



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Υπέρθεση

- Μελέτη κυματικής
- Κύματα διαφορετικά από σωματίδια
 - Συνδυασμός σωματιδίων δίνει ένα σώμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία
 - Συνδυασμός κυμάτων δίνει ένα κύμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο ίδιο σημείο!
- Σημαντικό: τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην ίδια θέση του χώρου!
 - Για να αναλύσουμε τέτοιες συμπεριφορές, απαιτείται η **αρχή της υπέρθεσης**

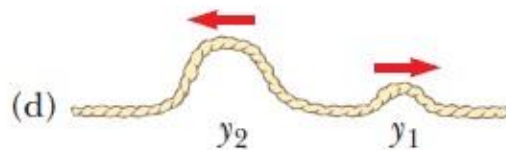
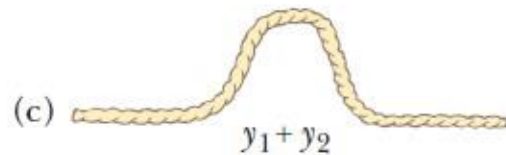
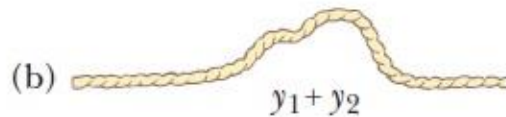
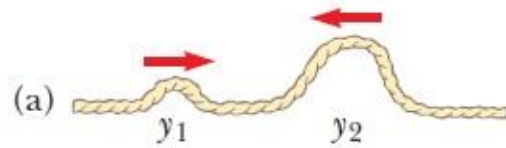
Υπέρθεση

- Αρχή της υπέρθεσης

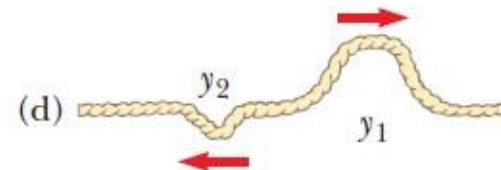
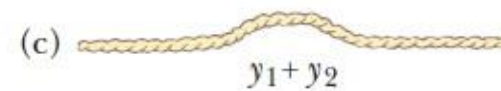
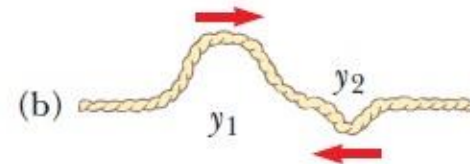
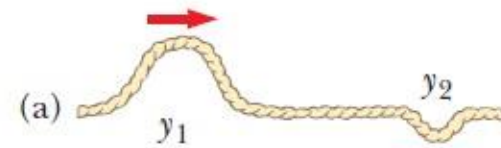
- *Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων*
- Τέτοια κύματα λέγονται **γραμμικά**
- Ο συνδυασμός δυο διαφορετικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου λέγεται **συμβολή**

Υπέρθεση

○ Αρχή της υπέρθεσης



Ενισχυτική Συμβολή



Καταστρεπτική Συμβολή

Υπέρθεση

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

- Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- Δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά
 - Ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, και πλάτος
 - Διαφορετική φάση

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- $y = y_1 + y_2$

$$= A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

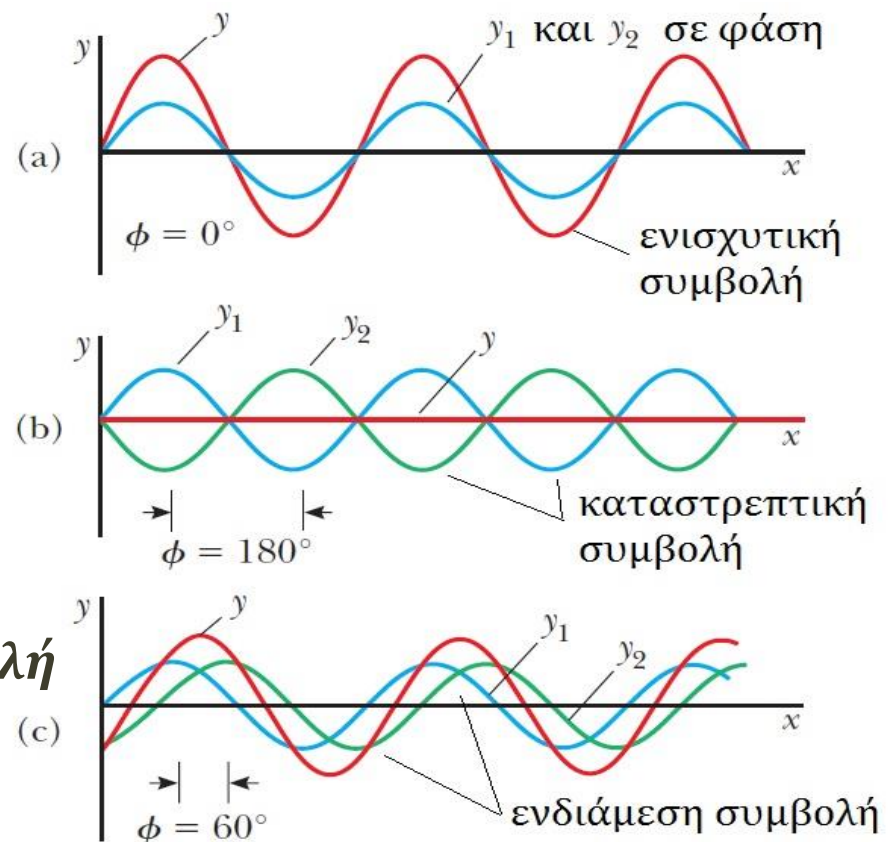
$$= 2A \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Υπέρθωση

Υπέρθωση ημιτονοειδών κυμάτων

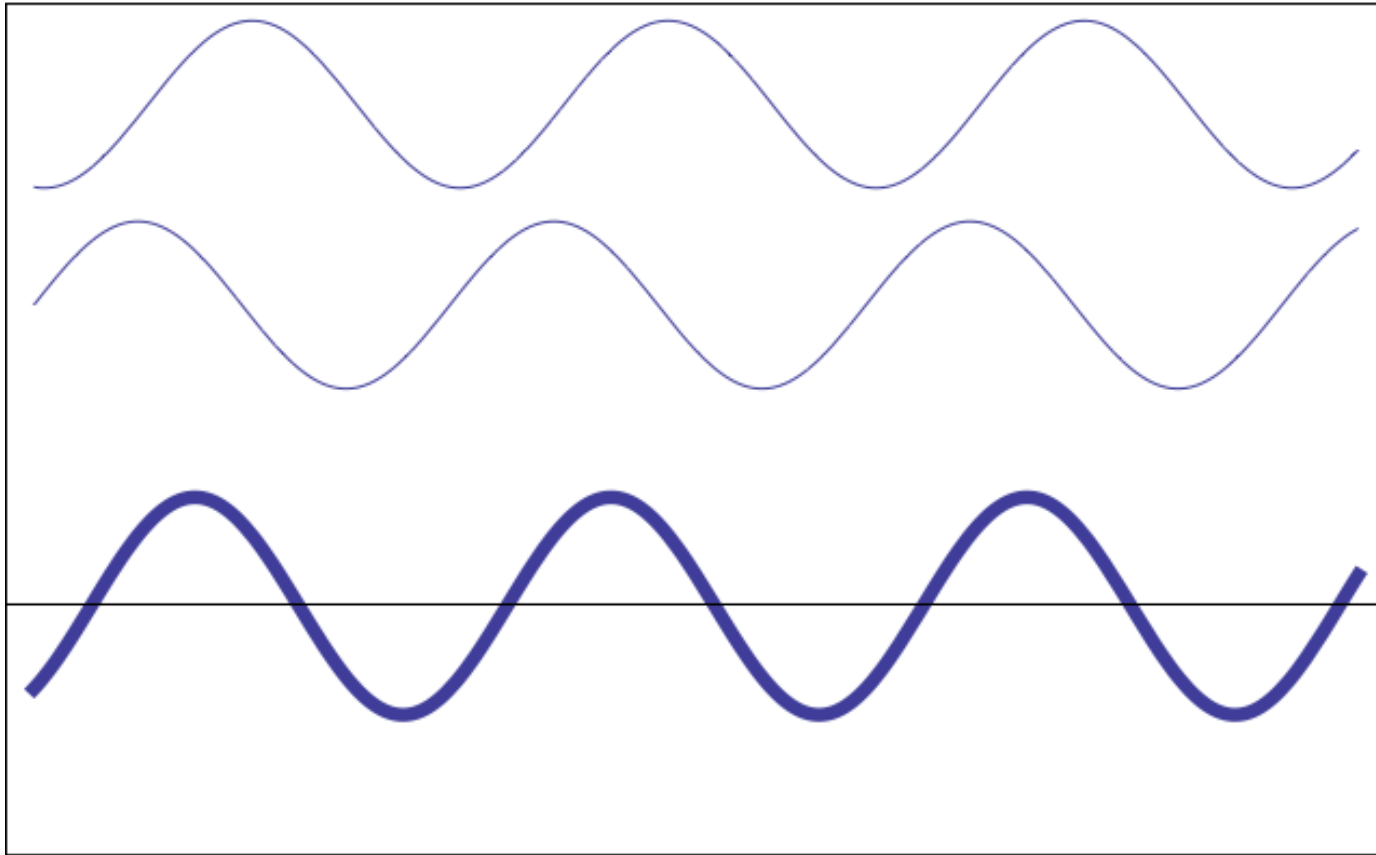
- $y = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$

- Υδια συχνότητα
- Υδιο μήκος κύματος
- (α) $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
 - Πλάτος $2A$
 - Κύματα **σε φάση**
 - Ενισχυτική συμβολή**
- (b) $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$
 - Πλάτος 0
 - Κύματα **εκτός φάσης**
 - Καταστρεπτική συμβολή**
- (c) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
 - $0 \leq \text{Πλάτος} \leq 2A$



Υπέρθεση

- Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων



Υπέρθεση

• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του φάση
 - ενώ μπορεί να διανύουν και διαφορετικές διαδρομές
- Ηχητικά κύματα από το ηχείο ακολουθούν διαφορετική διαδρομή
 - Έχουν το ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω
 - Απόσταση ηχείου από δέκτη = **μήκος διαδρομής**

