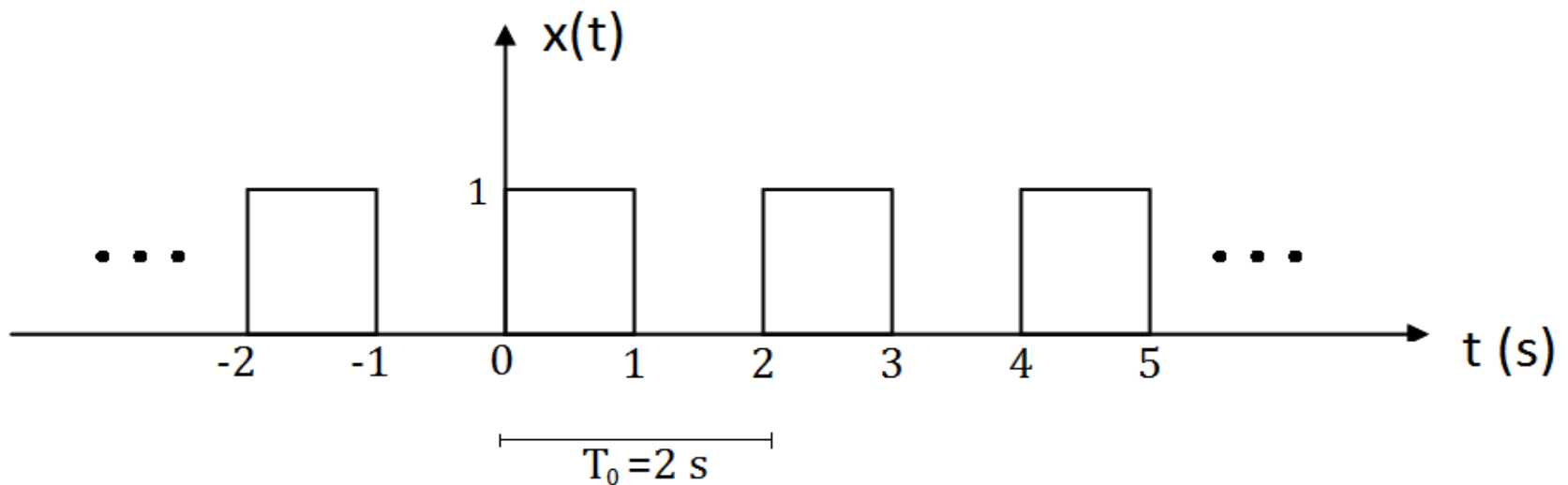
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



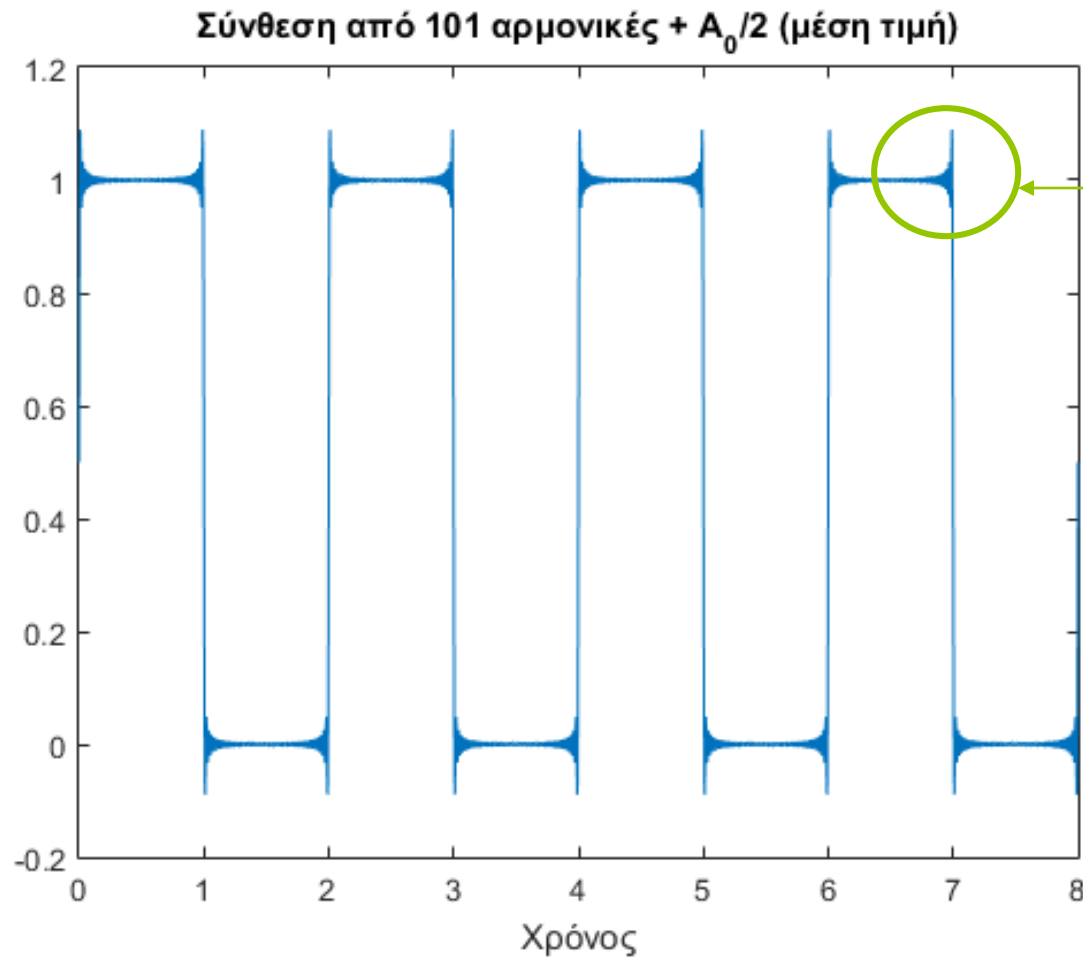
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση – Σύγκριση



