



Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό



Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ηλεκτρικό Δυναμικό (επανάληψη...)

- Ηλεκτρικό Δυναμικό:

$$V = \frac{U}{q}$$

- Η **διαφορά δυναμικού** ορίζεται ως η μεταβολή στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων ή φορτίων-πεδίου όταν ένα φορτίο q μετακινείται μεταξύ δυο σημείων (A) και (B), δια το φορτίο αυτό:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{1}{q} q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Ομογενές πεδίο

$$\Delta V = -Ed$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό (επανάληψη...)

- Το ηλεκτρικό δυναμικό V λόγω σημειακού φορτίου σε απόσταση r από το φορτίο είναι

$$V = k_e \frac{q}{r}$$

- Για πολλά φορτία,

$$V = \sum V_i = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

- Για ένα φορτίο q_2 που έρχεται στο πεδίο φορτίου q_1 σε απόσταση r_{12} μέσω εξωτερικής δύναμης

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

- Για πολλά φορτία,

$$U = k_e \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, i < j$$

- Αθροίζουμε όλες τις τιμές δυναμικής ενέργειας που οφείλονται σε ένα ζεύγος φορτίων

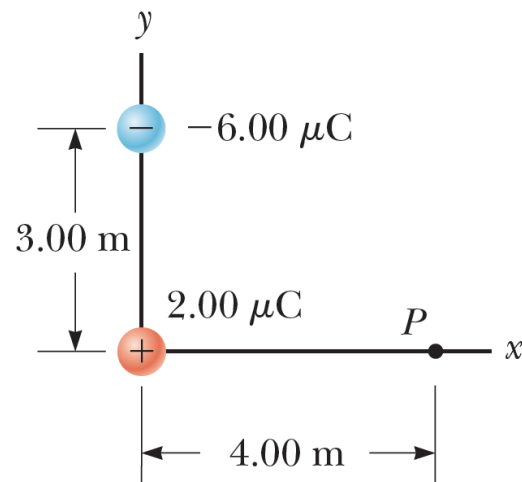
Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα:

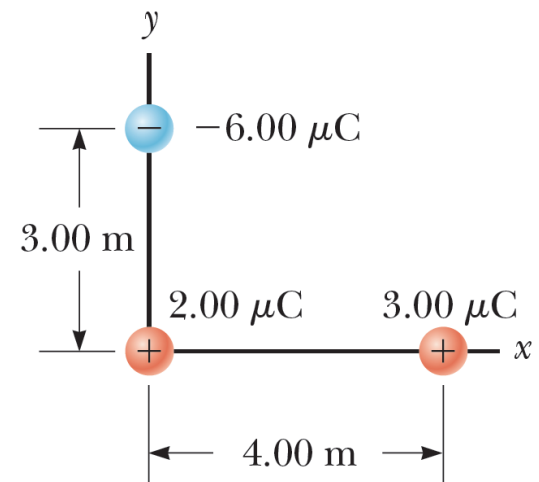
- Ένα φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6 \mu\text{C}$ στη θέση $(0, 3) \text{ m}$.

A) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0) \text{ m}$.

B) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3 \mu\text{C}$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.



a



b

Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6 \mu\text{C}$ στη θέση $(0, 3) \text{ m}$.

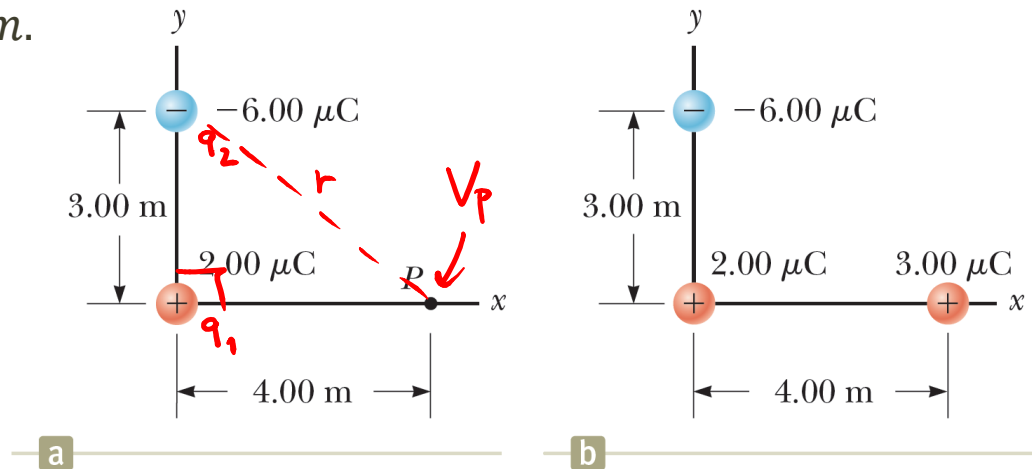
Α) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0) \text{ m}$.

Είναι:

$$\begin{aligned} V_P &= V_{q_1} + V_{q_2} \\ &= k_e \frac{q_1}{4} + k_e \frac{q_2}{r} \end{aligned}$$

$$\text{Όπως } r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } V_P = k_e \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} + k_e \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{5} = k_e \cdot 10^{-6} \left(\frac{2}{4} - \frac{6}{5} \right) = -6.29 \cdot 10^3 \text{ V}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6 \mu\text{C}$ στη θέση $(0, 3) \text{ m}$.

B) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3 \mu\text{C}$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.

Για το σύστημα, θεωρούμε ότι

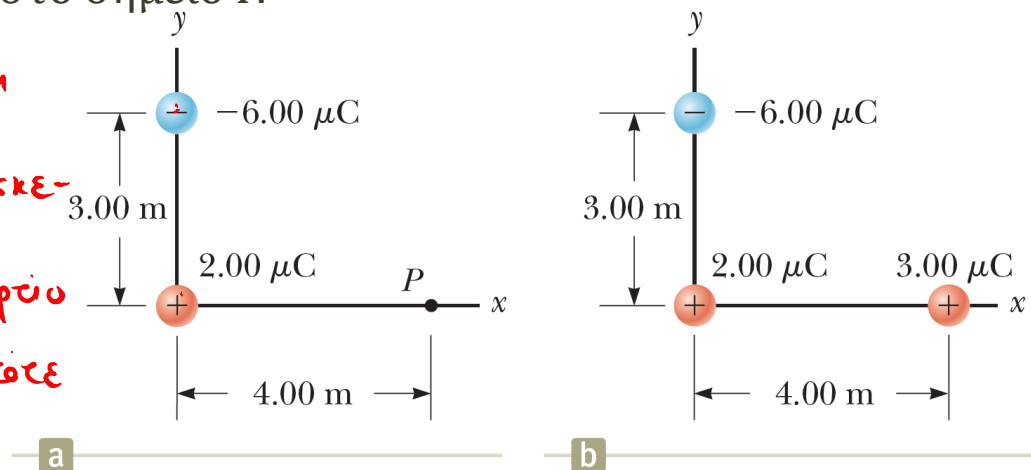
$U_{\text{ΑΡΧΙΚΗ}} = 0$, όταν το q_3 βρίσκεται

στο άπειρο. Όταν το φορτίο

q_3 έρχεται στο σημείο P, τότε

$U_{\text{ΤΕΛΙΚΗ}} = q_3 \cdot V_P$. Άρα

$$\Delta U = U_{\text{ΤΕΛ}} - U_{\text{ΑΡΧ}} = U_{\text{ΤΕΛ}} = q_3 V_P = -1.9 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό**

- Μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ από το δυναμικό ΔV ;
- Αν θεωρήσουμε μια μικρή διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ δυο σημείων απόστασης $d\vec{s}$, τότε

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Αν το ηλεκτρ. πεδίο έχει μόνο μια συνιστώσα (έστω x), τότε

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx$$

και άρα

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Τι σας θυμίζει??

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό**

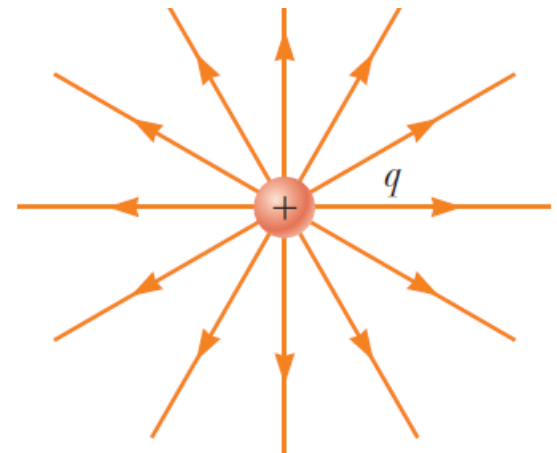
- Αν όμως η κατανομή φορτίου που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο έχει σφαιρική συμμετρία, τότε η πυκνότητα φορτίου εξαρτάται από την ακτινική απόσταση r

- Τότε, όμοια με πριν

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$

- Παράδειγμα, ένα σημειακό φορτίο:

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \frac{k_e q}{r} = -k_e q \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = k_e \frac{q}{r^2}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Συνεχής κατανομή φορτίου**

- Ας γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας σε μια συνεχή κατανομή φορτίου
- Υπάρχουν δυο τρόποι υπολογισμού δυναμικού σε συνεχή κατανομή φορτίου:

- **1. Αν η κατανομή φορτίου είναι γνωστή: θεωρούμε το δυναμικό dV σε σημείο P απόστασης r λόγω σημειακού φορτίου dq , το οποίο είναι**

$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

και ολοκληρώνουμε, παίρνοντας

$$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Σημείο μηδενικού δυναμικού θεωρείται ένα σημείο απείρως μακριά από το φορτίο.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Συνεχής κατανομή φορτίου**

- Ας γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας σε μια συνεχή κατανομή φορτίου
- Υπάρχουν δυο τρόποι υπολογισμού δυναμικού σε συνεχή κατανομή φορτίου:

- **2. Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι γνωστό από κάποια άλλη μέθοδο (π.χ. νόμος Gauss):** αν η κατανομή φορτίου είναι επαρκώς συμμετρική, εκτιμούμε το $\vec{E}$ με το νόμο του Gauss, και αντικαθιστούμε στην