- Διαφορά διαδρομής

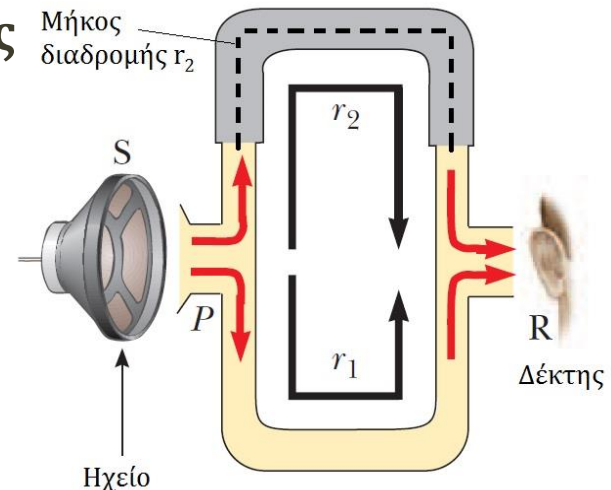
$$\Delta r = |r_2 - r_1|$$

- Φάση του καθενός κύματος

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- Τότε

$$y = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$



Υπέρθεση

- **Συμβολή ηχητικών κυμάτων**

- Είναι

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\varphi$$

- Αν $\Delta\Phi = 2m\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά

- Αν $\Delta\Phi = (2m+1)\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν καταστρεπτικά

- Αν η αρχική φάση είναι ίδια (π.χ. κοινή πηγή ήχου): $\Delta\varphi = 0$

- Ενισχυτική: $\Delta r = m\lambda$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Καταστρεπτική: $\Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Υπέρθεση

• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

• Καταστρεπτική συμβολή

- Λόγω διαφορετικής αρχικής φάσης $\Delta\phi$ - (a)

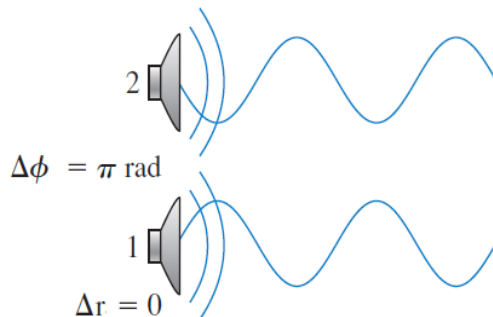
- Λόγω διαφορετικής θέσης - (b)

- Διαφορετικό μήκος διαδρομής Δr

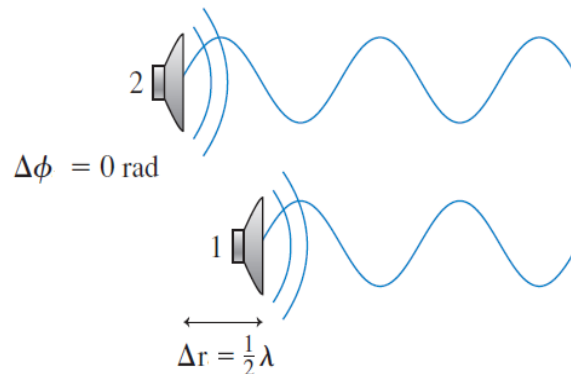
- Λόγω και των δυο παραπάνω παραγόντων - (c)

- Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε $\Delta\Phi = \pi$ σε κάθε περίπτωση

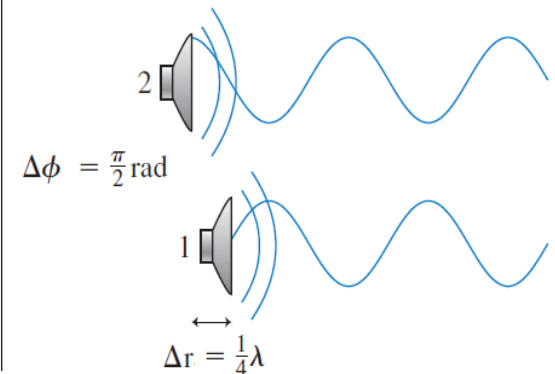
(a) Οι πηγές είναι εκτός φάσης



(b) Ίδιες πηγές διαφέρουν από μισό μήκος κύματος



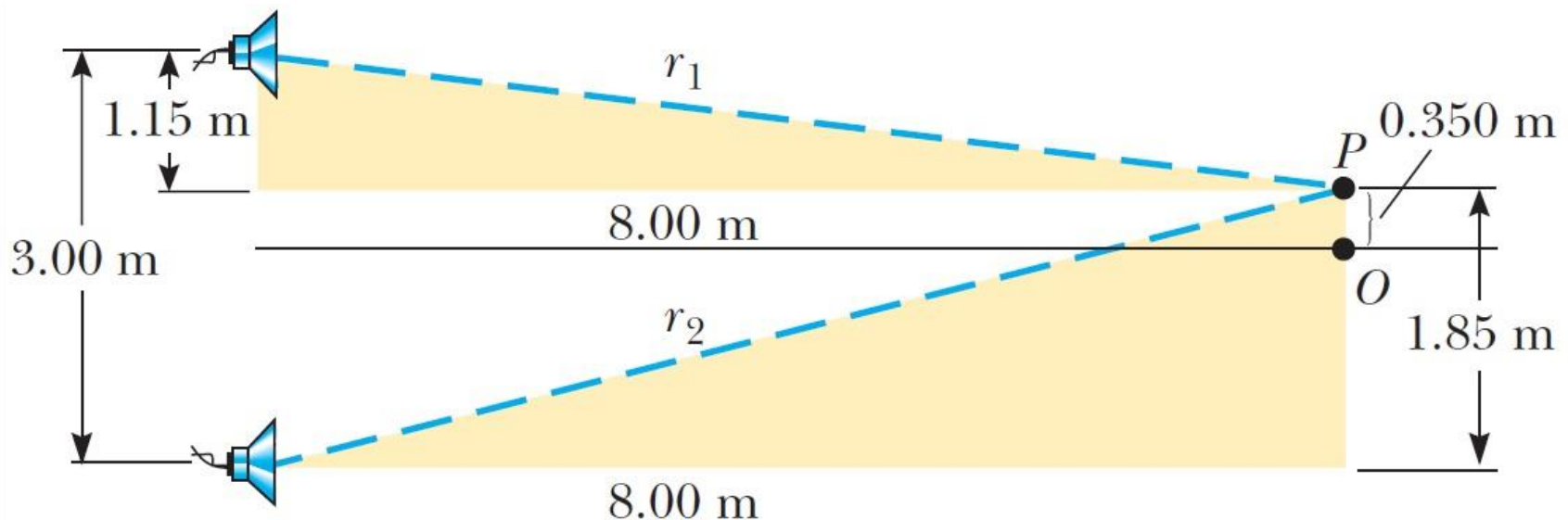
(c) Οι πηγές είναι ξεχωριστές και (μερικώς) εκτός φάσης



Υπέρθεση

◉ Παράδειγμα:

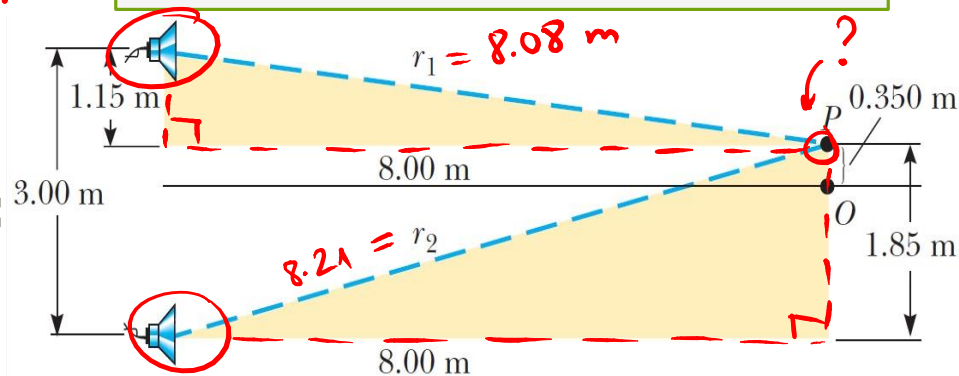
- ◉ Δυο ηχεία απέχουν 3 m μεταξύ τους είναι συνδεδεμένα με το ίδιο στερεοφωνικό. Ένας ακροατής βρίσκεται αρχικά στο σημείο O, που απέχει 8 m από το μέσον της ευθείας που ενώνει τα δυο ηχεία. Στη συνέχεια μετακινείται στο σημείο Σ, το οποίο έχει κάθετη απόσταση 0.35 m από το O και ακούει το πρώτο ελάχιστο της έντασης του ήχου. Ποια είναι η συχνότητα του ήχου;



* Υποθέτουμε κοινή πηγή ήχου: $\Delta\phi = 0$

Υπέρθεση

*
● Παράδειγμα - Λύση:



Το μήκος διαδρομής r_1 ισούται με:

$$r_1^2 = 8^2 + (1.15)^2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{8^2 + (1.15)^2} \simeq 8.08 \text{ m}$$

Αντίστοιχα,

$$r_2^2 = 8^2 + (1.85)^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{8^2 + (1.85)^2} \simeq 8.21 \text{ m}$$

Διαφορετικό
μήκος διαδρ.
για κάθε κύμα!

$$\text{Άρα } \Delta r = |r_2 - r_1| = 8.21 - 8.08 = 0.13 \text{ m}$$

Ο αρακτός ακέραιος το πρώτο ελάχιστο στο σημείο P.

$$\text{Άρα } \Delta r = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \Bigg]_{m=0}^{\downarrow} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\Delta r = 0.26 \text{ m}$$

$$\text{Άρα τελικά } f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343}{0.26} = 1.319 \text{ Hz} \simeq 1.3 \text{ kHz}$$

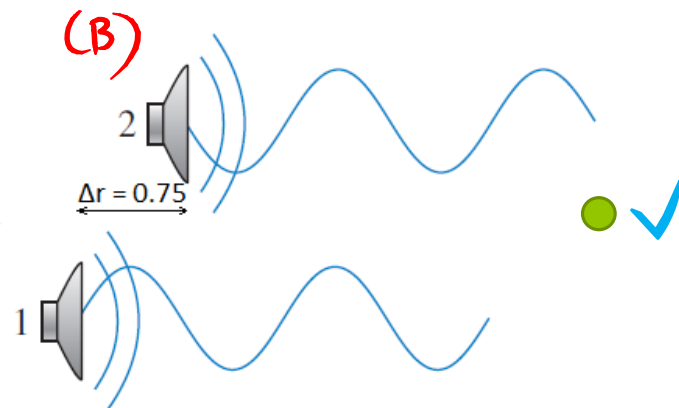
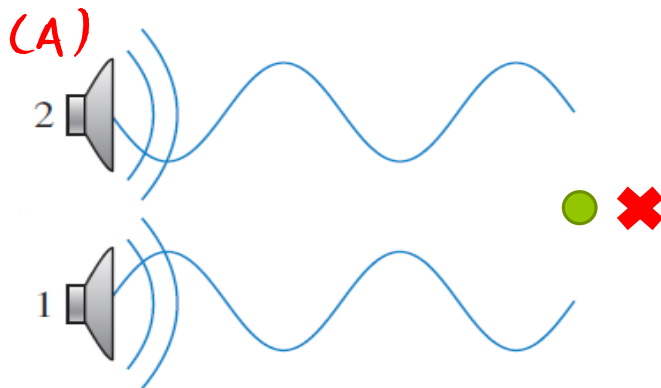
Υπέρθεση

◉ Παράδειγμα:

Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο.

Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους.

Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



Υπέρθεση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?

$$\text{Διάταξη (A): } \left. \begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi \\ \Delta r &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\phi = \Delta\phi = (2m+1)\pi, m=0 = \pi$$

Άρα $\boxed{\Delta\phi = \pi}$ Διαφορά
αρχικών φάσεων

$$\text{Διάταξη (B): } \left. \begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \underline{\pi} \\ \Delta r &= 0.75 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0.75 + \pi = 2m\pi, m=1$$

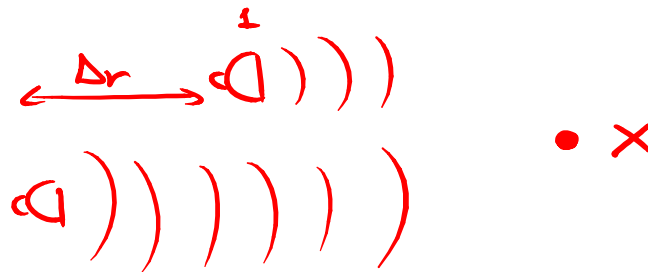
$$\text{Άρα } \Delta\phi = \frac{1.5\pi}{\lambda} = \pi \Leftrightarrow 1.5 = \lambda, \text{ άρα το μέγιστο κύματος είναι } \lambda = 1.5 \text{ m}$$

Υπέρθεση

• Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?

Διάταξη (r):



$$\text{Είναι } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi \Leftrightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{1.5} \Delta r + \pi = (2m+1)\pi \Big|_{m=1} = 3\pi$$

$$\text{Λεα } \frac{2\pi}{1.5} \Delta r = 2\pi \Leftrightarrow \frac{\Delta r}{1.5} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\Delta r = 1.5 \text{ m}}$$



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Στάσιμα Κύματα

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

• Στάσιμα κύματα

- Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους
- Τι θα γίνει αν τα βάλουμε αντικρουστά;
 - Ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος
 - Αντίθετη ταχύτητα
- $y = y_1 + y_2$
 $= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$
 $= (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$
- Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα **στάσιμο κύμα**
 - Γενικότερα, **στάσιμη** λέγεται μια ταλάντωση με **στάσιμο περίγραμμα που αποτελείται από την υπέρθεση δυο όμοιων κυμάτων που ταξιδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις**

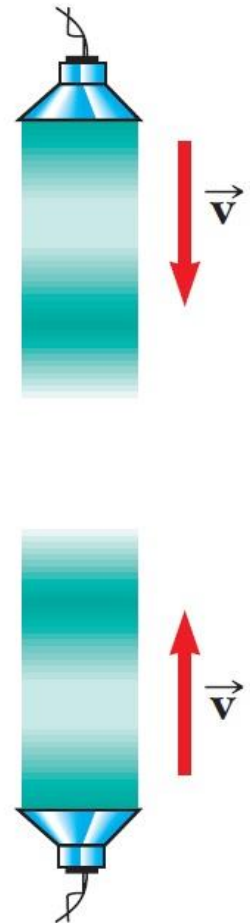


Στάσιμα Κύματα

- *Στάσιμα κύματα*

$$y = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Παρατηρήστε ότι δεν εξαρτάται από την έκφραση $kx - \omega t$
- Άρα **δεν** είναι οδεύον κύμα
- Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα στάσιμο κύμα



Στάσιμα Κύματα

- **Στάσιμα κύματα**

- Ας συγκρίνουμε:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

και

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Τι παρατηρείτε;

- Η δεύτερη περιγράφει μια ειδική μορφή της πρώτης

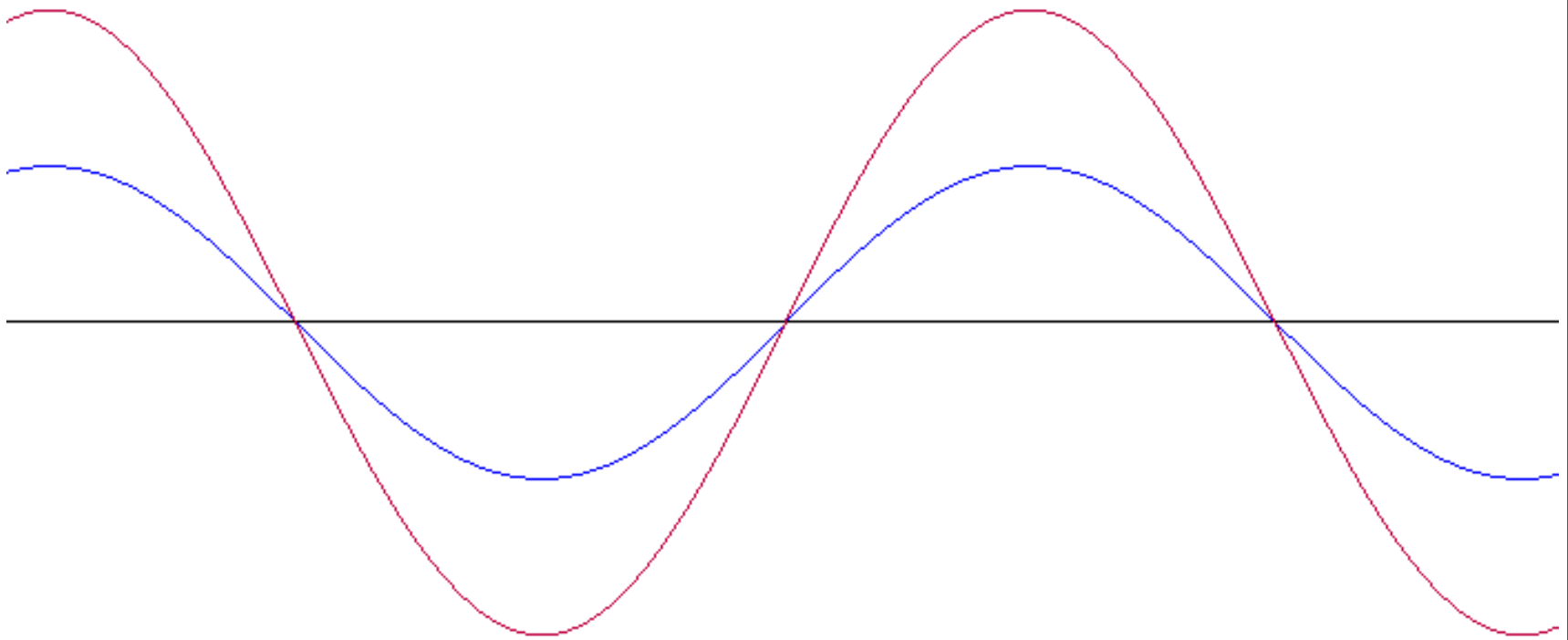
- $\varphi = 0$

- Κάθε στοιχείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

- Πλάτος απλής αρμονικής κίνησης εξαρτάται από τη θέση του, x , στο μέσο

Στάσιμα Κύματα

- *Στάσιμα κύματα*



Στάσιμα Κύματα

- *Στάσιμα κύματα*

$$y = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Πότε μηδενίζεται το πλάτος;

- $kx = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί**

- Πότε μεγιστοποιείται το πλάτος;

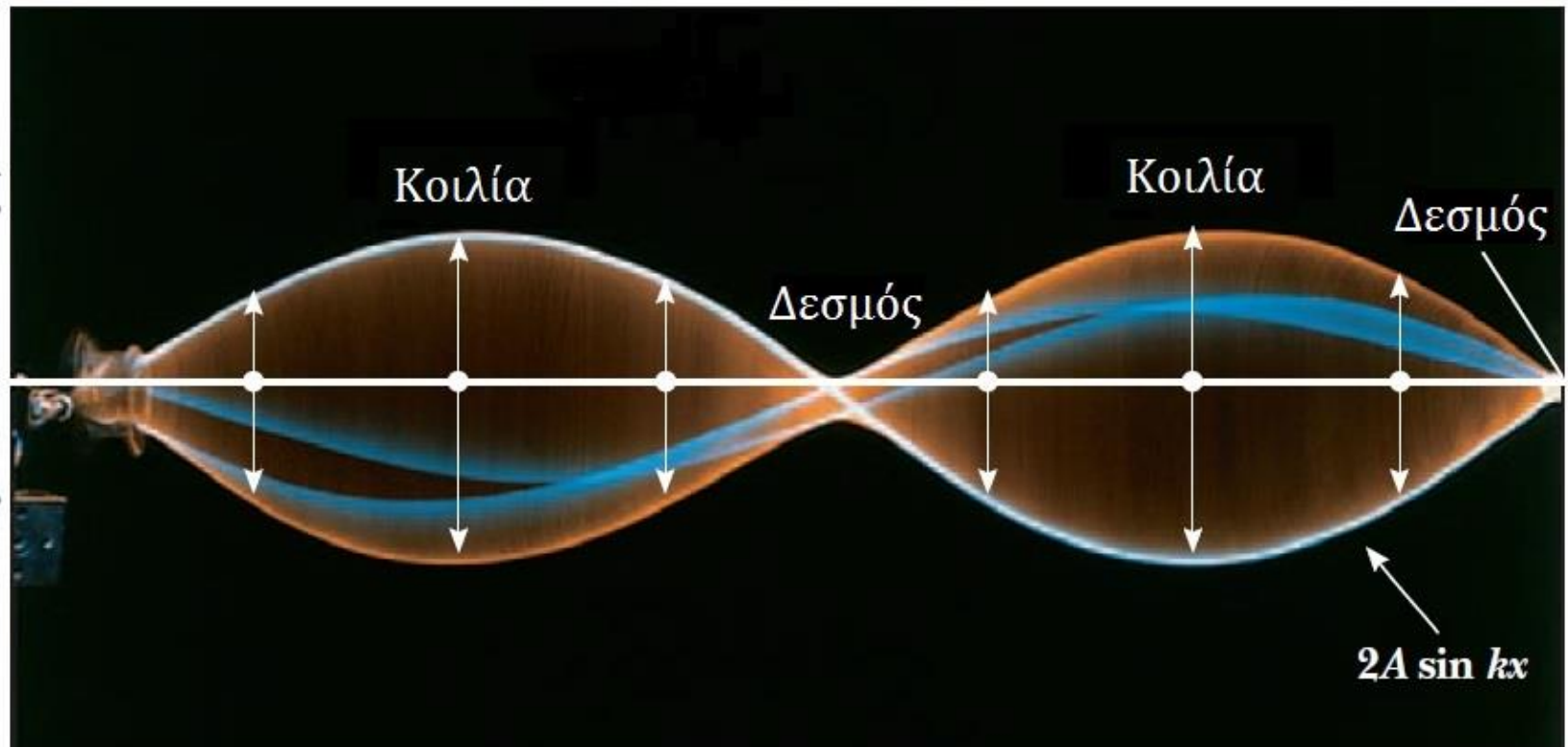
- $kx = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί)**

