Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη…)

- ***Ο νόμος του Coulomb***

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

  - Διηλεκτρική σταθερά κενού : $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{Nm^2}$

- ***Διανυσματική μορφή***

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}}$$

- Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathrm{E}}$ υπάρχει σε μια περιοχή του χώρου γύρω από ένα φορτισμένο σωματίδιο (που λέγεται ***πηγή φορτίου***)

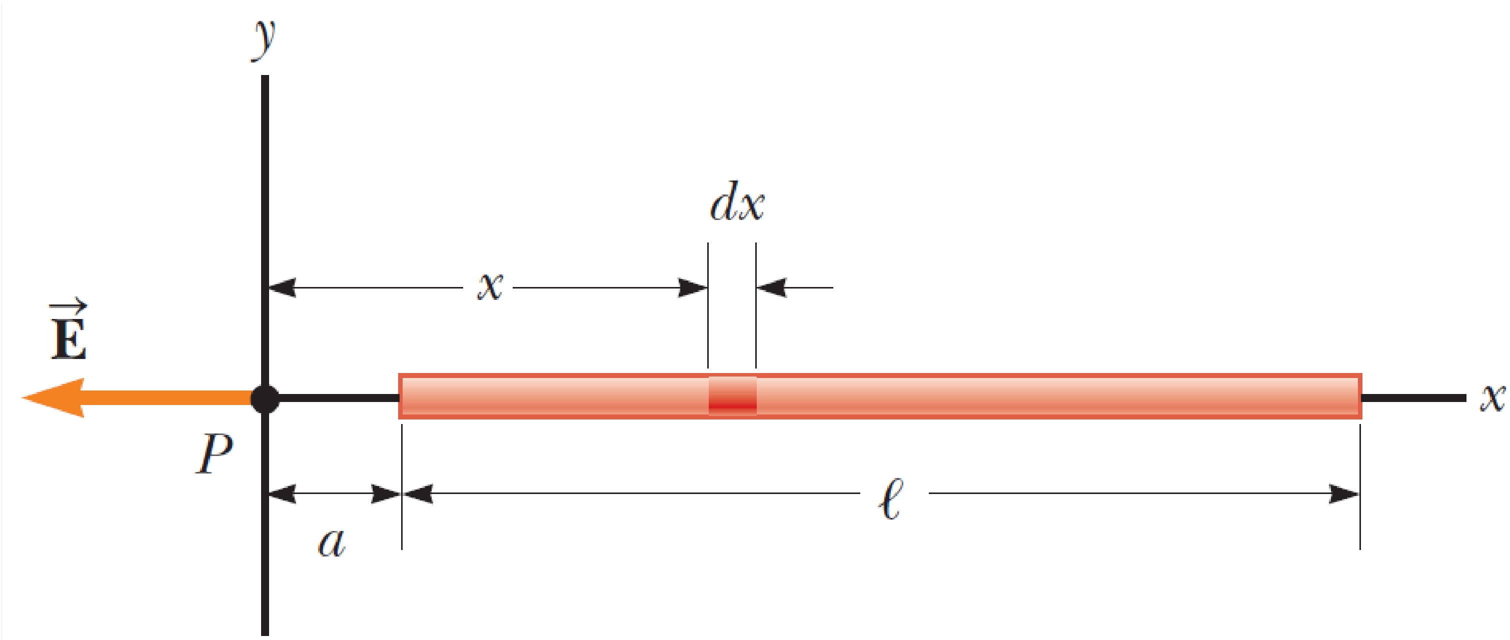
$$\vec{E} = \frac{\overrightarrow{F_e}}{q_0}$$

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη…)

- ***Ηλεκτρικό Πεδίο μιας πηγής φορτίου***
$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2}\vec{\mathbf{r}}$$
- ***Ηλεκτρικό Πεδίο πολλών πηγών φορτίου***
$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{\mathbf{r_i}}$$
- ***Ηλεκτρικό Πεδίο κατανομής φορτίου***
$$\vec{E} \approx k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\vec{\mathbf{r_i}} = k_e \int \frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{r}}$$
- Γραμμική πυκνότητα φορτίου: $\lambda = \frac{Q}{l}$
- Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου: $\sigma = \frac{Q}{A}$
- Χωρική πυκνότητα φορτίου: $\rho = \frac{Q}{V}$

Ηλεκτρικά Πεδία

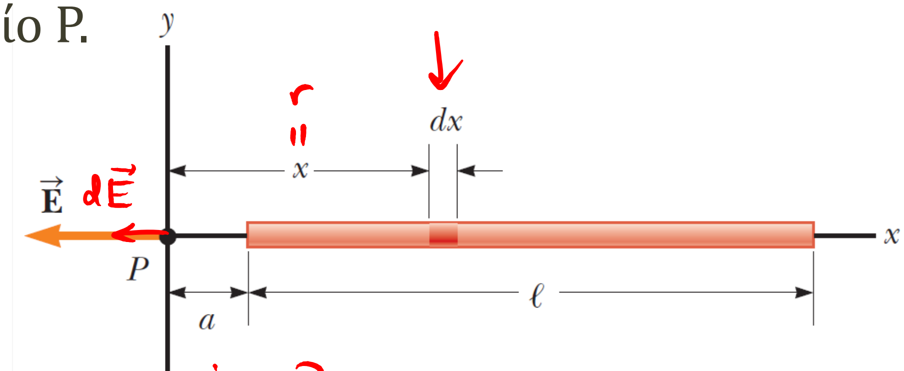
- **Παράδειγμα 1:**
  - Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση a από το ένα άκρο της ράβδου, στην ευθεία της ράβδου, όπως στο σχήμα.



Ηλεκτρικά Πεδία

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} \quad (3) \Rightarrow \lambda = \frac{dq}{dx}$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Θεωρώ τμήμα της ράβδου dx.

