Φυσική για Μηχανικούς

Μαγνητισμός

Μαγνητικά Πεδία

Εικόνα: Το Σέλας συμβαίνει όταν υψηλής ενέργειας, φορτισμένα σωματίδια από τον Ήλιο ταξιδεύουν στην άνω ατμόσφαιρα της Γης λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού της πεδίου.

Εικόνα: Το Σέλας συμβαίνει όταν υψηλής ενέργειας, φορτισμένα σωματίδια από τον Ήλιο ταξιδεύουν στην άνω ατμόσφαιρα της Γης λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού της πεδίου.

Φυσική για Μηχανικούς

Μαγνητισμός

Μαγνητικά Πεδία

Μαγνητικά Πεδία (επανάληψη...)

- **Μαγνητικά Πεδία**
- Μαγνητική δύναμη

$$\boxed{\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

με $\vec{v}$ την ταχύτητα του φορτίου q και $\vec{B}$ το μαγνητικό πεδίο

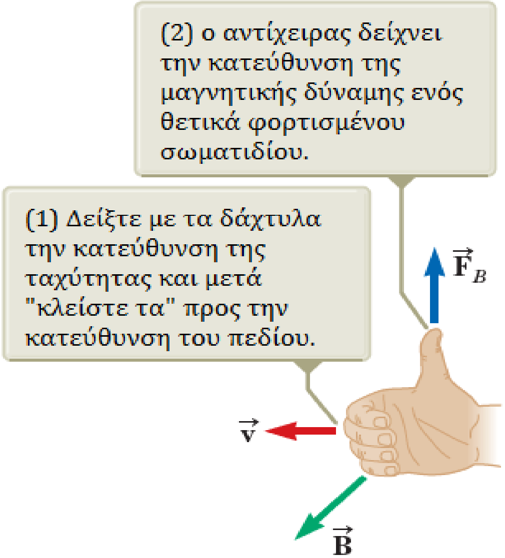
- Μέτρο της μαγνητικής δύναμης

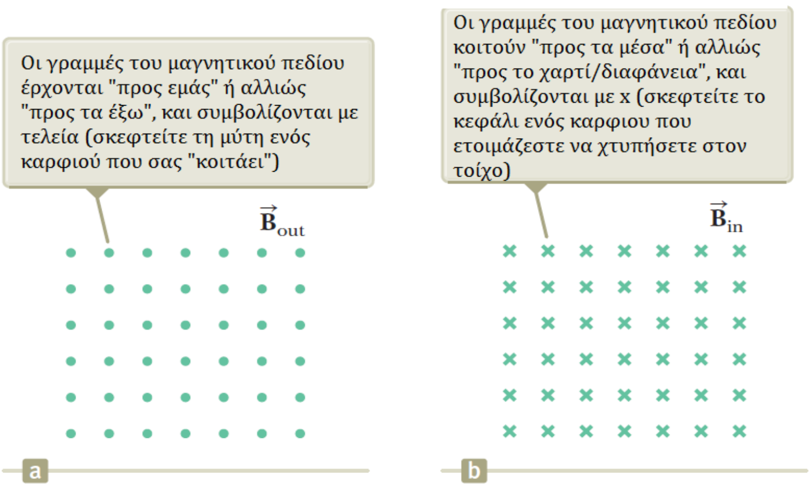
$$\boxed{\mathrm{F}_B = |q|vB\sin(\theta)}$$

με θ τη γωνία μεταξύ $\vec{v}, \vec{B}$

- Μονάδα μέτρησης του μαγνητικού πεδίου:

  1 T (Tesla)





Μαγνητικά Πεδία (επανάληψη...)

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Ομογενές μαγνητικό πεδίο
  - Ταχύτητα κάθετη στο διάνυσμα του πεδίου
  - Ομαλή κυκλική κίνηση!
  - Ακτίνα