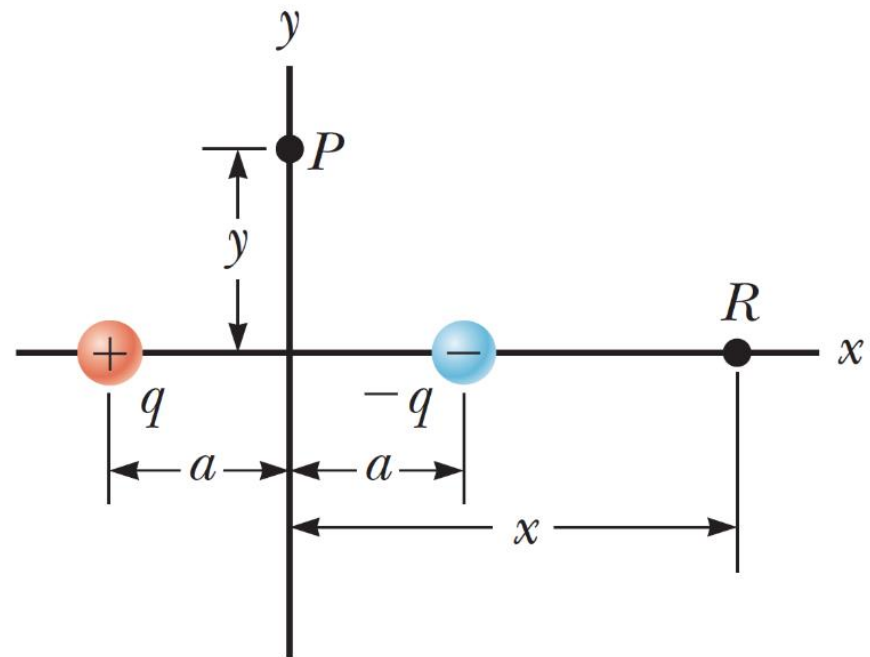
$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού ΔV . Τέλος, επιλέγουμε βολικό σημείο μηδενικού δυναμικού.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα 1:

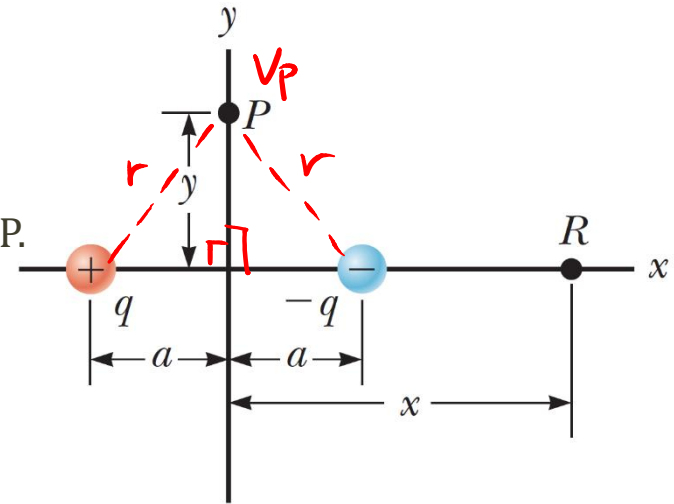
- Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δυο φορτία ίσου μέτρου και αντίθετου προσήμου που απέχουν απόσταση $2a$ μεταξύ τους, όπως στο σχήμα. Το δίπολο βρίσκεται στον άξονα x και έχει κέντρο του την αρχή των αξόνων.
- A) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P.
- B) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο R.
- Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό και το E_x σε ένα σημείο του άξονα μακριά από το δίπολο.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα 1 - Λύση:

- A) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P.



Είναι $r = \sqrt{a^2 + y^2}$, και έχουμε

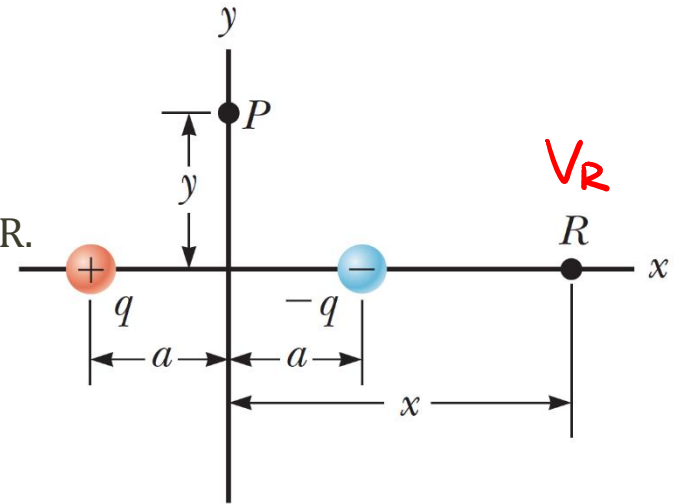
$$V_P = V_q + V_{(-q)} = k_e \frac{q}{r} + k_e \frac{-q}{r} = 0$$

Άρα $V_P = 0$!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα 1 - Λύση:

- B) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο R.