Στάσιμα Κύματα

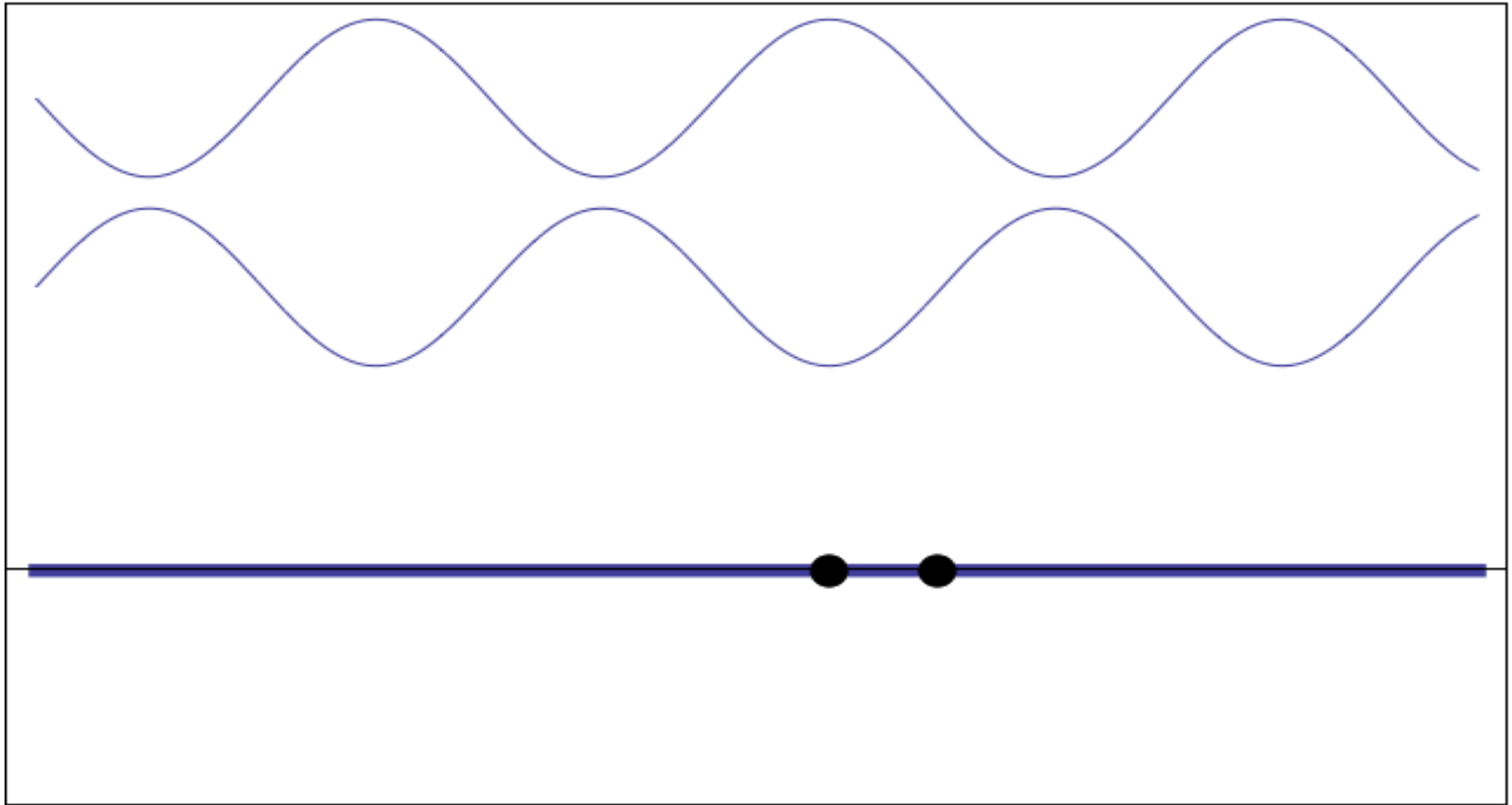
- Στάσιμα κύματα

© 1991 Richard Megna/Fundamental Photographs



Στάσιμα Κύματα

- *Στάσιμα κύματα*



Στάσιμα Κύματα

- *Στάσιμα κύματα*

- Άρα:

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας $= \frac{\lambda}{4}$

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα:

- Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

με x, y να μετρώνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

- Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

- A) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- B) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

$$A) \left. \begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \\ k &= 3, \omega = 2 \\ A &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 8 \sin(3x) \cos(2t)$$

$$\text{αν } x = 2.3 \text{ εκ, τότε } y_{\max} \Big|_{x=2.3 \text{ εκ}} = 8 \sin(3 \cdot 2.3) = 8 \sin(6.9) \approx 4.6 \text{ εκ.}$$

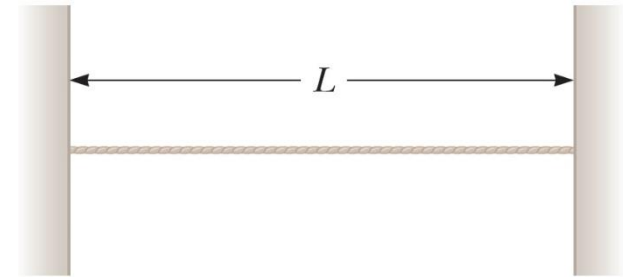
$$B) \text{ Δεσφci: } x_\delta = \frac{n\lambda}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Είναι } k = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow 3 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{Αντιδεσφci: } x_\alpha = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Αρα } x_\delta = \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{\pi}, x_\alpha = \frac{(2n+1)}{4} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Θεωρήστε το νήμα της εικόνας
 - Χορδή κιθάρας, πιάνου

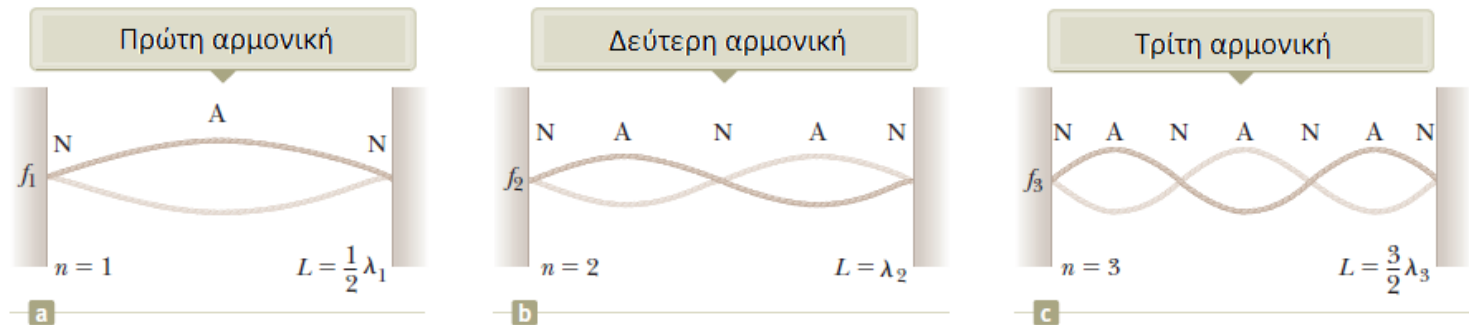


- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα του
 - Άρα το μήκος κύματος είναι προκαθορισμένο
 - Όπως και η συχνότητά του
- Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών ταλαντώσεων στο νήμα, που λέγονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** ή **ιδιομορφές (modes)**
 - Καθεμιά έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα
- Το φαινόμενο όπου μόνο συγκεκριμένες συχνότητες ταλάντωσης οδηγούν σε στάσιμο κύμα λέγεται **κβαντισμός**

Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Κανονικός τρόπος (mode) n
- Περιγράφεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει μισό μήκος κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό



- Μήκη κύματος

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}$$

- Φυσικές συχνότητες

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, n \in \mathbb{N}$$

- Για νήμα τάσης T και γραμμικής πυκνότητας μ ,

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, n \in \mathbb{N}$$

Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

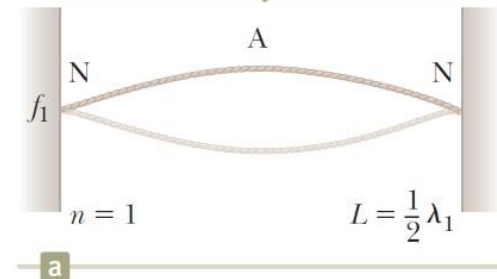
- Κανονικές μορφές (modes) n

- Για $n = 1$, η συχνότητα αυτή λέγεται **θεμελιώδης συχνότητα**

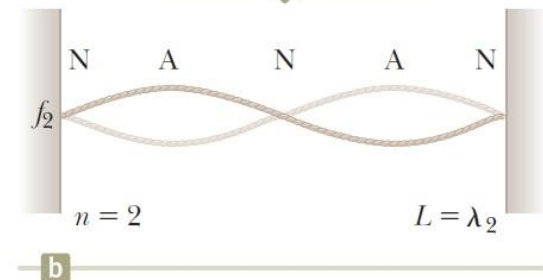
- Οι υπόλοιπες είναι ακέραιες πολλαπλάσιες αυτής