Το τμήμα αυτό έχει φορτίο

$$dq = \lambda dx \quad (1)$$

Το τμήμα dx συνεισφέρει ηλ. πεδίο στο σημείο P ως:

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{x^2} . \quad (2)$$

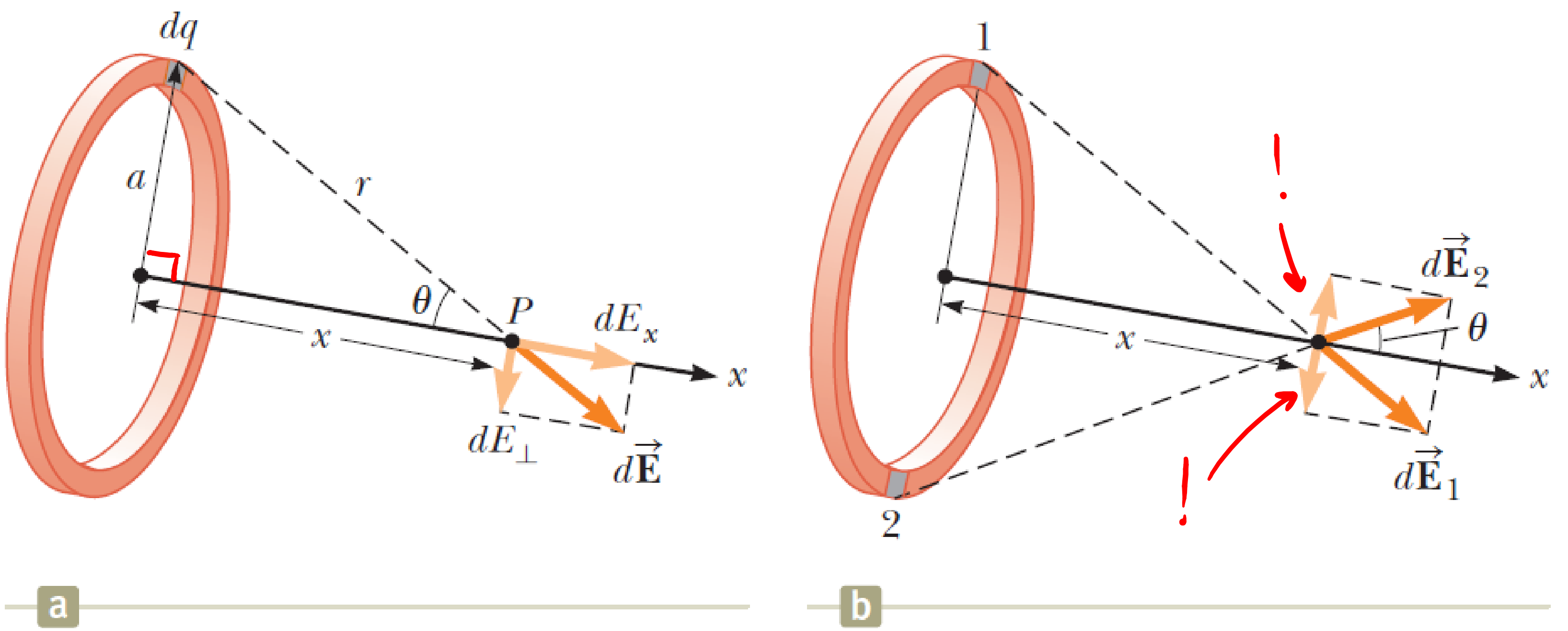
Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές dE, έχουμε: $E = \int dE = \int k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \int \frac{dq}{x^2}$

Από (1), έχουμε $E = k_e \int \frac{\lambda dx}{x^2} = k_e \lambda \int_a^{\ell+a} \frac{1}{x^2} dx = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{\ell+a} = k_e \lambda \frac{\ell}{a(\ell+a)}$

$$\overset{(3)}{=} k_e \frac{Q}{\cancel{\ell}} \frac{\cancel{\ell}}{a(\ell+a)} = k_e \frac{Q}{a(\ell+a)} .$$

Ηλεκτρικά Πεδία

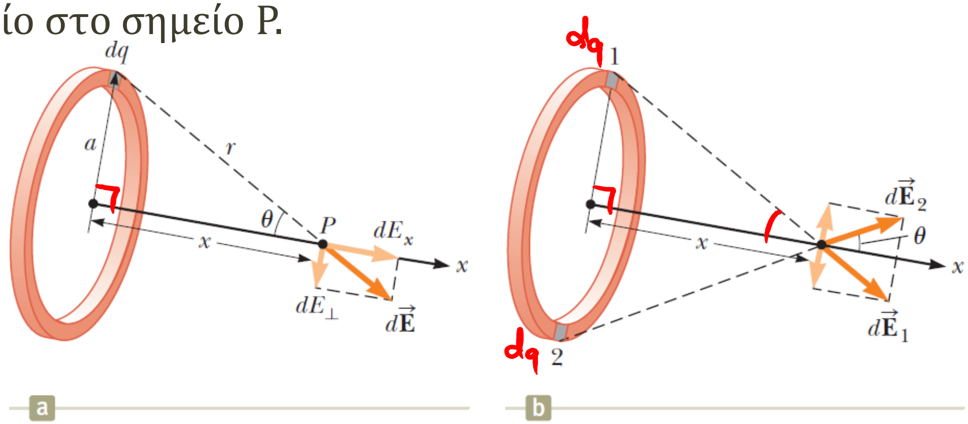
- **Παράδειγμα 2:**
  - Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου.



Ηλεκτρικά Πεδία

Παράδειγμα 2 – Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες $dE_\perp^1$, $dE_\perp^2$ των σημειακών φορτίων dq_1, dq_2 αλληλοακυρώνονται, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος.