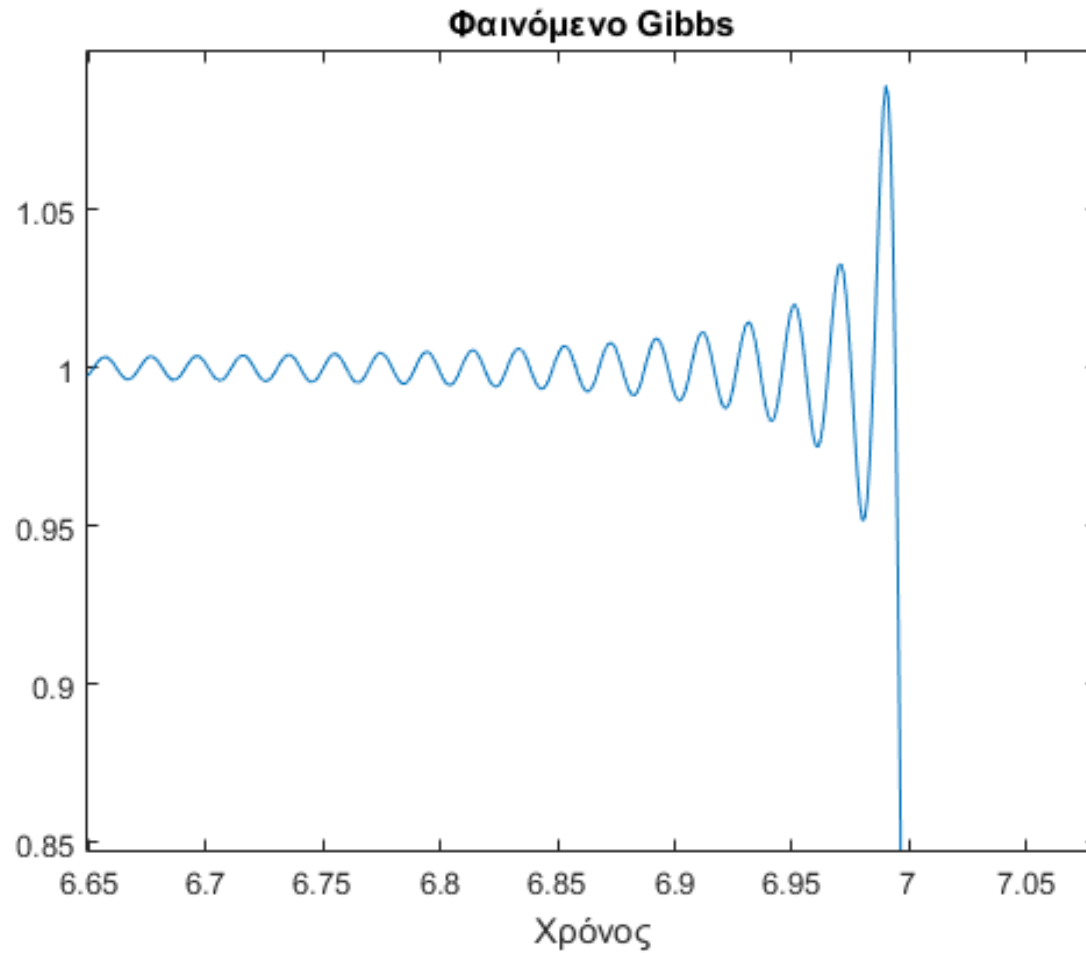
Στάσιμα Κύματα

- Φαινόμενο Gibbs



Στάσιμα Κύματα

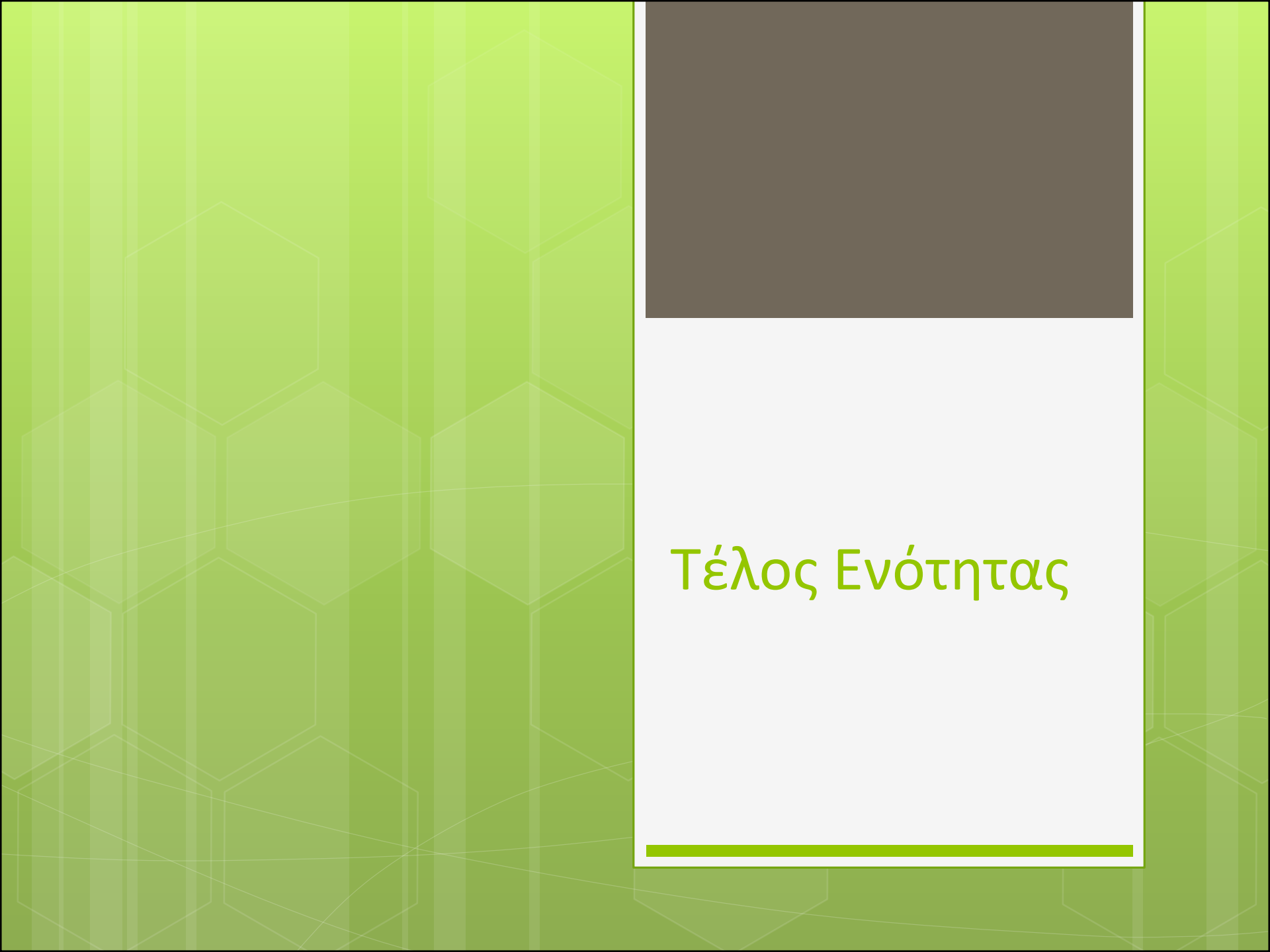
- Φαινόμενο Gibbs



Στάσιμα Κύματα

◉ Φαινόμενο Gibbs

- ◉ Ανακαλύφθηκε το 1848 από τον H. Wilbraham
 - ◉ ... και ξανά, το 1899 από τον J. Gibbs
- ◉ Περιγράφει το πώς συμπεριφέρεται μια σειρά Fourier στα σημεία ασυνέχειας
- ◉ Προκύπτει από το ότι δεν μπορεί να αναπαρασταθεί μια ασυνέχεια από ένα άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- ◉ Το φαινόμενο είχε παρατηρηθεί και από φυσικούς, αλλά θεωρήθηκε ως σφάλμα λόγω κακών συσκευών μετρήσεων...



Τέλος Ενότητας