- Συχνότητες κανονικών τρόπων που παρουσιάζουν αυτήν την ακέραια πολλαπλάσια σχέση δημιουργούν **αρμονικές σειρές** και οι τρόποι αυτοί λέγονται **αρμονικές**

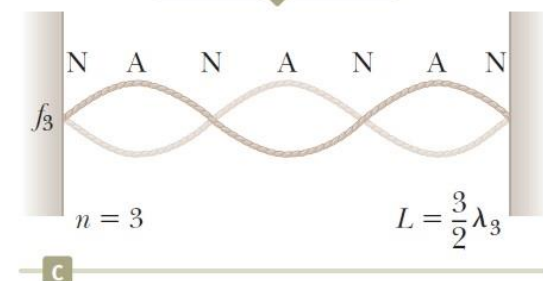
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική



Τρίτη αρμονική

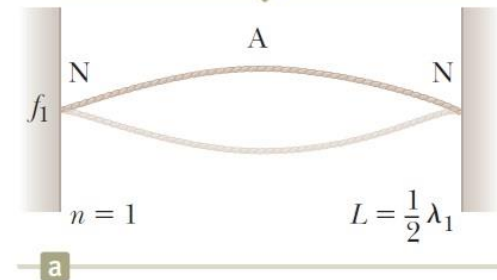


Στάσιμα Κύματα

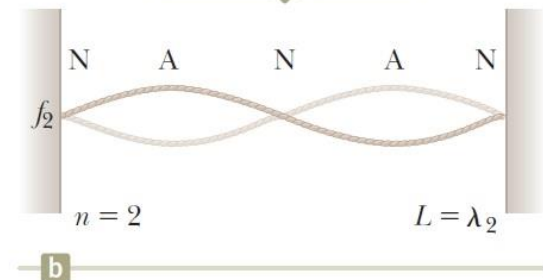
● Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Για να παρουσιαστεί μια μόνο αρμονική, πρέπει να διεγείρουμε το νήμα ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής
 - Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνότητα
 - Δύσκολο να επιτευχθεί για περισσότερες από μια αρμονικές
- Αν διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες θα «επιζήσουν» στο νήμα
 - Αυτά είναι οι αρμονικές ☺

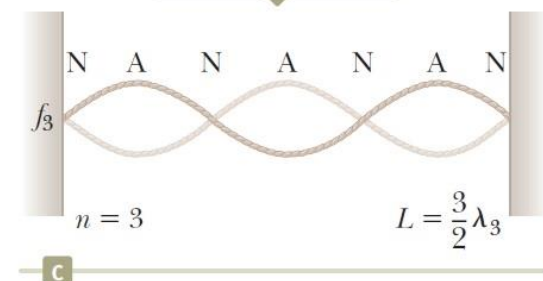
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική



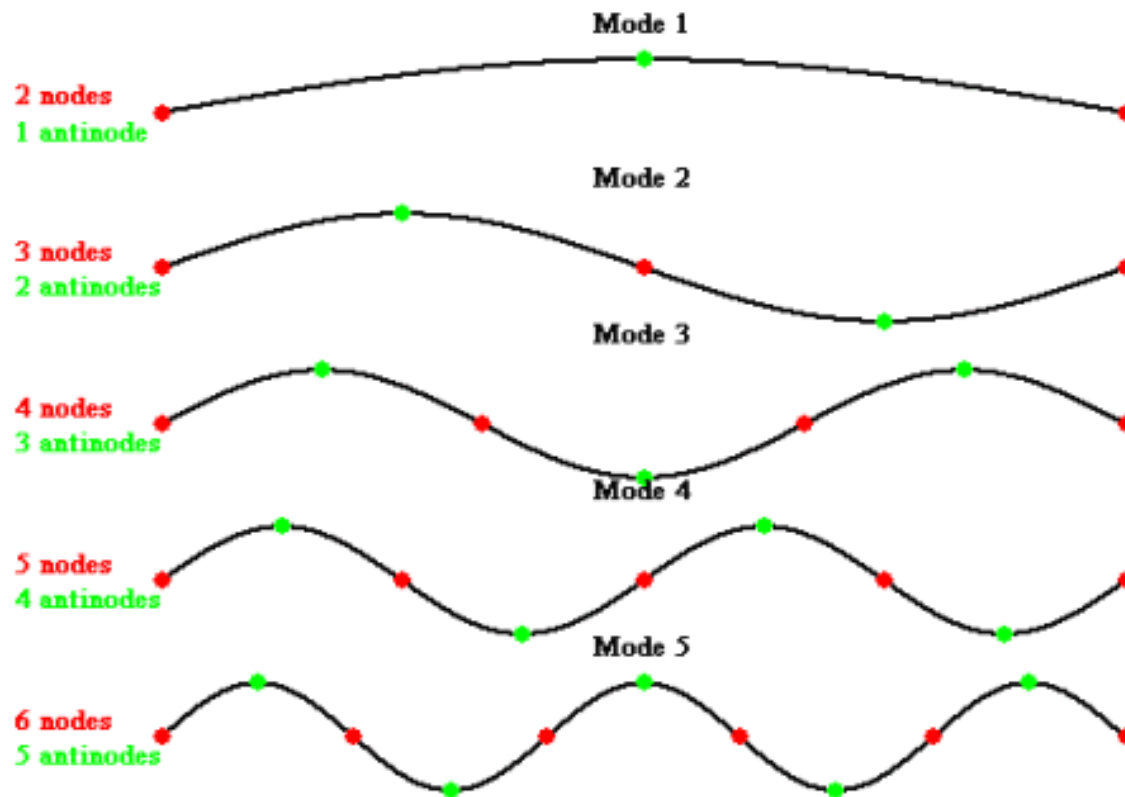
Τρίτη αρμονική



Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες
- Κανονικές μορφές (modes) n

node = δεσμός
antinode = ανυψωτός

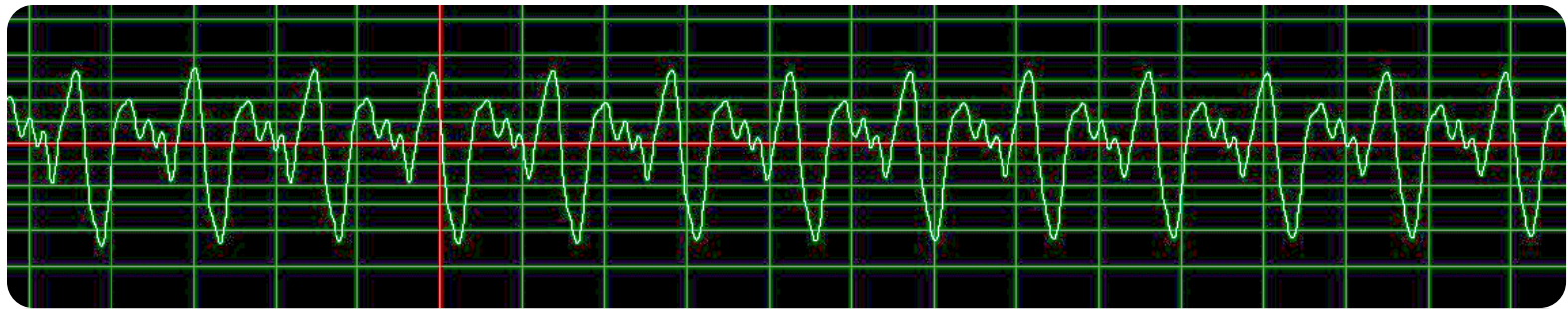


isvr

Στάσιμα Κύματα

- Μη-ημιτονοειδή κύματα

- Πολλά κύματα δεν είναι ημιτονοειδή
- Αν όμως είναι περιοδικά, τότε μπορούν να αναπαρασταθούν ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων
- Παίξιμο μιας νότας στην κιθάρα



- Το άθροισμα αυτό βρίσκεται μέσω μιας τεχνικής που ονομάζεται **Θεώρημα Fourier**
- Το αντίστοιχο άθροισμα ονομάζεται **Σειρά Fourier**

Στάσιμα Κύματα

• Θεώρημα Fourier - Σειρά Fourier

- Έστω μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T
- Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_0 t)$$

με

$$A_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Στάσιμα Κύματα

- **Θεώρημα Fourier - Σειρά Fourier**

- Το θεώρημα Fourier απαντά στην ερώτηση:

- «Πόσα και ποια ημίτονα χρειαζομαι (δηλ. με ποια πλάτη, συχνότητες, και φάσεις) να προσθέσω μεταξύ τους για να παράξω ένα δεδομένο περιοδικό κύμα?»