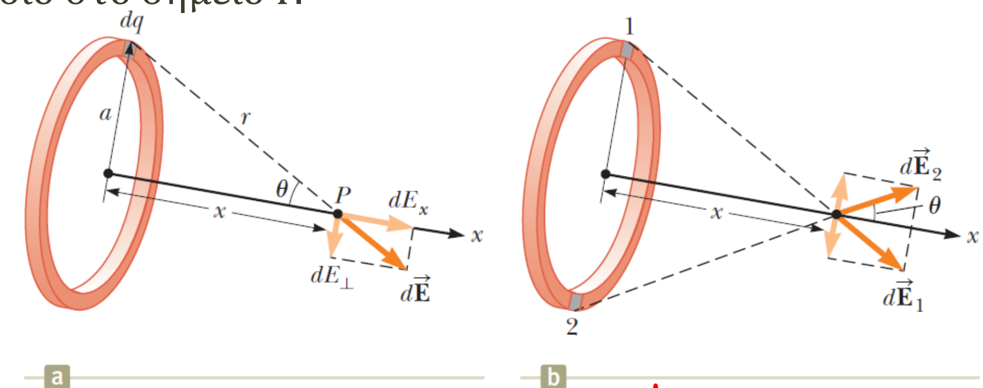
dE_x: $$\left.\begin{aligned} dE_x &= k_e \frac{dq}{r^2}\cdot\cos\theta \\ r^2 &= a^2+x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} dE_x &= k_e \frac{dq}{a^2+x^2}\cdot\cos\theta \\ \cos\theta &= x/r \\ r &= \sqrt{a^2+x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dE_x = k_e \frac{dq}{a^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= k_e \frac{dq\cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Ηλεκτρικά Πεδία

Παράδειγμα 2 – Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Αθροίζοντας (∫) όλες τις συνεισφορές dE_x για κάθε σημειακό φορτίο dq, έχουμε:

$$E_P = E_x^P = \int dE_x^P = \int k_e \frac{dq \cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

. Τα x, k_e, a είναι σταθερές!

Άρα $$E_P = k_e \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq = k_e \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q = k_e \frac{Qx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Άρα για ένα δακτύλιο ακτίνας a, φορτίου Q, και γραμμικής πυκνότητας φορτίου, η τιμή του E σε ένα σημείο P απόστασης x είναι

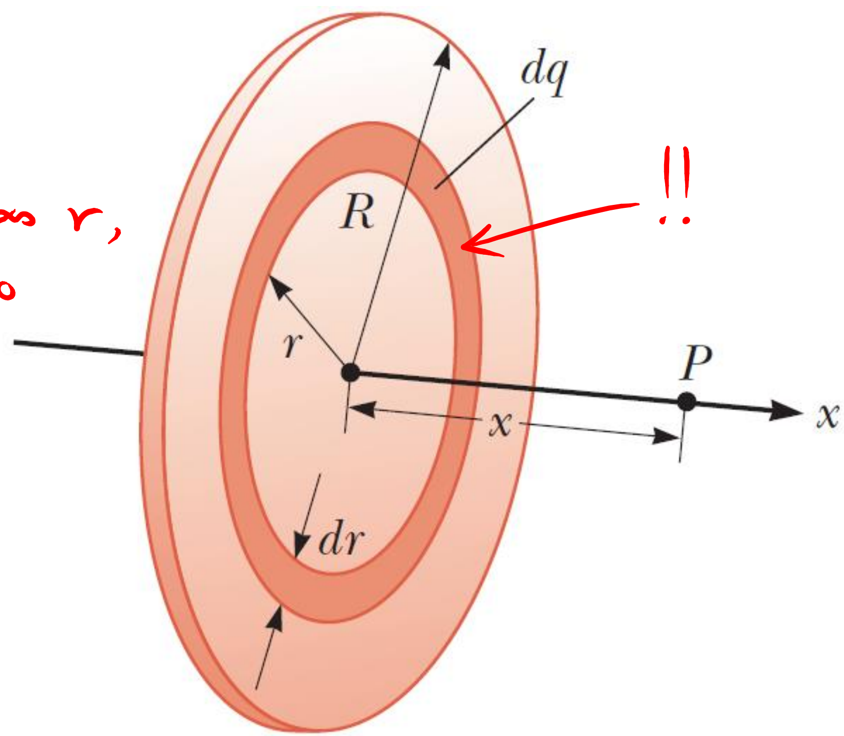
Ηλεκτρικά Πεδία

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}}$$ ← εμβαδό

- **Παράδειγμα 3:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P σε απόσταση x, και που βρίσκεται στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου.

Από προηγ. ερώτημα, γνωρίζουμε ότι ένας δακτύλιος φορτίου dq, ακτίνας r, και πάχους dr συνεισφέρει ηλ. πεδίο στο σημείο P ίσο με:

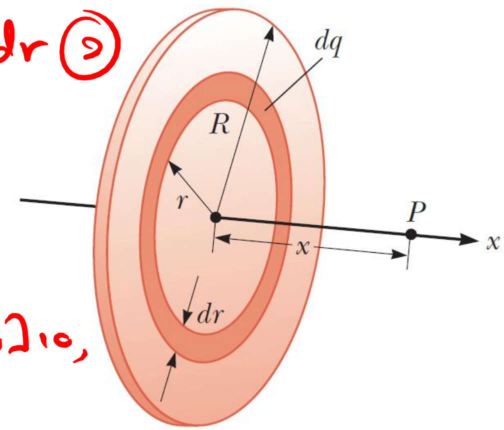
$$dE_P = k_e \frac{dq \cdot x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$



Ηλεκτρικά Πεδία

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA}}$$

- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Έχουμε $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r \cdot dr} \Rightarrow dq = 2\pi r \cdot \sigma \cdot dr$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $dE_p = k_e \frac{2\pi r \sigma x \, dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Αθροίζοντας, όλες τις συνεισφορές για κάθε δακτύλιο, θα έχω:

$$E_p = \int dE_p = \int k_e \frac{2\pi r \sigma x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \pi \sigma x k_e \int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr \quad (3)$$

Είναι $\int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr$. Θέτω $u = r^2+x^2 \Rightarrow du = 2r \cdot dr + 0 = 2r \cdot dr$