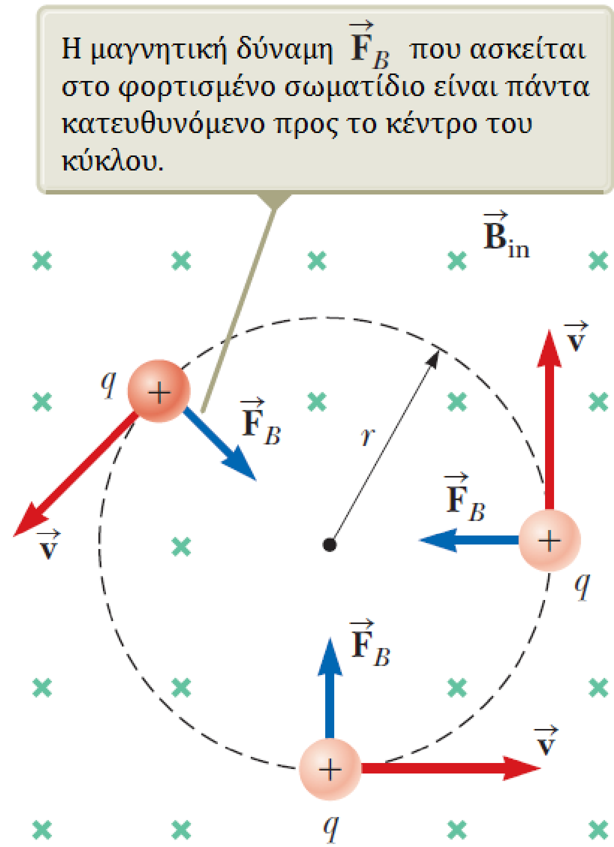
$$\boxed{r = \frac{mv}{qB}}$$

  - Γωνιακή ταχύτητα

$$\boxed{\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}}$$

  - Περίοδος

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}}$$



Μαγνητικά Πεδία

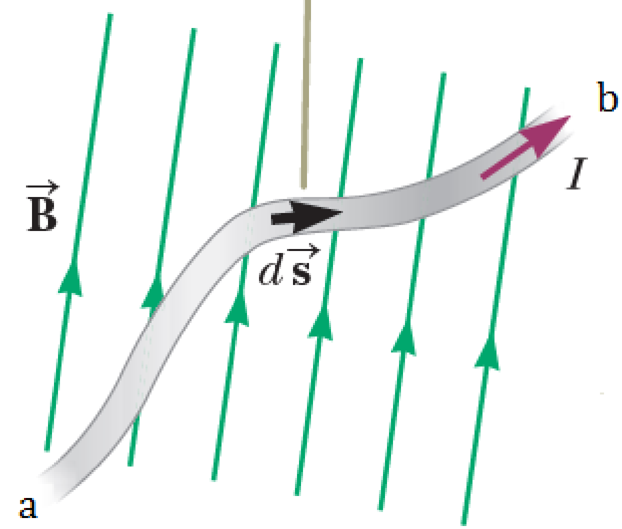
- **Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό**
  - Έστω ένα πολύ μικρό τμήμα αγωγού μήκους ds
  - Τότε η (πολύ μικρή) μαγνητική δύναμη που εγείρεται σε αυτό το τμήμα είναι

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

- Συνολικά

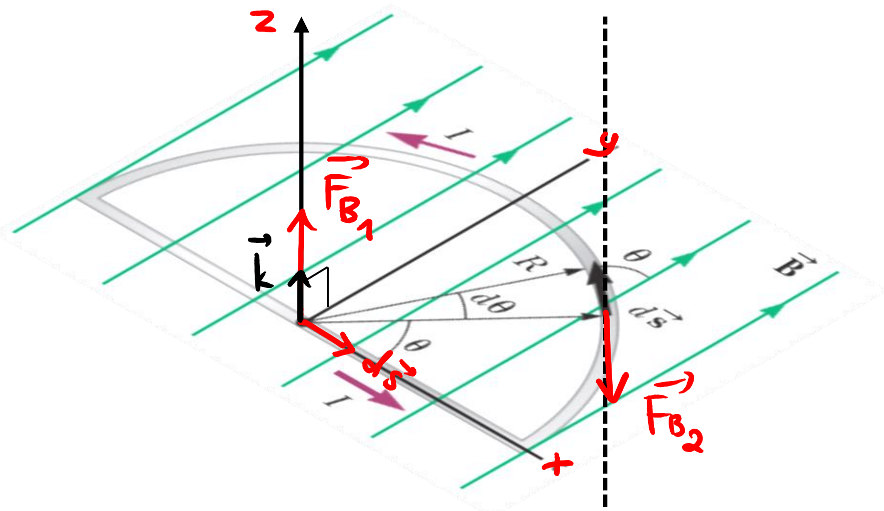
$$\boxed{\vec{F}_B = I \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B}}$$

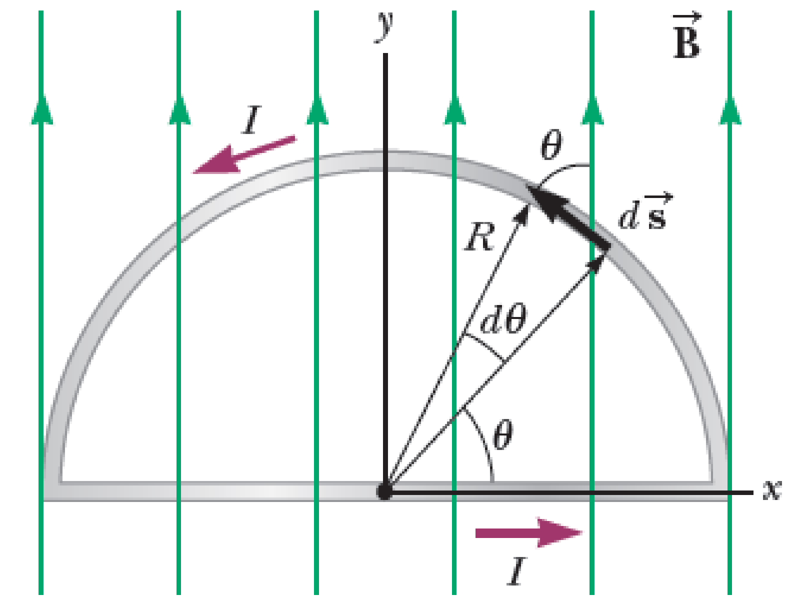
Η μαγνητική δύναμη σε ένα τυχαίο τμήμα $d\vec{\mathbf{s}}$ είναι $I\, d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$ με κατεύθυνση προς τα έξω (έξω από τη σελίδα/διαφάνεια).



Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
- Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy (Σχήμα). Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
  A) ευθύγραμμο τμήμα
  B) καμπύλο τμήμα του καλωδίου

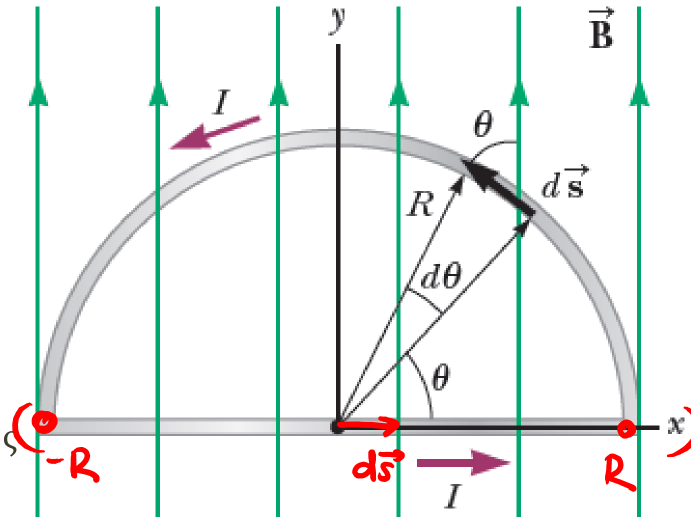




Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy. Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
  A) ευθύγραμμο τμήμα



Γνωρίζουμε ότι $d\vec{F}_{B_1} = I\cdot d\vec{s}\times\vec{B} \Rightarrow dF_{B_1} = I\cdot ds\cdot B\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = I\cdot ds\cdot B$

$= I\cdot dx\cdot B$ (1)

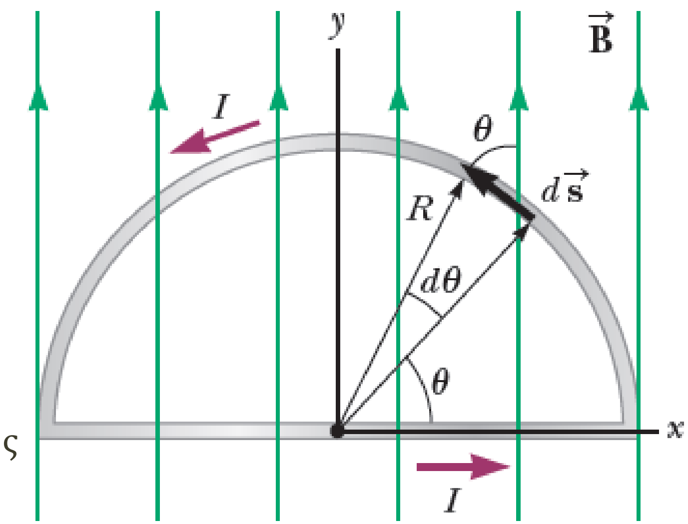
Για όλον τον ευθύγραμμο αγωγό, θα είναι $\vec{F}_{B_1} = \int d\vec{F}_{B_1} \Rightarrow F_{B_1} = \int dF_{B_1} =$

$\overset{(1)}{=} \int I\cdot dx\cdot B = IB\int_{-R}^{R} dx = IBx\Big]_{-R}^{R} = IB(R-(-R)) = 2IBR.$

Οπότε συνολικά, $\vec{F}_{B_1} = 2IBR\cdot\vec{k}$, με $\vec{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα του z.