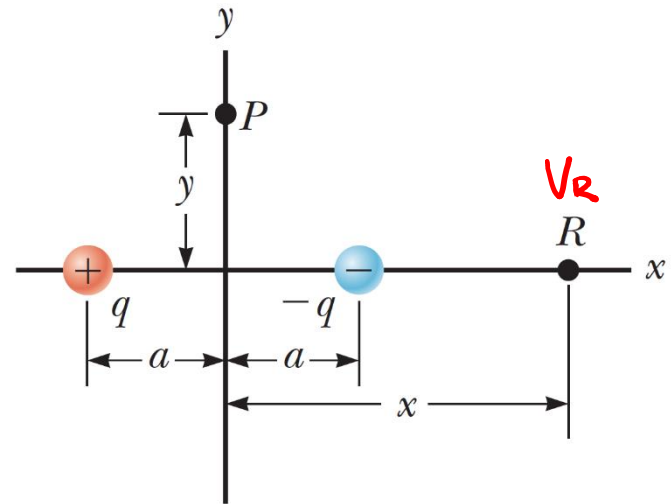
$$\begin{aligned}\text{Είναι } V_R &= V_{R_q} + V_{R_{(-q)}} \\ &= k_e \frac{q}{a+x} + k_e \frac{-q}{x-a} \\ &= -2k_e \frac{qa}{x^2 - a^2}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } V_R = -2k_e \frac{aq}{x^2 - a^2}.$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα 1 - Λύση:

- Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό και το E_x σε ένα σημείο του άξονα μακριά από το δίπολο.



$$\text{Γνωρίζουμε ότι } V_R = -2k_e \frac{aq}{x^2 - a^2} \left\{ \rightarrow \right.$$

$$\text{Αν } x \gg a, \text{ τότε } x^2 - a^2 \approx x^2$$

το δυναμικό σε ένα σημείο R' μακριά από το δίπολο είναι

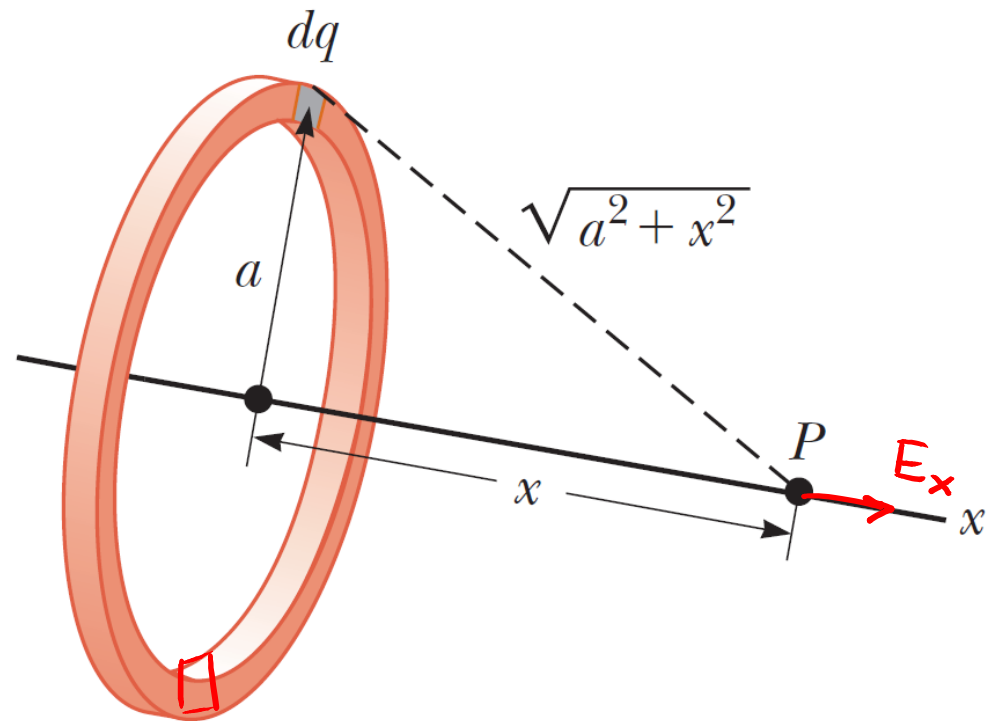
$$V_{R'} = -2k_e \frac{aq}{x^2}, \text{ οπότε, } E_x = -\frac{d}{dx} V_{R'} = -\frac{d}{dx} \left(-2k_e \frac{aq}{x^2} \right)$$

$$= 2k_e aq \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -4k_e \frac{aq}{x^3}, \text{ όταν } x \gg a.$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα 2:

- A) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P, όπως στο σχήμα.
- B) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P, όπως στο σχήμα.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα 2 – Λύση:

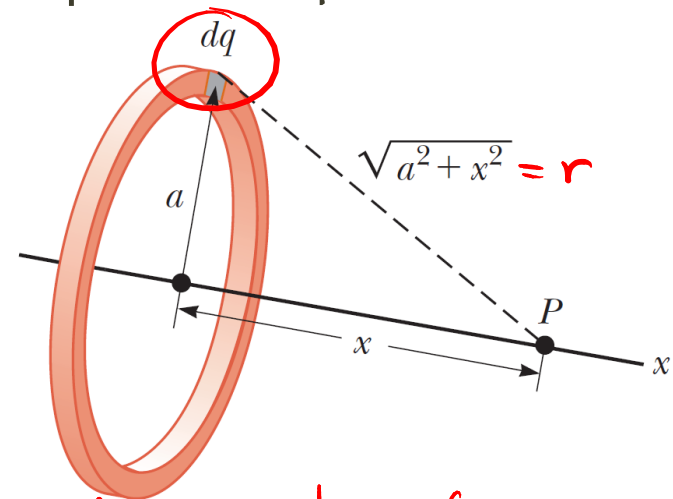
- Α) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P, όπως στο σχήμα.