Είναι $u_1 = x^2$, $u_2 = R^2+x^2$

Ηλεκτρικά Πεδία

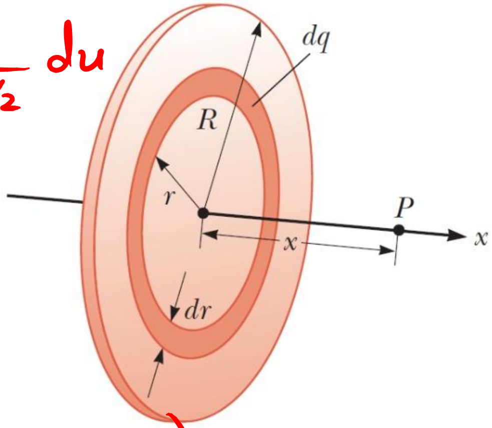
- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

$$\left\{ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \right.$$

Άρα $\displaystyle\int_0^R \frac{r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{u^{3/2}} du$

$$= \int_{x^2}^{R^2+x^2} u^{-\frac{3}{2}} du = -2k_e \pi x \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{x^2}^{R^2+x^2} =$$

$$= 2k_e x \pi \sigma \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = 2k_e \pi \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right).$$

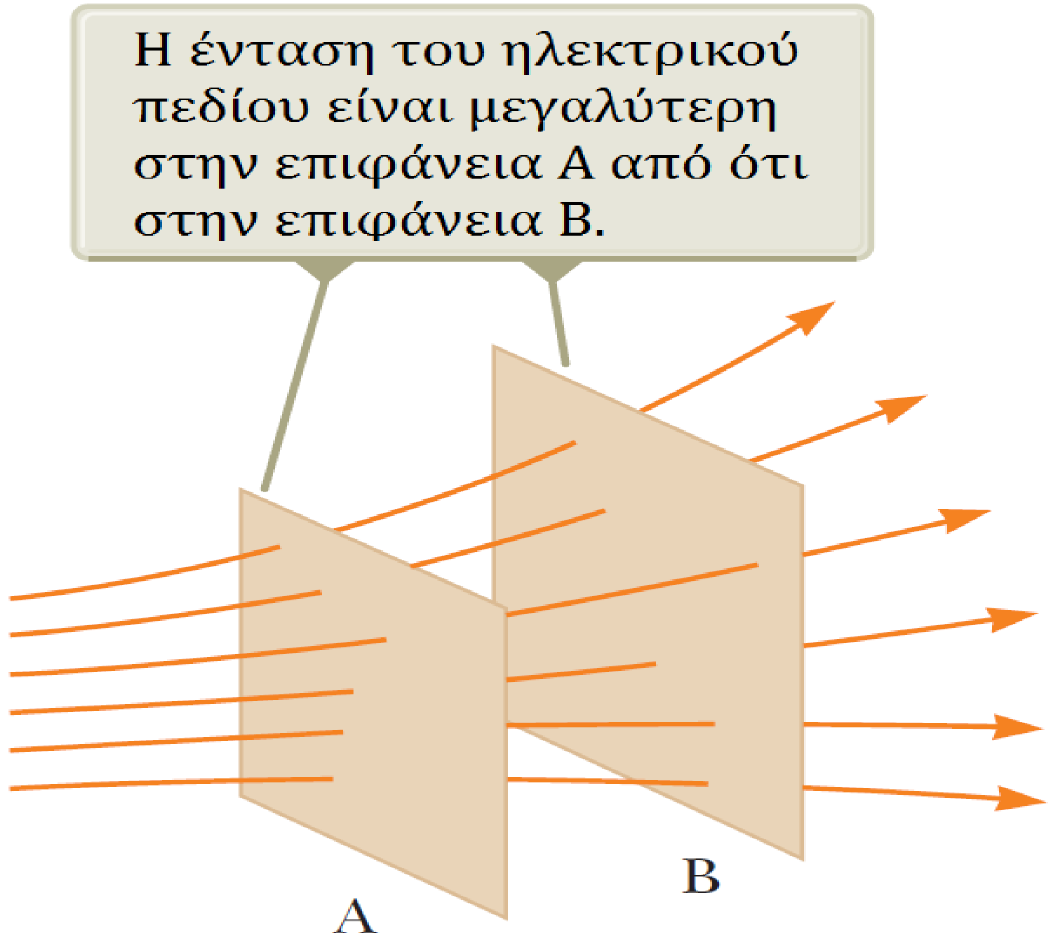


Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**
  - Δεν μπορούμε να δούμε ένα ηλεκτρικό πεδίο
  - Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης είναι οι **δυναμικές γραμμές** ηλεκτρικού πεδίου
    - Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι εφαπτόμενο σε μια δυναμική γραμμή που διέρχεται από κάθε σημείο
    - Η κατεύθυνση της γραμμής είναι όμοια με της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται στο πεδίο
    - Ο αριθμός των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας διαμέσου μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου
      - Με άλλα λόγια, οι δυναμικές γραμμές είναι πιο πυκνές όπου η ένταση του πεδίου είναι μεγαλύτερη