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy. Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
    B) καμπύλο τμήμα του καλωδίου



Γνωρίζουμε ότι $d\vec{F}_{B_2} = I\cdot d\vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow dF_{B_2} = I\cdot ds\cdot B\cdot \sin\theta$

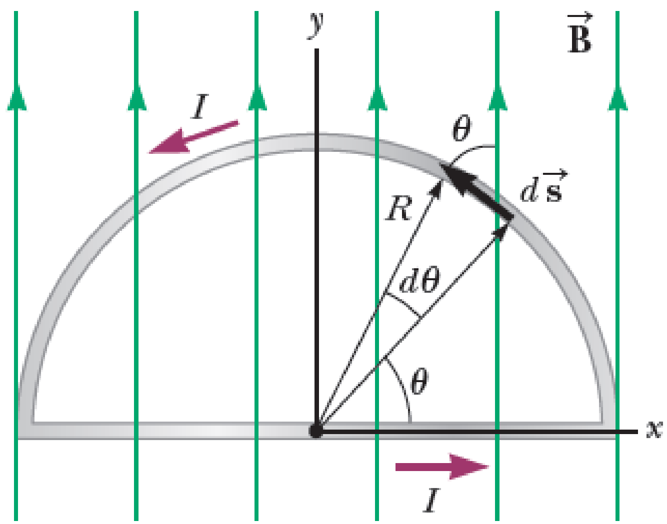
Συνολικά, $\vec{F}_{B_2} = \int d\vec{F}_{B_2} \Rightarrow F_{B_2} = \int dF_{B_2} = \int I\, ds\, B \sin\theta$

$= IB\int ds\cdot \sin\theta$, $s = R\theta$ $= IB\int R\,d\theta\cdot\sin\theta = IBR\int_0^{\pi} \sin\theta\cdot d\theta = IBR(-\cos\theta)\Big]_0^{\pi} =$

$= IBR(-\cos\pi - (-\cos 0)) = IBR(1+1) = 2IBR$. Άρα $\vec{F}_{B_2} = -2IBR\cdot\vec{k}$.

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy. Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
    B) καμπύλο τμήμα του καλωδίου



Παρατηρήσεις:

1. **$|\vec{F}_{B_1}| = |\vec{F}_{B_2}|$: η μαγνητική δύναμη σε καμπύλο ρευματοφόρο αγωγό εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου είναι ίδια σε μέτρο με αυτή ενός ευθύγραμμου αγωγού ανάμεσα στα ίδια άκρα.**
2. **$\vec{F}_{B_1} + \vec{F}_{B_2} = 0$: η συνολική μαγνητική δύναμη επάνω σε κλειστό βρόχο ρεύματος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική.**

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Ως τώρα θεωρήσαμε ότι το μαγνητικό πεδίο «υπήρξε με κάποιο τρόπο»
- Στη συνέχεια θα δείξουμε την προέλευση του μαγνητικού πεδίου: τα κινούμενα φορτία (!)
- Πολλοί σημαντικοί νόμοι:
  - Νόμος των Biot-Savart
  - Νόμος του Ampere
  - Νόμος του Gauss για το μαγνητισμό
- Θα αξιοποιήσουμε ξανά τις συμμετρίες των προβλημάτων

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Jean-Baptiste Biot – Felix Savart : περιέγραψαν τη δύναμη που εγείρεται από ηλεκτρικό ρεύμα επάνω σε έναν κοντινό μαγνήτη
- Τα πειράματά τους κατέληξαν σε μια μαθηματική έκφραση που δίνει το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου με όρους του ρεύματος, το οποίο παράγει το πεδίο (!)
- Ξεκίνησαν από ένα απειροστά μικρό τμήμα ds καλωδίου σταθερού ρεύματος που παράγει μαγνητικό πεδίο dB σε ένα σημείο P
  - Έχουμε ακολουθήσει τη μέθοδό τους πολλές φορές ☺

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Επιγραμματικά, έδειξαν ότι:
  1. Το διάνυσμα d$\vec{B}$ είναι κάθετο τόσο στο d$\vec{s}$ (που δείχνει στην κατεύθυνση του ρεύματος) όσο και στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\mathbf{r}}$ που κατευθύνεται από το d$\vec{s}$ στο σημείο P
  2. Το μέτρο του d$\vec{B}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο του r^2, με r την απόσταση από το d$\vec{s}$ στο P
  3. Το μέτρο του d$\vec{B}$ είναι ανάλογο του ρεύματος I και του μέτρου ds του τμήματος μήκους d$\vec{s}$
  4. Το μέτρο του d$\vec{B}$ είναι ανάλογο του $\sin(\theta)$, με θ τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων d$\vec{s}$ και $\vec{\mathbf{r}}$

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{s} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^2}$$

- Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο ***νόμος των Biot-Savart***
- Το μ_0 ονομάζεται *διαπερατότητα του ελεύθερου χώρου* και έχει τιμή $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathrm{Tm/A}$
- Γενικεύοντας την παραπάνω σχέση για την εύρεση του συνολικού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ σε ένα σημείο του χώρου από ένα ρεύμα πεπερασμένου μεγέθους, πρέπει να αθροίσουμε όλα τα $d\vec{B}$.

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Ολοκληρώνοντας λοιπόν, έχουμε

$$\boxed{\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^2}}$$

με το ολοκλήρωμα να λαμβάνεται σε όλη την κατανομή ρεύματος

- Ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις και στη συνέχεια μερικά παραδείγματα.