Έστω φορτίο dq όπως στο σχήμα.

Για αυτό το φορτίο, έχουμε

$$dV_P = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Για όλο το δακτύλιο, } V_P &= \int dV_P = \int k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq \\ &= \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \end{aligned}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

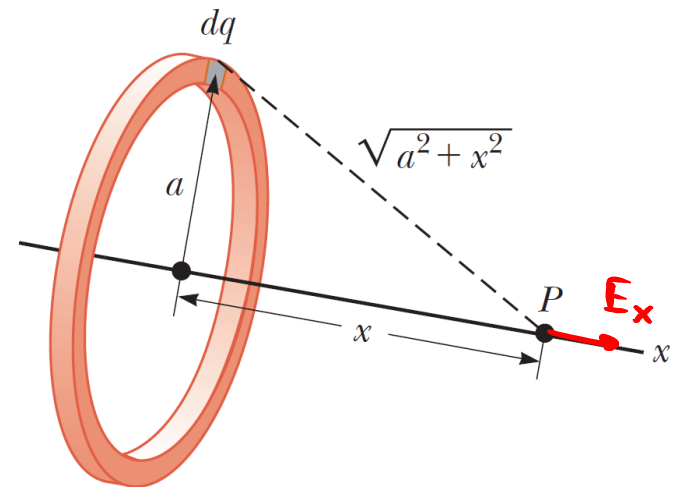
Παράδειγμα 2 - Λύση:

- B) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P, όπως στο σχήμα.

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right)' = f'(x) \left(-\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \right) \right. \\ \text{An. I}$$

≡ έραφε ότι

$$\begin{aligned} E_x^P &= -\frac{d}{dx} V_P = -\frac{d}{dx} \left(k_e \frac{Q}{\sqrt{a^2+x^2}} \right) \\ &= -k_e Q \left(-\frac{1}{2} \right) (a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\ &= k_e \frac{Qx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$



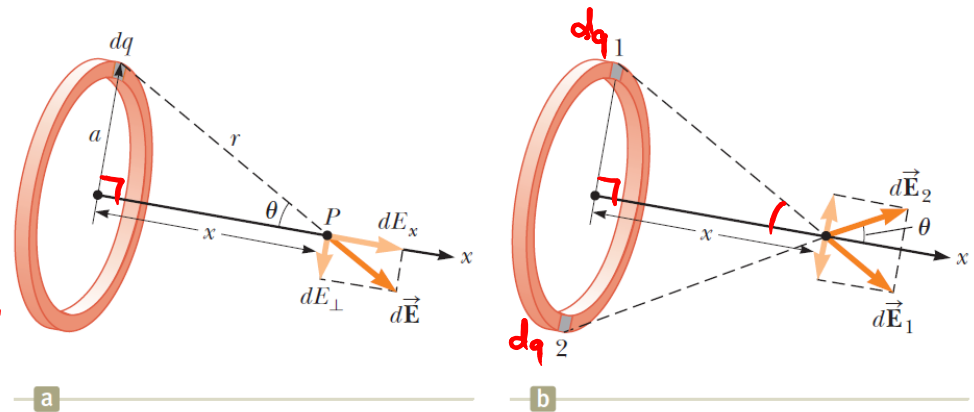
Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα 2 – Αναλυτική λύση με ηλ. Πεδίο (1/2):

- Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Παρατηρείτε ότι οι συνιστώσες $dE_{\perp}^1, dE_{\perp}^2$ των σημειακών φορτίων dq_1, dq_2 αλληλοακυρώνονται, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος.



$$\begin{aligned} dE_x : dE_x &= k_e \frac{dq}{r^2} \cdot \cos\theta \quad \left. \begin{aligned} r^2 &= a^2 + x^2 \\ \cos\theta &= x/r \\ r &= \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dE_x = k_e \frac{dq}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= k_e \frac{dq \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

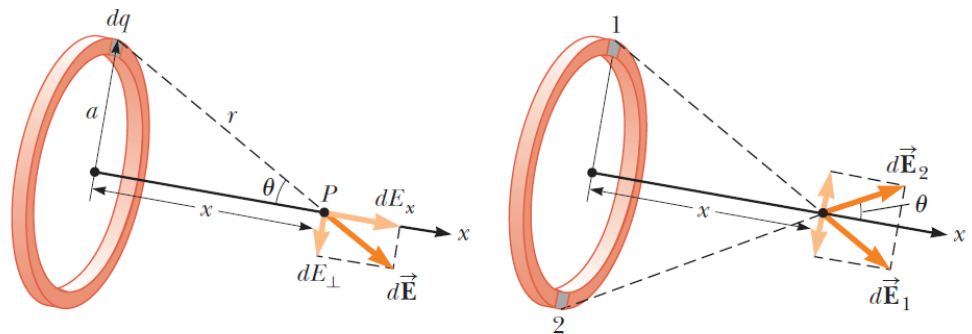
Παράδειγμα 2 – Αναλυτική λύση με ηλ. Πεδίο (2/2):

- Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Αθροίζοντας ($\int$) όλες τις συνιστώσες dE_x για κάθε σημειακό φορτίο dq , έχουμε:

$$E_p = E_x^p = \int dE_x^p = \int k_e \frac{dq \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \text{Τα } x, k_e, a \text{ είναι σταθερές!}$$

$$\text{Άρα } E_p = k_e \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq = k_e \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