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**

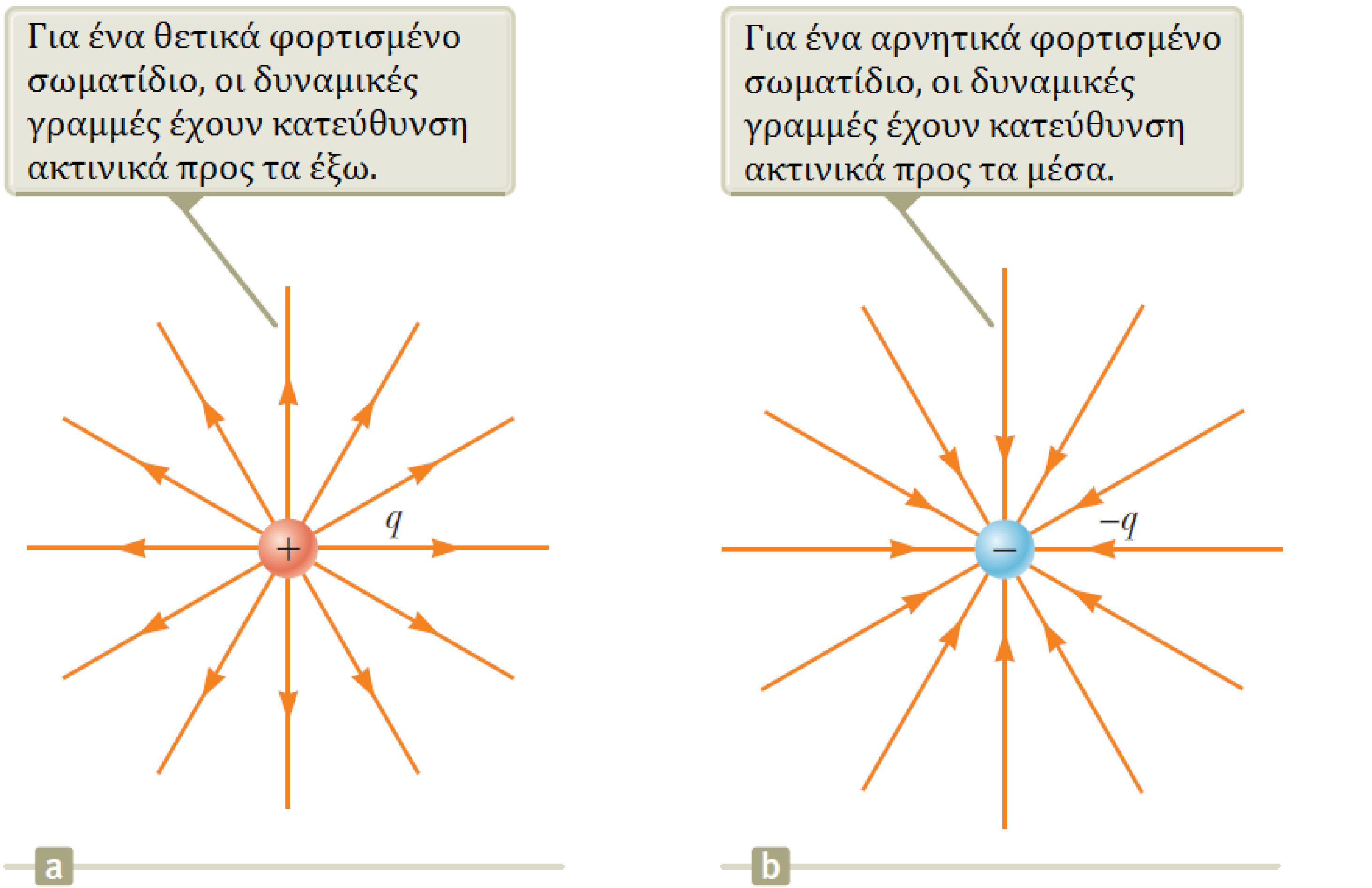


Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**
  - Πώς τις σχεδιάζουμε;
    - Οι γραμμές πρέπει να ξεκινούν από θετικό φορτίο και να καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο. Αν υπάρχει πλεόνασμα κάποιου φορτίου, τότε οι δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν ή θα τελειώνουν απειροστά μακριά.
    - Ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή πλησιάζουν ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογη του μέτρου του φορτίου.
    - Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται.

Ηλεκτρικά Πεδία

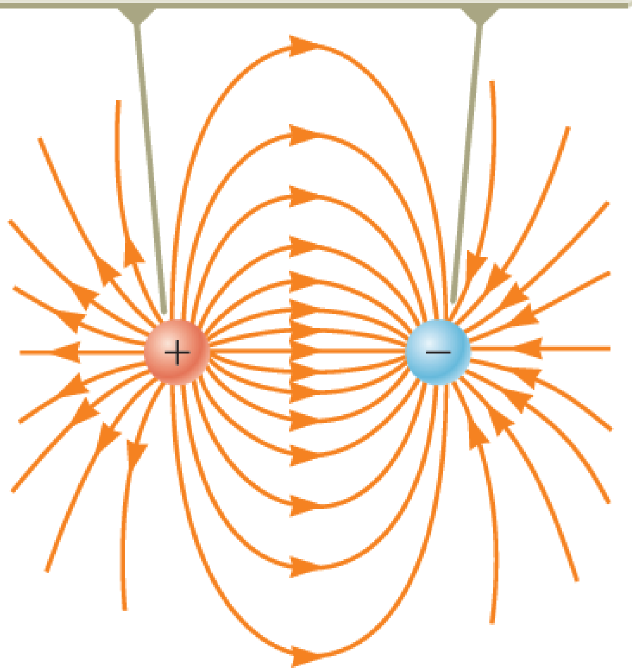
- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**



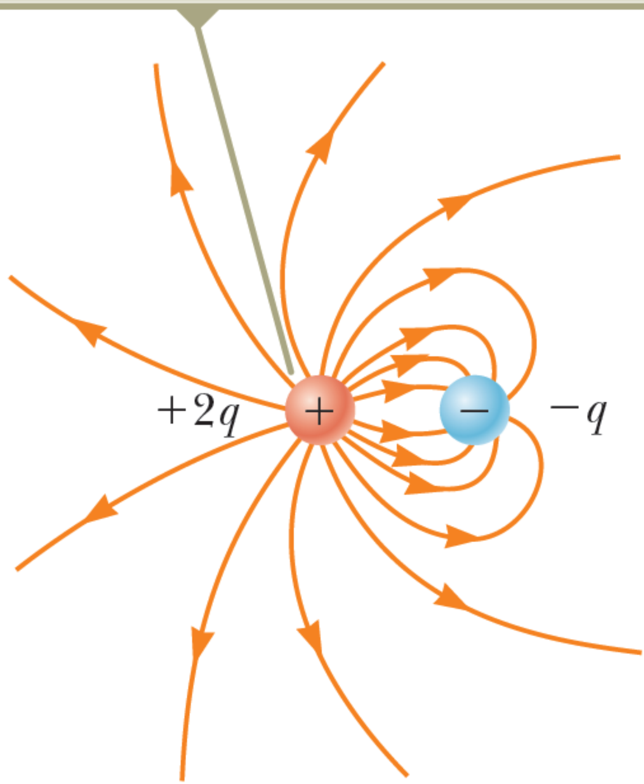
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν από το θετικό φορτίο ισούται με τον αριθμό γραμμών που φθάνουν στο αρνητικό φορτίο.