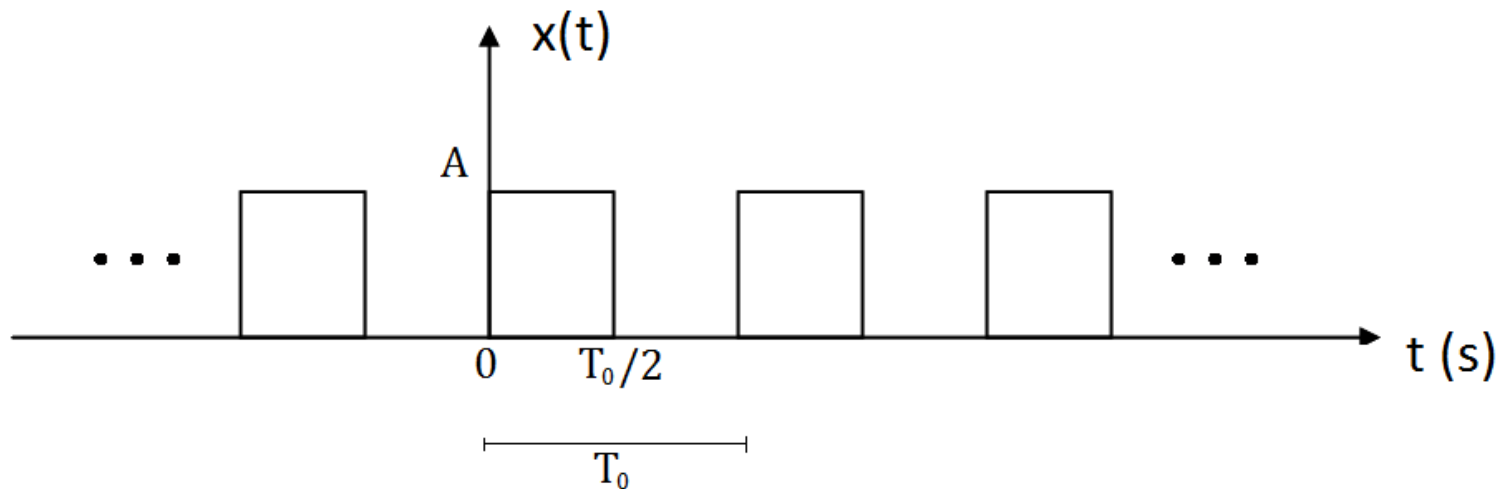
- Εναλλακτικά:

- «Ποιες συχνότητες υπάρχουν μέσα σε ένα δεδομένο περιοδικό κύμα, και πόσο ισχυρή είναι η καθεμιά τους?»

Στάσιμα Κύματα

- Παράδειγμα:

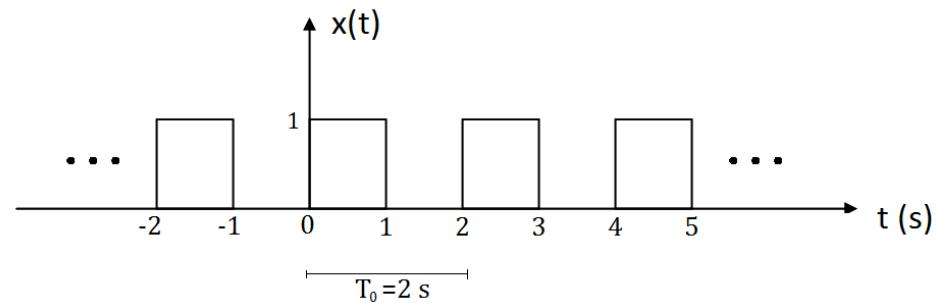
- Έστω το περιοδικό σήμα του σχήματος.



- Μπορείτε να βρείτε ποια ημίτονα και συνημίτονα πρέπει να προσθέσουμε για να το συνθέσουμε;

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα - Λύση:



$$\begin{aligned} \text{Αρχικά, } \beta_0 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A dt = \frac{2A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} dt = \frac{2A}{T_0} t \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{2A}{T_0} \frac{T_0}{2} = A, \end{aligned}$$

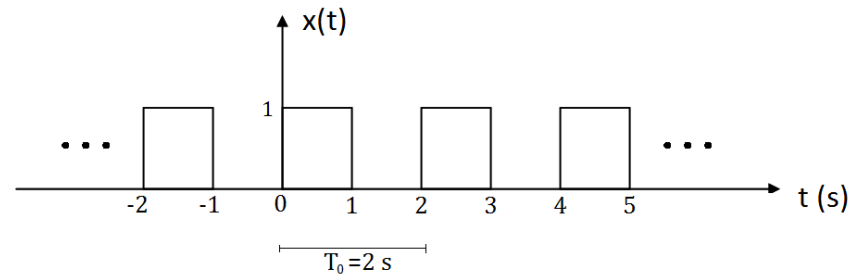
$$\text{άρα } \frac{\beta_0}{2} = \frac{A}{2}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης, } A_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A \sin(n\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{2A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{T_0} \left(-\frac{1}{n\omega_0} \right) (\cos(n\omega_0 t)) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} = \end{aligned}$$

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα - Λύση:

$$\begin{aligned} * \omega_0 &= \frac{2\pi}{T_0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_0 T_0 &= 2\pi \end{aligned}$$



$$= -\frac{2A}{n\omega_0 T_0} \left(\cos(n\omega_0 \frac{T_0}{2}) - \cos 0 \right) \stackrel{*}{=} -\frac{2A}{2\pi n} \left(\cos(n \frac{2\pi}{2}) - 1 \right) =$$

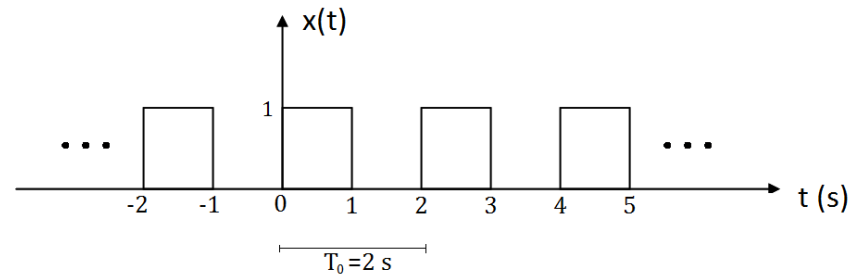
$$= \frac{A}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)). \text{ Όμως } \cos(\pi n) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Άρα}$$

$$A_n = \frac{A}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{2A}{\pi n}, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Στάσιμα Κύματα

◉ Παράδειγμα - Λύση:

$$\ast \underline{\omega_0 T_0 = 2\pi}$$



$$\text{Τέλος, } B_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt =$$

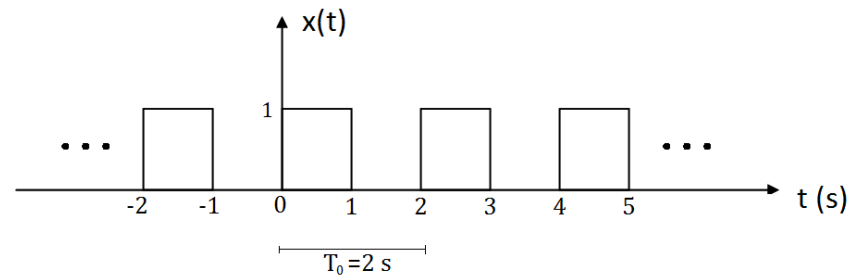
$$= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{T_0} \left(\frac{1}{n\omega_0} \right) \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \stackrel{\ast}{=}$$

$$\stackrel{\ast}{=} \frac{2A}{2\pi n} \left(\sin\left(n \frac{T_0}{2} \omega_0\right) - \sin 0 \right) = \frac{A}{\pi n} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{2}\right) - 0 \right) =$$

$$= \frac{A}{\pi n} \left(\sin(\pi n) \right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα - Λύση:



Άρα ζεδίκω,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 \cdot \cos(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)\omega_0 t). \end{aligned}$$

Οπότε το $x(t)$ αποτελείται από άθροισμα ημιτόνων πλάτους

$$A_n = \frac{2n}{\pi(2n-1)} \text{ και συχνότητες } (2n-1)\omega_0.$$

Στάσιμα Κύματα

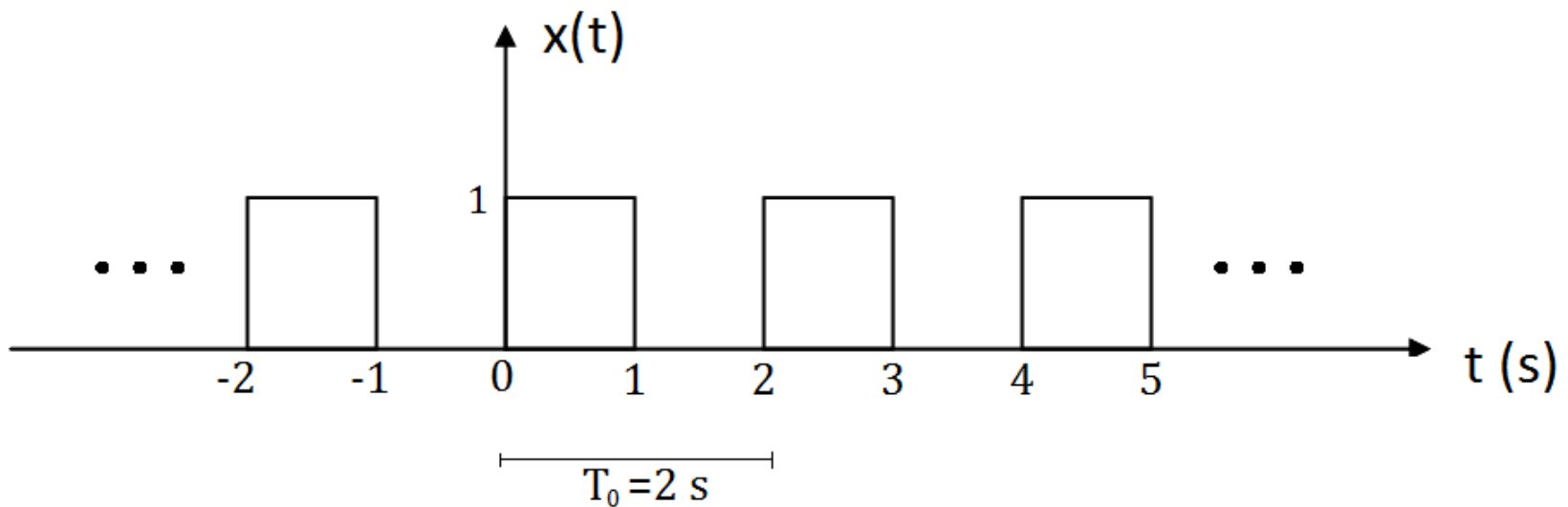
- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Ανάλυση

- Ας βάλουμε αριθμητικά δεδομένα κι ας γράψουμε ένα πρόγραμμα που θα φτιάξει αυτά τα ημίτονα για εμάς