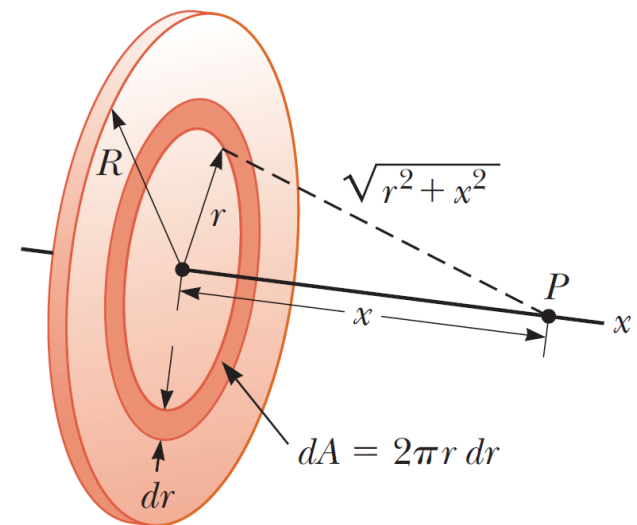
Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα 3:

- Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος έχει ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ .

A) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P όπως στο σχήμα.

B) Βρείτε τη x -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P .



$$* = \int_0^R k_e \frac{2\pi\sigma r}{\sqrt{r^2+x^2}} dr = 2\pi k_e \sigma (\sqrt{R^2+x^2} - x).$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα 3 – Λύση:

- Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος έχει ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ .

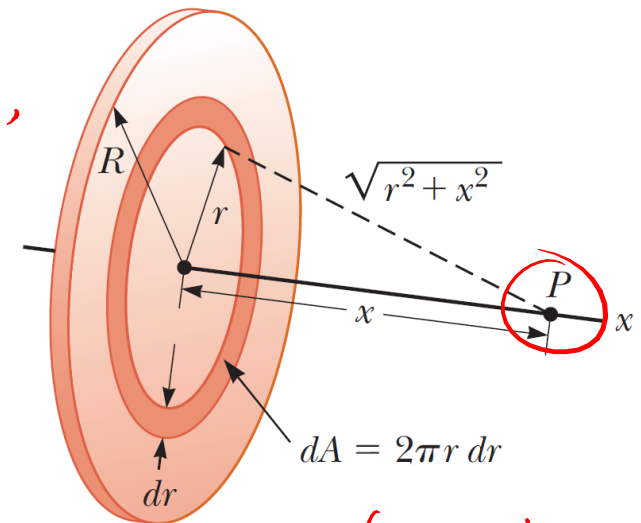
A) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P όπως στο σχήμα.

Γνωρίζουμε ότι για ένα δακτύλιο πάχους dr , το ηλ. δυναμικό στο σημείο P είναι:

$$dV_P = k_e \frac{Q}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \left. \begin{array}{l} Q=dq \\ a=r \end{array} \right\} k_e \frac{dq}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

$$\text{Είναι } \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \Rightarrow dq = \sigma dA$$

$$\Rightarrow dV_P = k_e \frac{\sigma dA}{\sqrt{x^2+r^2}} \left\{ \begin{array}{l} dA = 2\pi r \cdot dr \end{array} \right. = k_e \frac{2\pi\sigma r}{\sqrt{r^2+x^2}} dr. \text{ Συνολικά, } V_P = \int dV_P = *$$



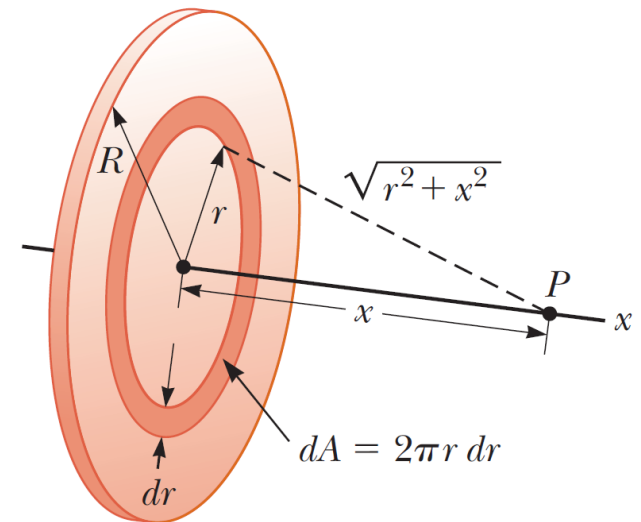
Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα 3 – Λύση:

- Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος έχει ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ .

B) Βρείτε τη x -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P .

$$\begin{aligned} &\equiv \text{έραφε ότι } E_x^P = -\frac{d}{dx} V_P = \\ &= -\frac{d}{dx} \left(2\pi k_e \sigma \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right) \right) \\ &= \dots \\ &= 2\pi k_e \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$



Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

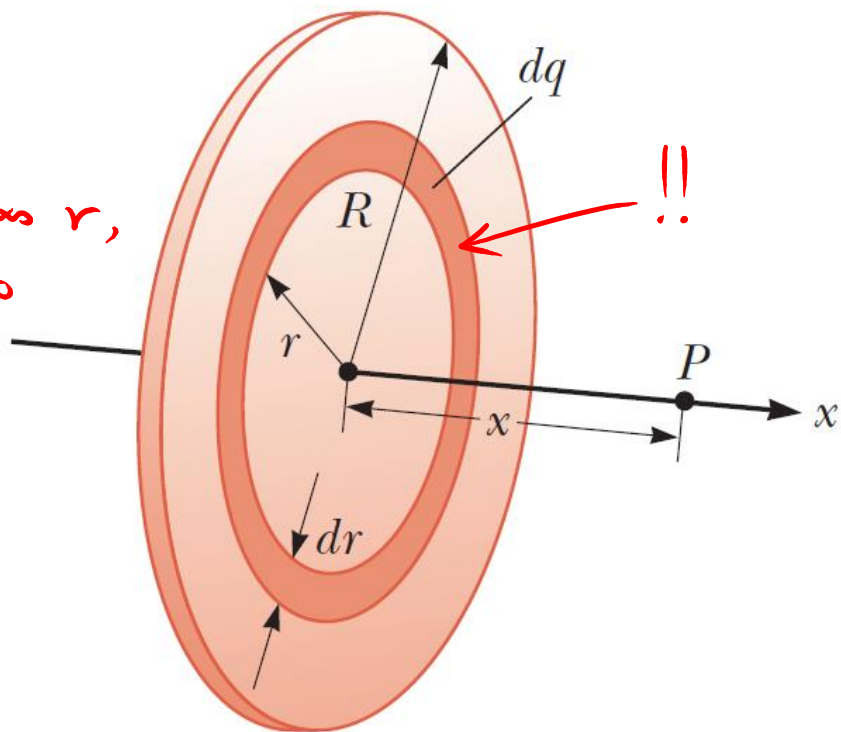
Παράδειγμα 3 – Λύση (1/3):

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \leftarrow \text{επιφάνεια}$$

Από προηγ. ερώτηση, γνωρίζουμε ότι ένας δακτύλιος φορτίου dq , ακτίνας r , και πάχους dr συνεισφέρει ηλ. πεδίο στο σημείο P ίσο με:

$$dE_P = k_e \frac{dq \cdot x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \textcircled{1}$$



Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA}$$

● Παράδειγμα 3 – Λύση (2/3):

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο.

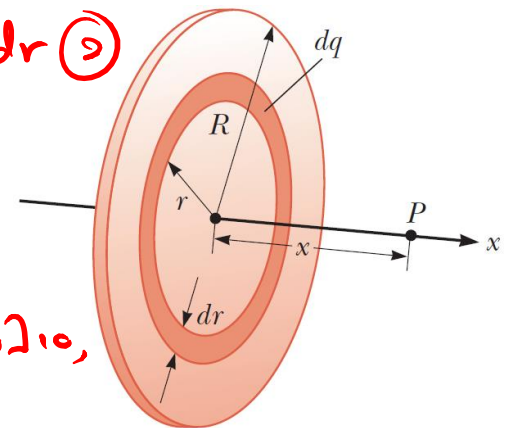
Έχουμε $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r \cdot dr} \Rightarrow dq = 2\pi r \cdot \sigma \cdot dr$ ②

① ② $dE_p = k_e \frac{2\pi r \sigma x \cdot dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Αθροίζοντας, όλες τις συνεισφορές για κάθε δακτύλιο, θα έχω:

$$E_p = \int dE_p = \int k_e \frac{2\pi r \sigma x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \pi \sigma x k_e \int_0^R \frac{2r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$
 ③

Είναι $\int_0^R \frac{2r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dr$. Θέτω $u = r^2 + x^2 \Rightarrow du = 2r \cdot dr + 0 = 2r \cdot dr$
Είναι $u_1 = x^2, u_2 = R^2 + x^2$



Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

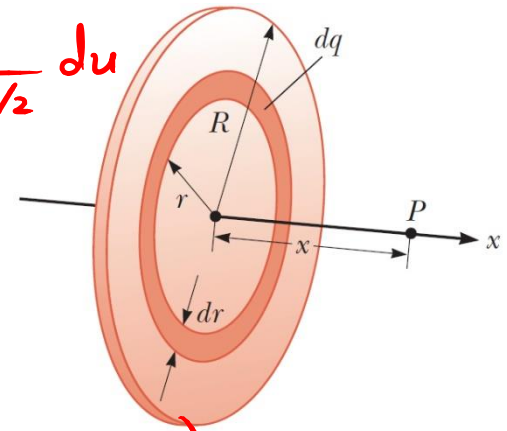
Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα 3 – Λύση (3/3):

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \int_0^R \frac{r}{(r^2+x^2)^{3/2}} dr &= \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{u^{3/2}} du \\ &= \int_{x^2}^{R^2+x^2} u^{-3/2} du = -2k_e \pi \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{x^2}^{R^2+x^2} = \\ &= 2k_e \pi \sigma \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \right) = 2k_e \pi \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right). \end{aligned}$$