Δυο δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το + 2q για κάθε μια που τερματίζει στο -q.



Ηλεκτρικά Πεδία

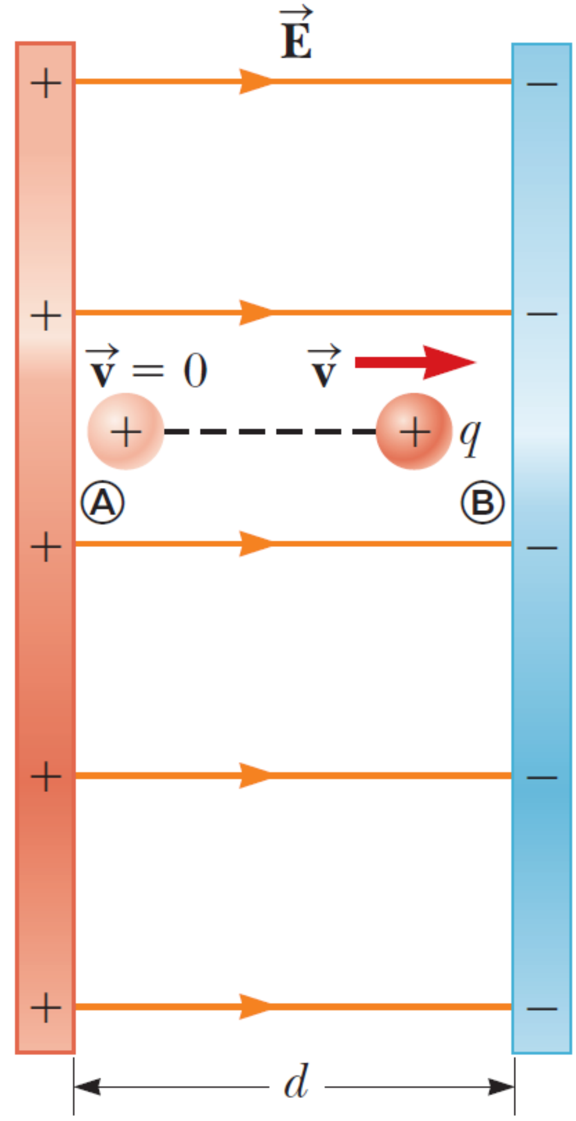
- **Κίνηση σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο**
  - Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q
  - Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
  - Επιταχυνόμενη κίνηση λόγω ηλεκτρικής δύναμης

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = ma \rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

  - Αν το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο, η κίνησή του είναι προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου
  - Αλλιώς, η κίνηση είναι αντίθετη της κατεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου

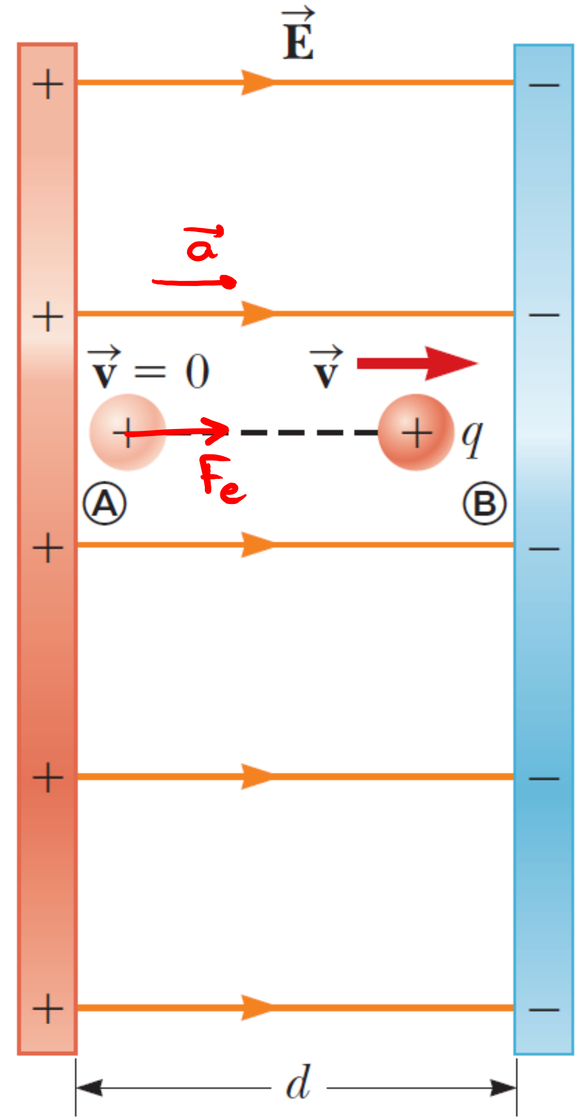
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με κατεύθυνση επάνω στο x-άξονα ανάμεσα σε δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες που απέχουν απόσταση d, όπως στο σχήμα. Σωματίδιο φορτίου +q μάζας m αφήνεται από το σημείο Α και επιταχύνεται στο σημείο Β.
    Α) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση Β.
    Β) Υπολογίστε το Α) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Σωματίδιο φορτίου +q μάζας m αφήνεται από το σημείο Α και επιταχύνεται στο σημείο Β.
    Α) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση Β.



Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγρ. ομαλά επιταχ. υπό την επίδραση της δύναμης F_e.