Μαγνητικά Πεδία

- Ας περιγράψουμε τις (ενδιαφέρουσες) ομοιότητες και διαφορές μεταξύ μαγνητικού πεδίου «σημειακού ρεύματος» και ηλεκτρικού πεδίου σημειακού φορτίου

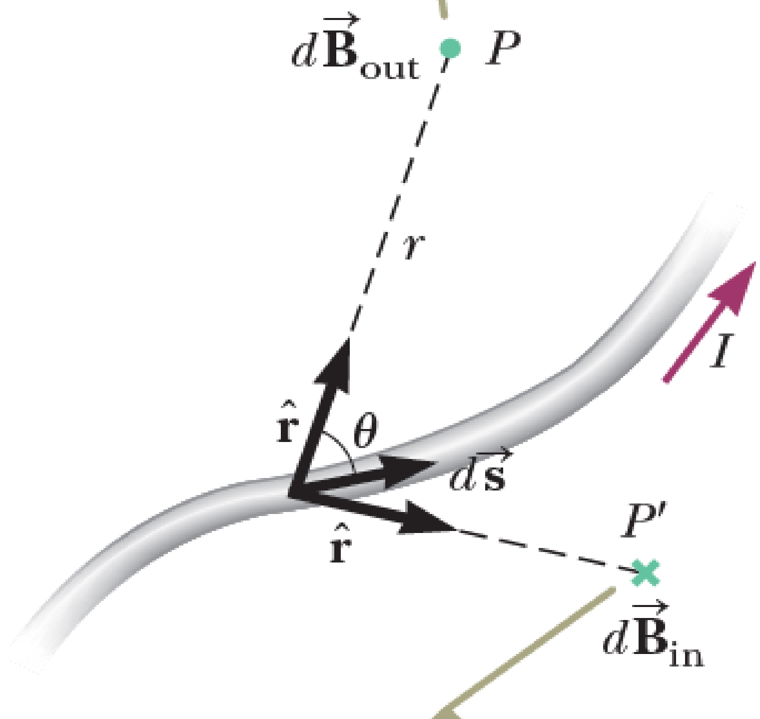
1. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο P είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης r από αυτό. Το ίδιο συνέβαινε και στο ηλεκτρικό πεδίο.
2. Οι κατευθύνσεις των πεδίων είναι πολύ διαφορετικές:
   a) Ηλεκτρικό πεδίο: ακτινική διεύθυνση
   b) Μαγνητικό πεδίο: κάθετο στο «σημειακό ρεύμα» και στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\mathbf{r}}$ που «δείχνει» προς το σημείο P
3. Ένα «σημειακό ρεύμα» δεν έχει τόσο νόημα όσο ένα σημειακό φορτίο
   - Απαιτείται κύκλωμα για να υπάρχει ρεύμα

Μαγνητικά Πεδία

- Βρείτε το διάνυσμα $d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{r}}$ στα δυο σημεία!

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$$

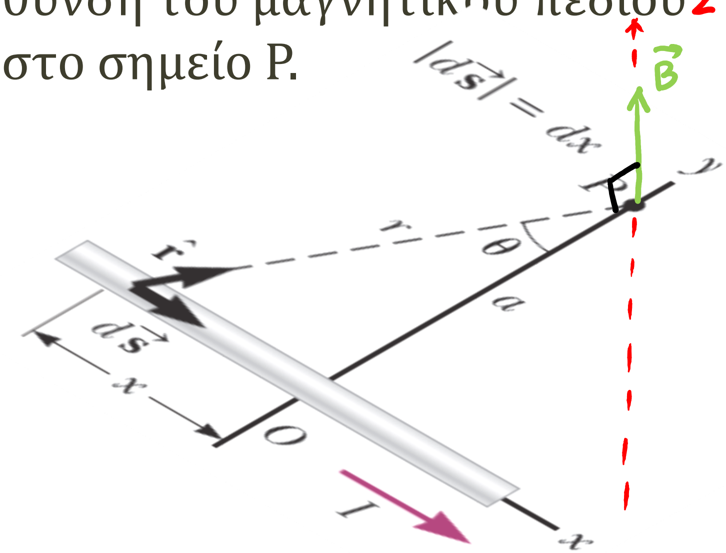
Γιατί η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P είναι προς τα έξω;