- $T_0 = 2 \text{ s}$

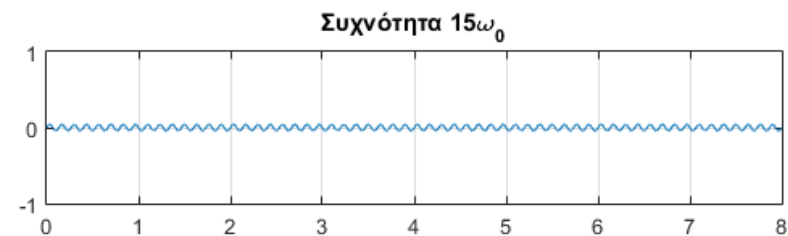
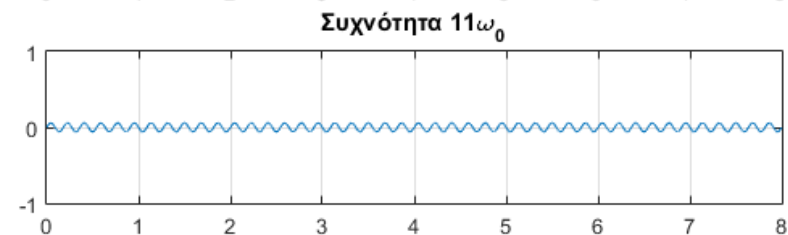
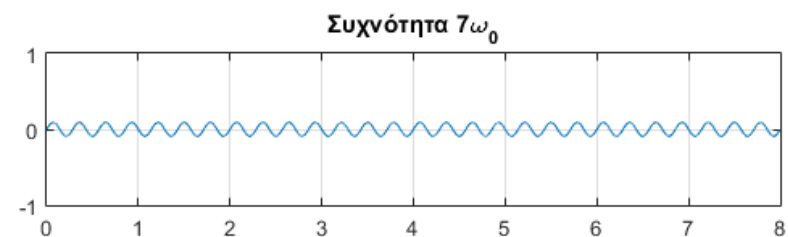
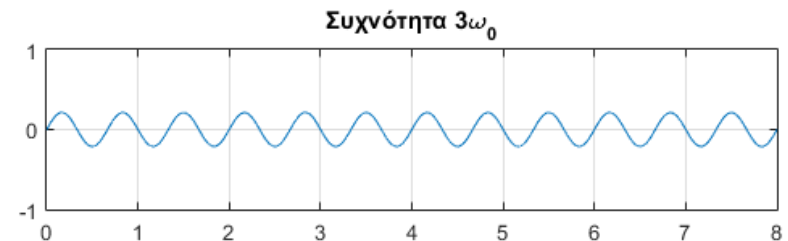
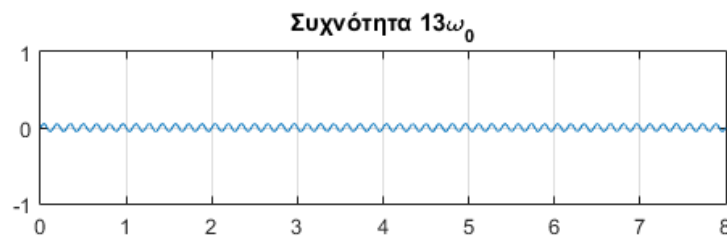
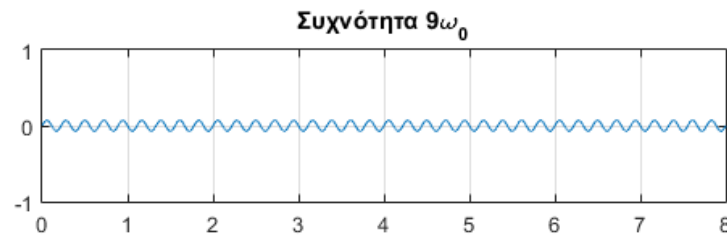
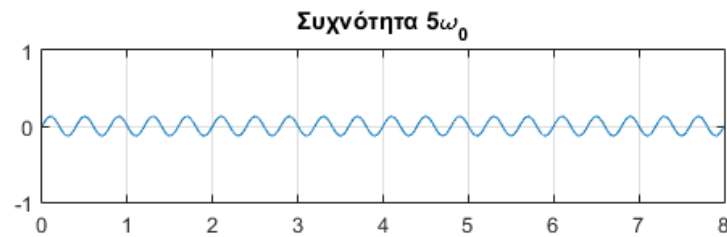
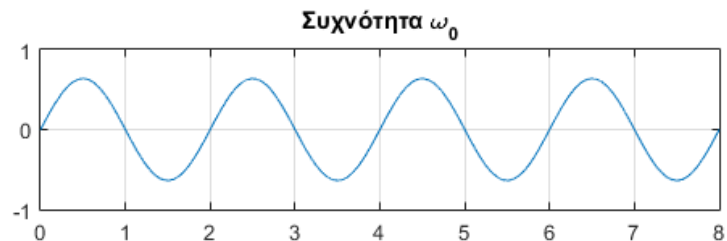
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$

- $A = 1$



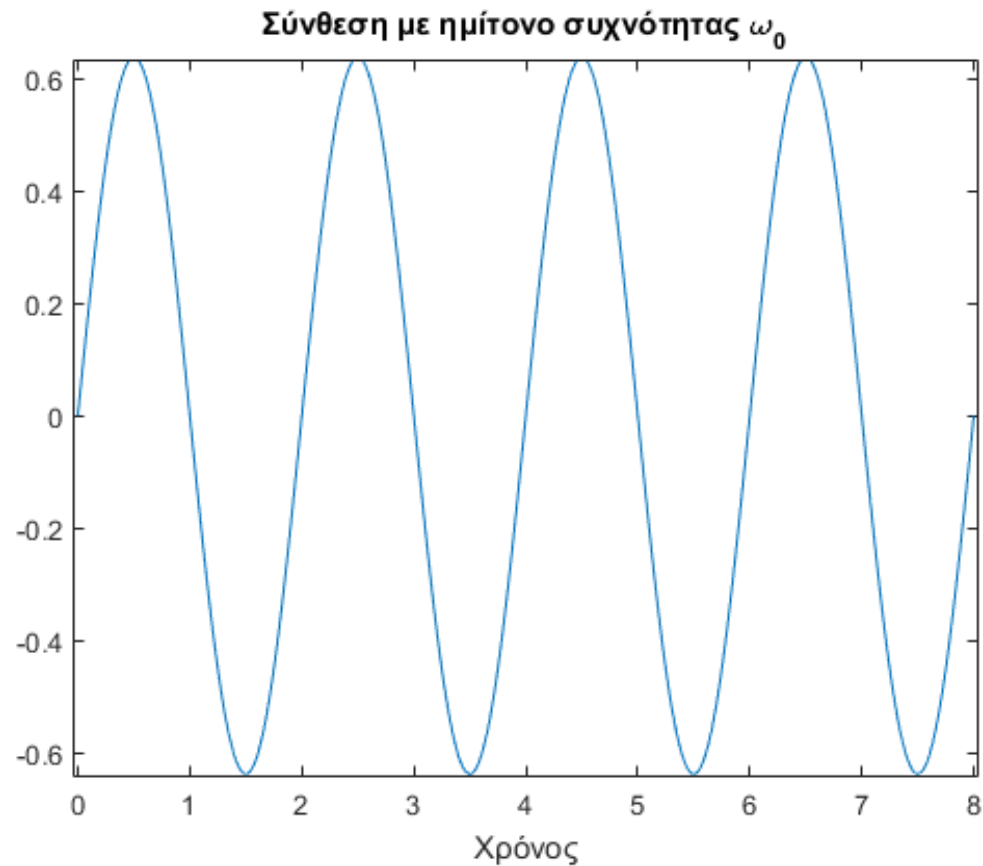
Στάσιμα Κύματα

Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Ανάλυση



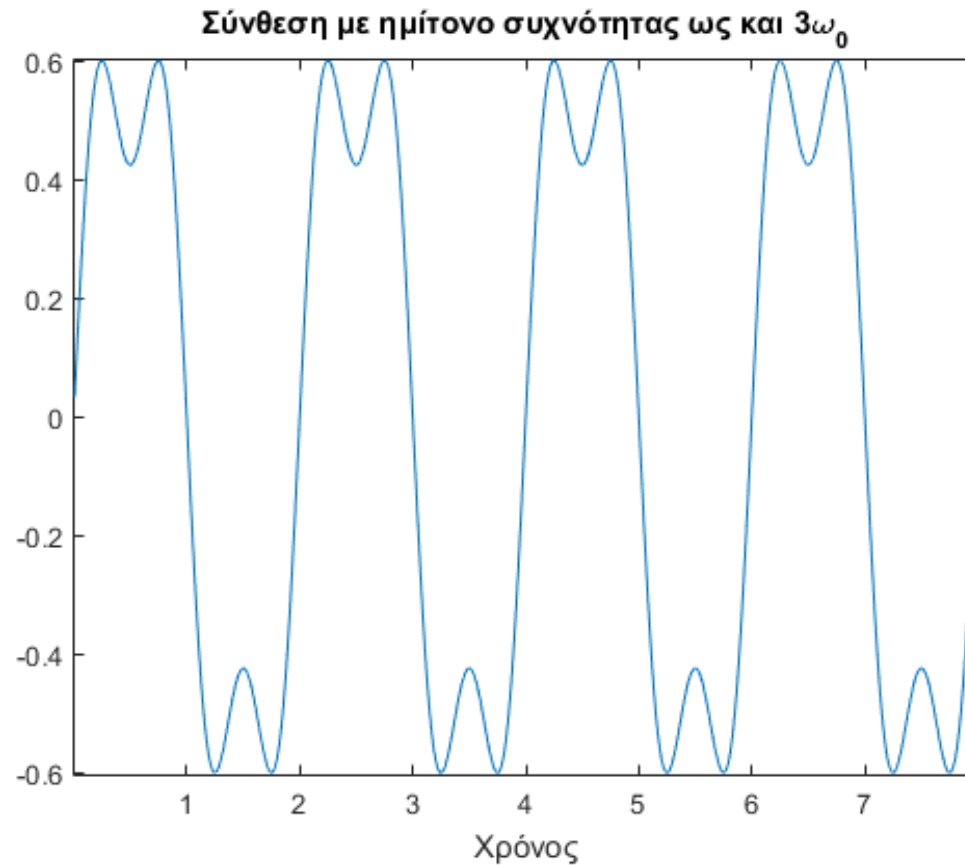
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