Από τις εξισώσεις της Ε.Ο.Ε.Κ. έχουμε:

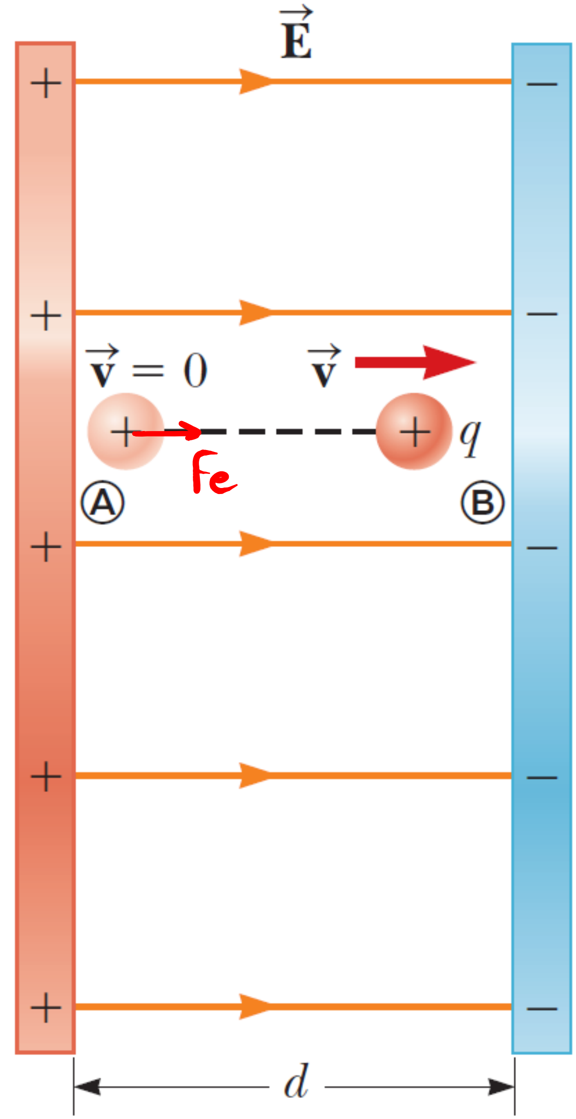
$$u_B^2 = \cancel{u_A^2} + 2a\cdot\Delta x = 2a\Delta x = 2ad \Rightarrow$$

0

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow u_B = \sqrt{2ad} \\ &a = \frac{F_e}{m} = \frac{qE}{m} \end{aligned}\right| \Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2Edq}{m}}.$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Σωματίδιο φορτίου +q μάζας m αφήνεται από το σημείο Α και επιταχύνεται στο σημείο Β.
    Β) Υπολογίστε το Α) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.



Θεωρώ το μη-απομονωμένο σύστημα του σώματος.
Η F_e θεωρείται εξωτερική δύναμη στο σύστημα.

ΑΔΕ ή ΘΜΚΕ:

$$\Delta K_{A\to B} = W_{F_e} \Leftrightarrow K_B - K_A = F_e \cdot d = qE\cdot d$$

όμως $K_A = 0$, οπότε $K_B = qEd \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = qEd \Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}.$$

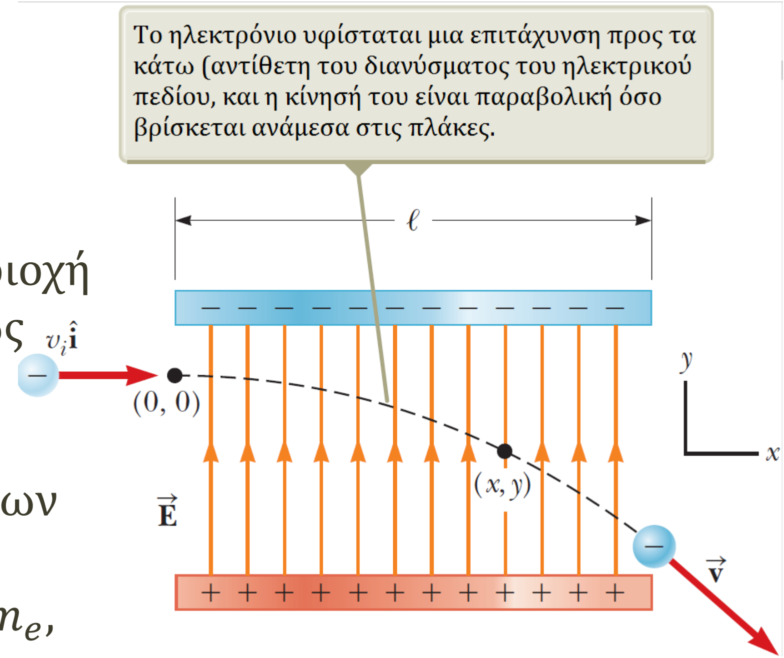
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο σχήμα. Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m. Θεωρήστε γνωστή τη μάζα του ηλεκτρονίου m_e, καθώς και το φορτίο του, e.

    Α) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

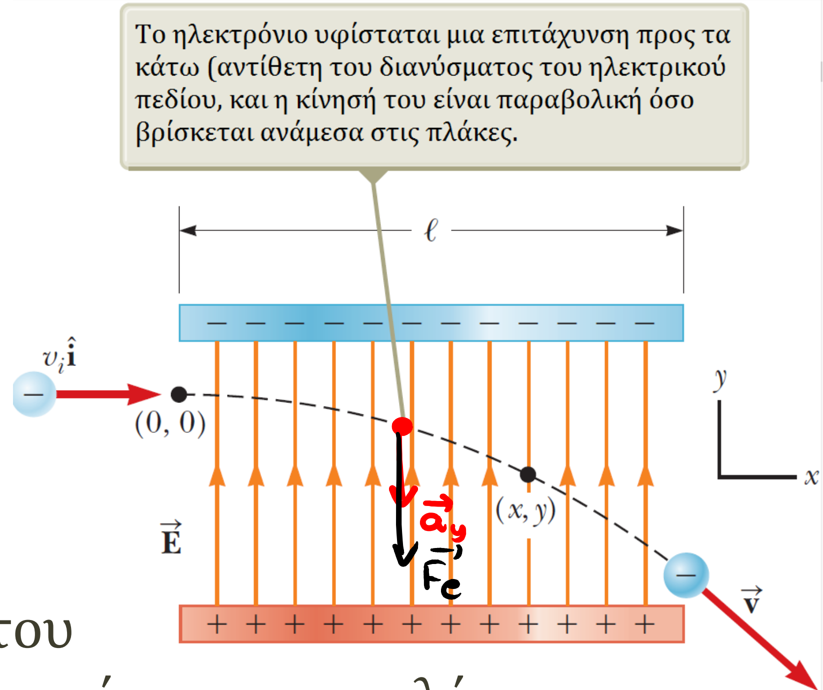
    Β) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