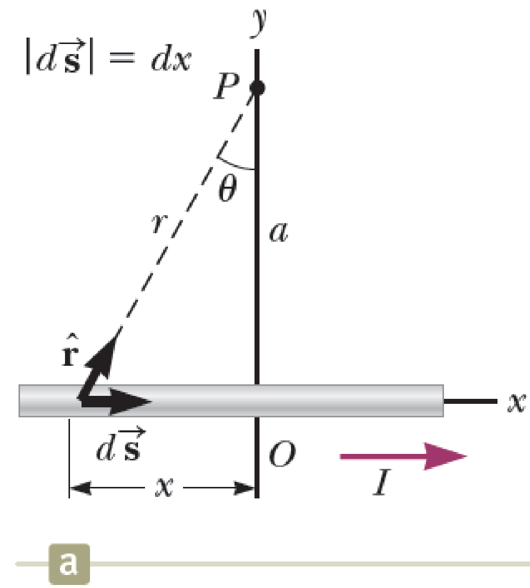


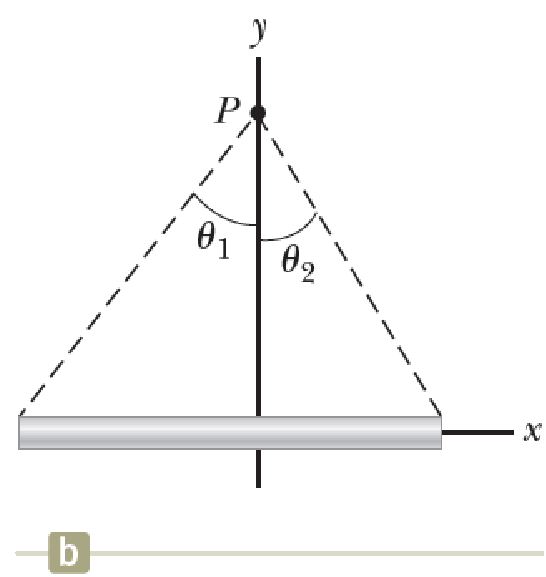
Γιατί η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P' είναι προς τα μέσα;

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.



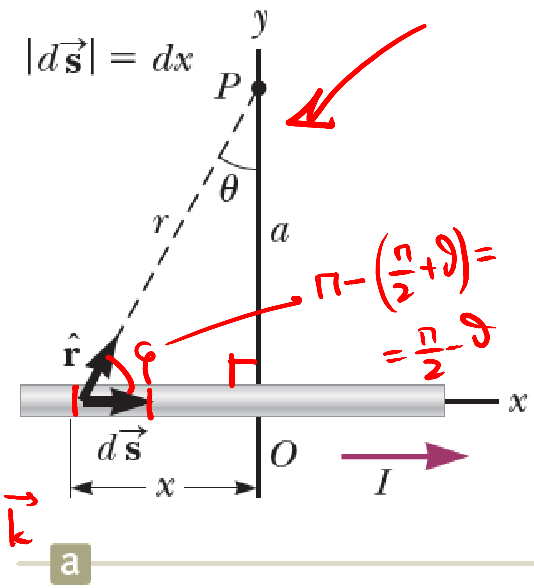




Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.



Είναι $d\vec{s}\times\hat{r} = |d\vec{s}\times\hat{r}|\cdot\vec{k} = ds\cdot|\hat{r}|\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\vec{k}$

$= ds\cdot\cos\theta\cdot\vec{k}$. Παρατηρώ ότι $ds = dx$, άρα

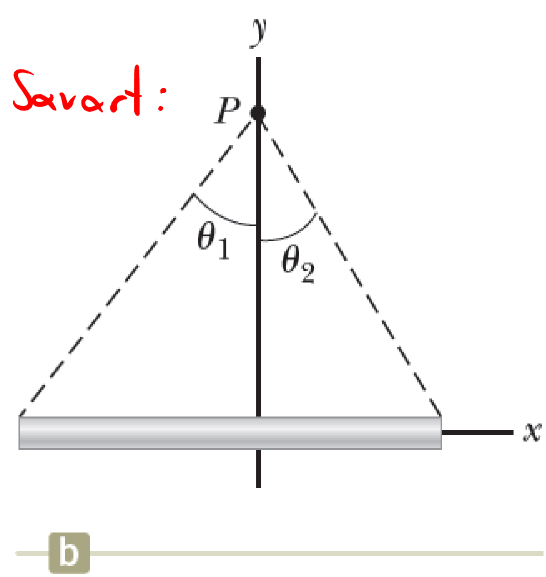
$d\vec{s}\times\hat{r} = dx\cdot\cos\theta\cdot\vec{k}$. Από τον νόμο των Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{dx\cdot\cos\theta}{r^2}\cdot\vec{k}. \quad (1)$$

Είναι $r = \frac{a}{\cos\theta} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$ (2).