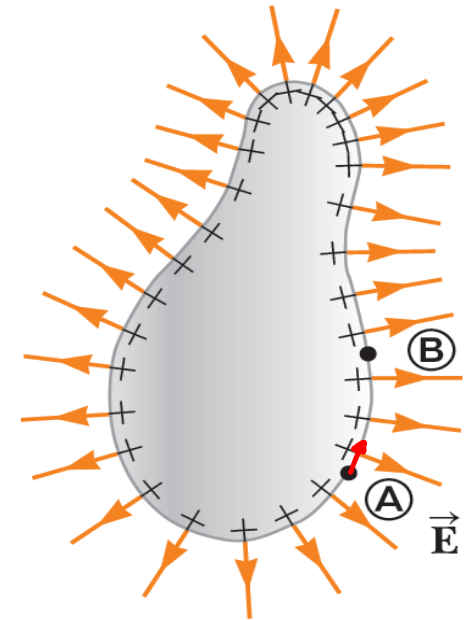
Ηλεκτρικό Δυναμικό

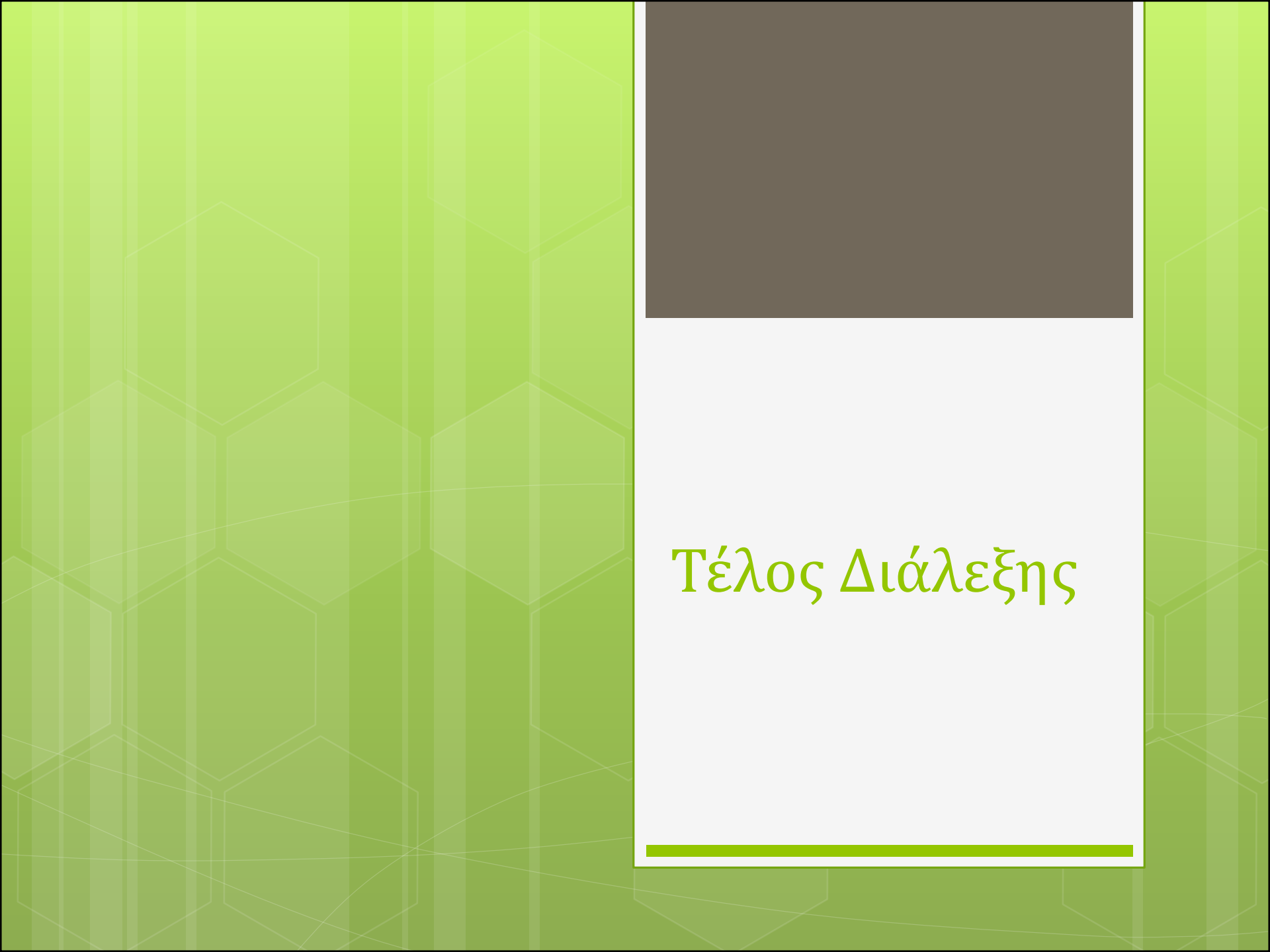
● Αγωγοί – Δυναμικό

- Ας δούμε αν υπάρχουν ιδιότητες σχετιζόμενες με το δυναμικό
- Έστω δυο σημεία A και B της επιφάνειας
 - Για κάθε μονοπάτι στην επιφάνειά του από το A στο B, το ηλ. πεδίο είναι κάθετο στη μετατόπιση $d\vec{s}$
 - Άρα

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

- **Συμπέρασμα:** η επιφάνεια οποιουδήποτε φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι μια επιφάνεια σταθερού δυναμικού: κάθε σημείο της επιφάνειας έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Επιπλέον, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό οπουδήποτε εντός του αγωγού και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια





Τέλος Διάλεξης