    Γ) Υποθέτοντας ότι η y-συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.
    Α) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

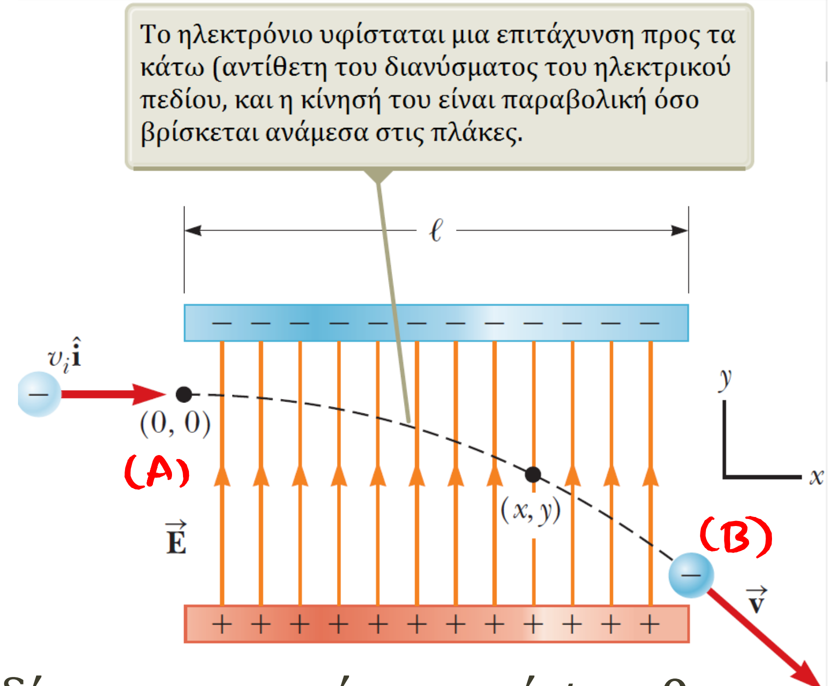


Αφού το ηλεκτρόνιο έχει αρνητικό φορτίο, θα κινηθεί αντίθετα από τις δυναμικές γραμμές. Άρα η επιτάχυνση λόγω της ηλεκτρικής δύναμης που θα του ασκηθεί θα είναι όπως στο σχήμα.

Ισχύει $\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Leftrightarrow \vec{F}_e = m\vec{a}_y \Rightarrow a_y = -\frac{E \cdot e}{m_e} = -3.5 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.
    Β) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

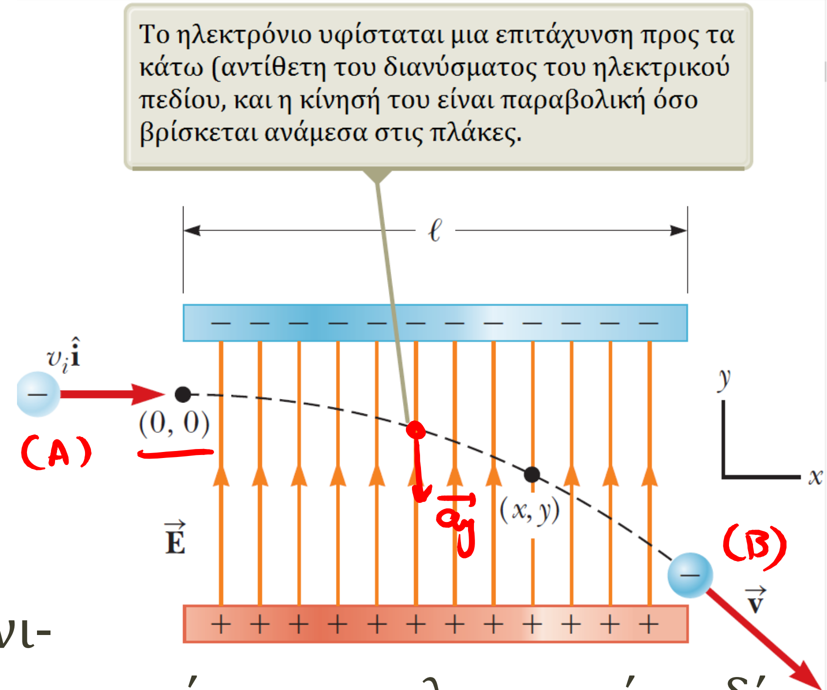


Ζητάμε το χρόνο που απαιτείται για να διανύσει το μήκος l.
Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στον x-άξονα της κίνησής του.

Άρα $x_B = x_A + u_x t \Rightarrow t = \frac{x_B - x_A}{u_x} = \frac{l}{u_x} = \frac{0.1}{3 \cdot 10^6} = 3.3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.
    Γ) Υποθέτοντας ότι η y-συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι y = 0, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;



Στον y-άξονα της κίνησής του, το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, λόγω της $\vec{a_y}$. Άρα:

$$y_B = y_A + u_{iy} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{eE}{m_e}\right)\left(\frac{x_B - x_A}{u_x}\right)^2 = -0.0195\ m$$

Τέλος Διάλεξης