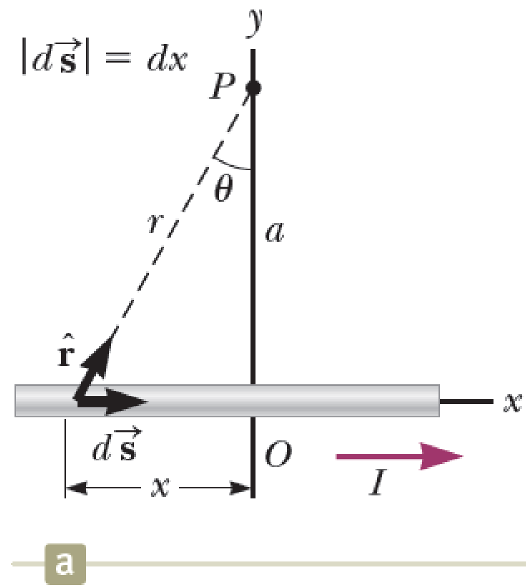
Είναι $\tan\theta = \frac{-x}{a} \Rightarrow x = -a\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} =$

$= -\frac{d}{d\theta}a\tan\theta = -a\frac{d}{d\theta}\tan\theta = -a\frac{1}{\cos^2\theta}$



Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.



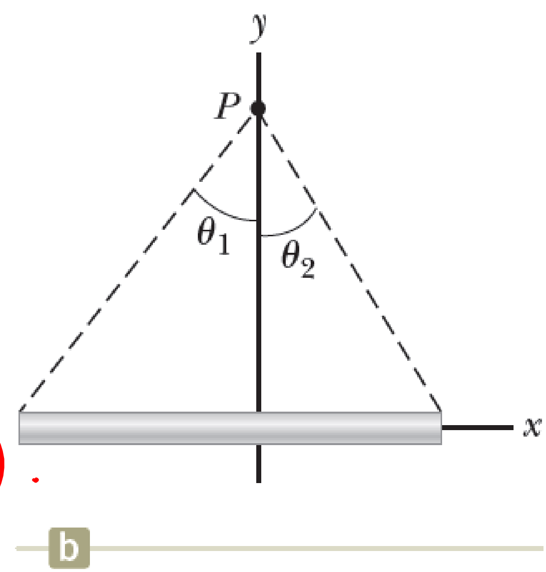
Άρα $\frac{dx}{d\theta} = -a\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow dx = -a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ (3)

Η (1) λόγω (2),(3):

$$dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\cancel{a}\,d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\right)\left(\frac{\cancel{\cos^2\theta}}{a^{\cancel{2}}}\right)\cdot\cos\theta$$

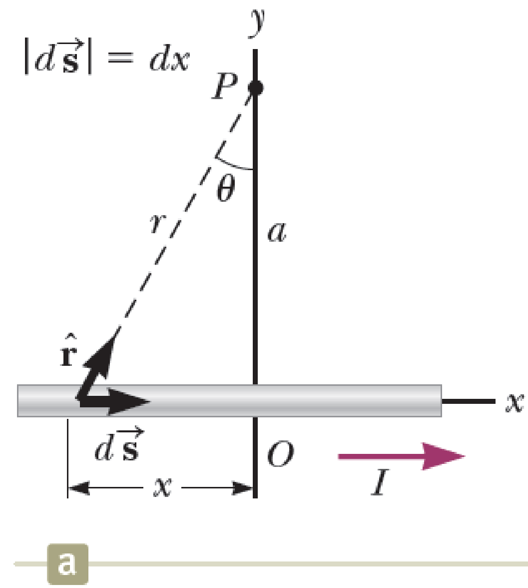
$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta\, d\theta .$$ Άρα

$$B = \int dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\cdot d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) .$$



Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.



Σημείωση: Αν δοκιμάσετε να το λύσετε με

$$B = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

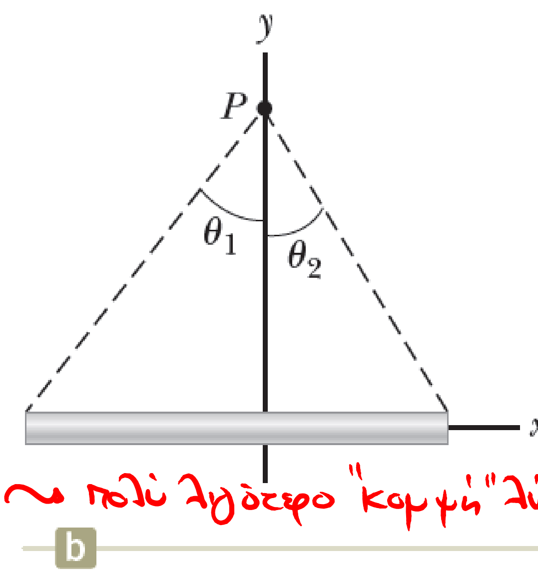
, τότε τα άκρα θα είναι

$x_1 = -a\tan\theta_1$ και $x_2 = a\tan\theta_2$ και άρα:

$$B = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-a\tan\theta_1}^{a\tan\theta_2} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \ldots (\text{πράξεις}) \ldots =$$

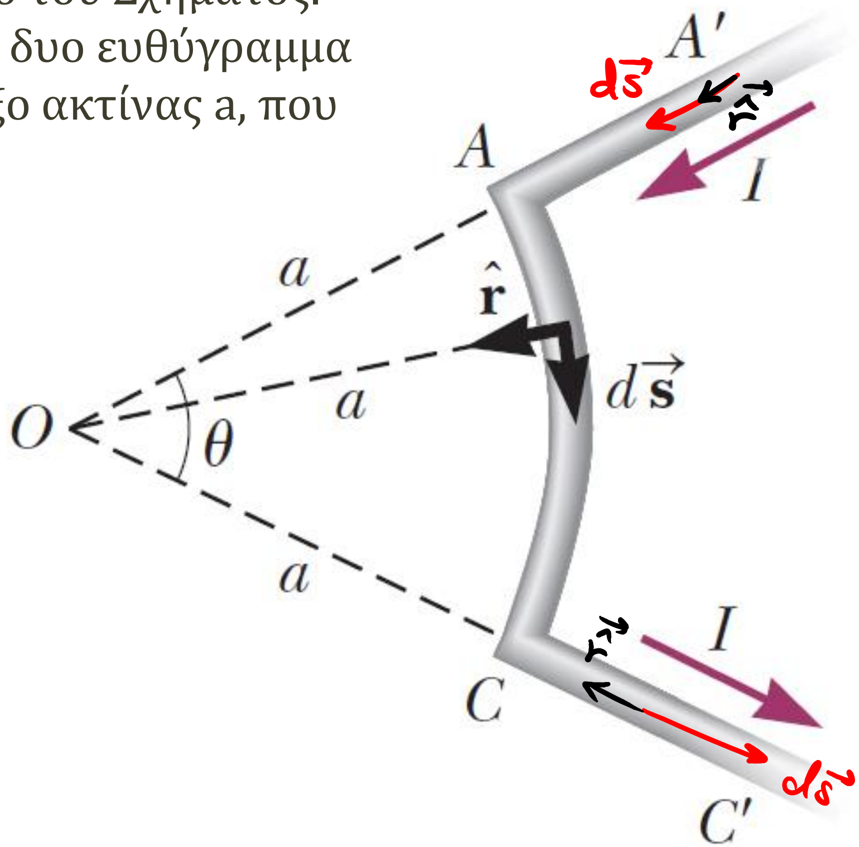
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\tan\theta_2 \sqrt{1+\tan^2\theta_1} - \tan\theta_1 \sqrt{1+\tan^2\theta_2}}{a\sqrt{(1+\tan^2\theta_2)(1+\tan^2\theta_1)}} \right)$$

~ πολύ λιγότερο "κομψή" λύση!



Μαγνητικά Πεδία

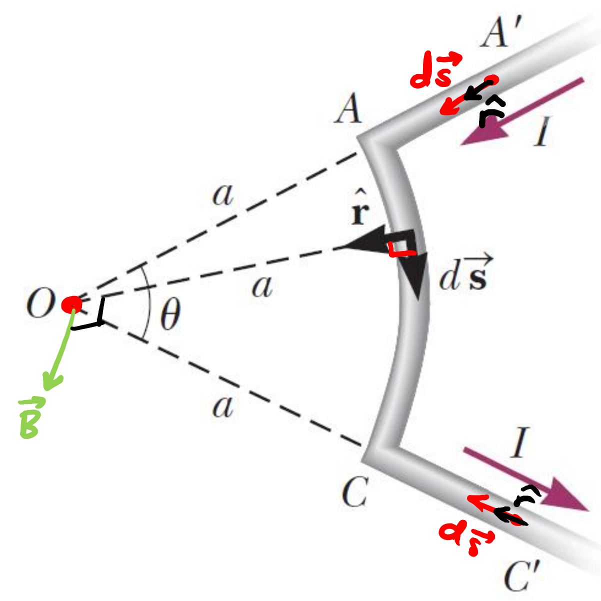
- **Παράδειγμα:**
- Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O για το ρευματοφόρο καλώδιο του Σχήματος. Το καλώδιο αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα και ένα κυκλικό τόξο ακτίνας a, που σχηματίζει γωνία θ.



Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο για το ρευματοφόρο καλώδιο του Σχήματος. Το καλώδιο αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα και ένα κυκλικό τόξο ακτίνας a, που σχηματίζει γωνία θ.



Για τον αγωγό Α′Α : $d\vec{s} \times \hat{\vec{r}} = \vec{0}$

Για τον αγωγό CC′ : $d\vec{s} \times \hat{\vec{r}} = \vec{0}$

Για τον αγωγό AC : η φορά του $d\vec{B}$ στο σημείο Ο θα είναι προς τα "μέσα", "τρυπώντας" τη διαφάνεια.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{\vec{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{\vec{r}}}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{a^2}$$

Συνολικά :

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{a^2} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{a}\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \theta$$

Τέλος Διάλεξης