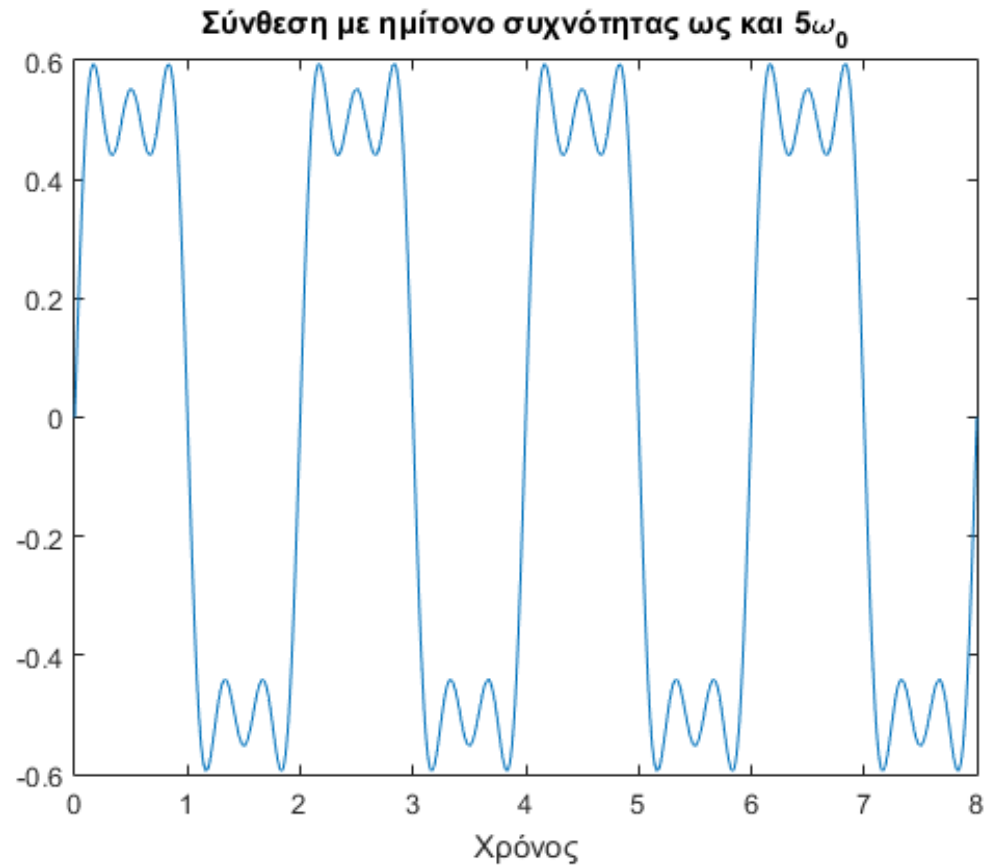
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



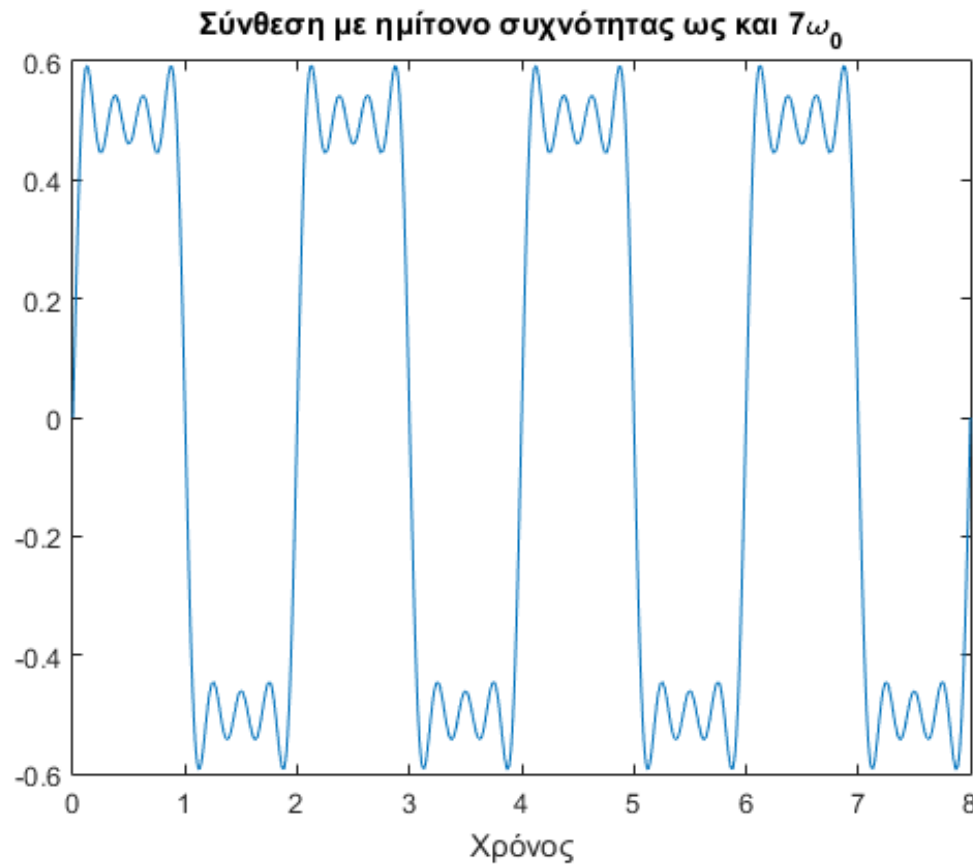
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



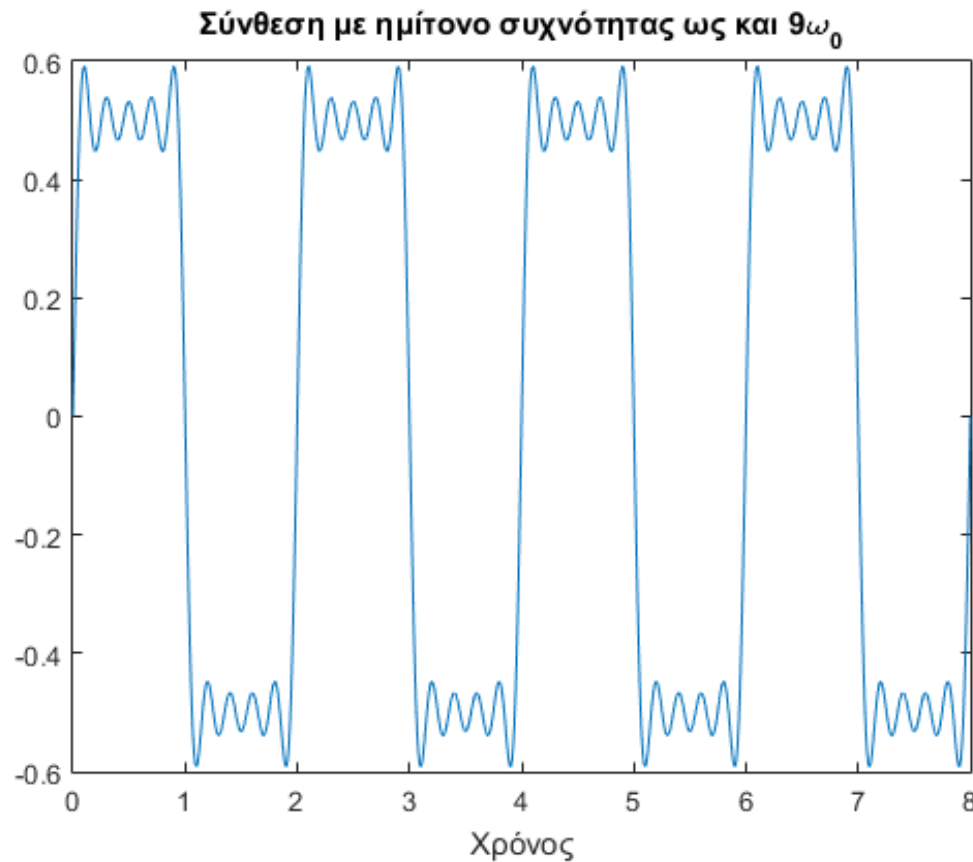
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



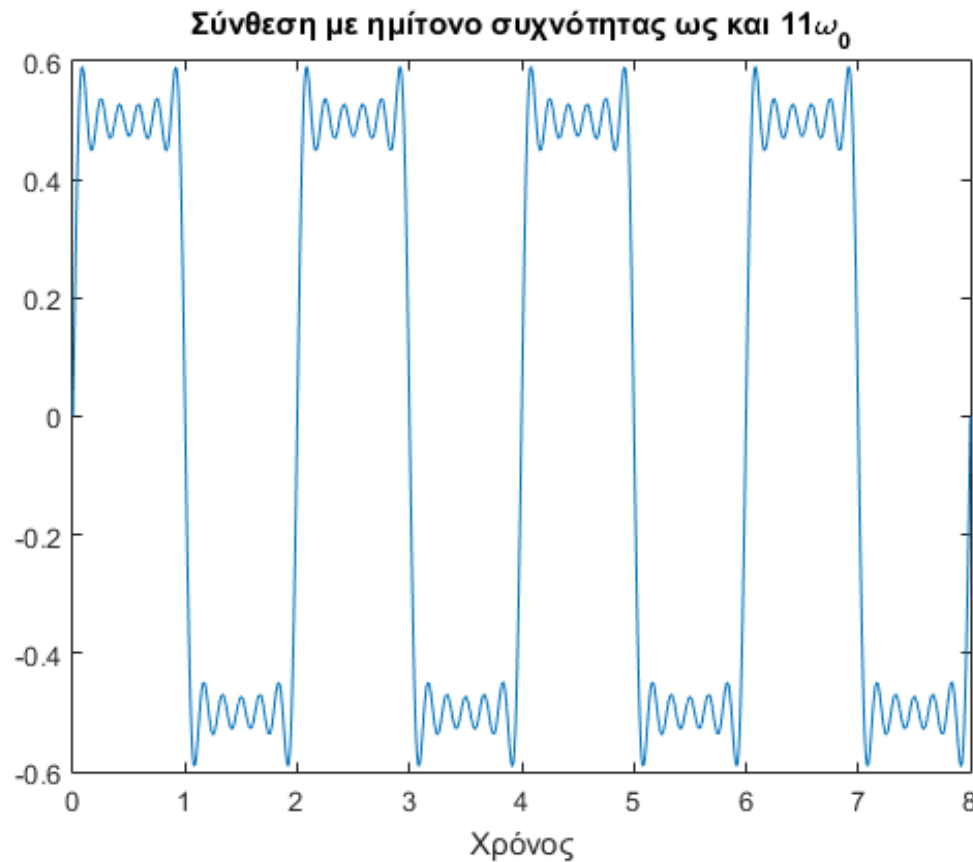
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



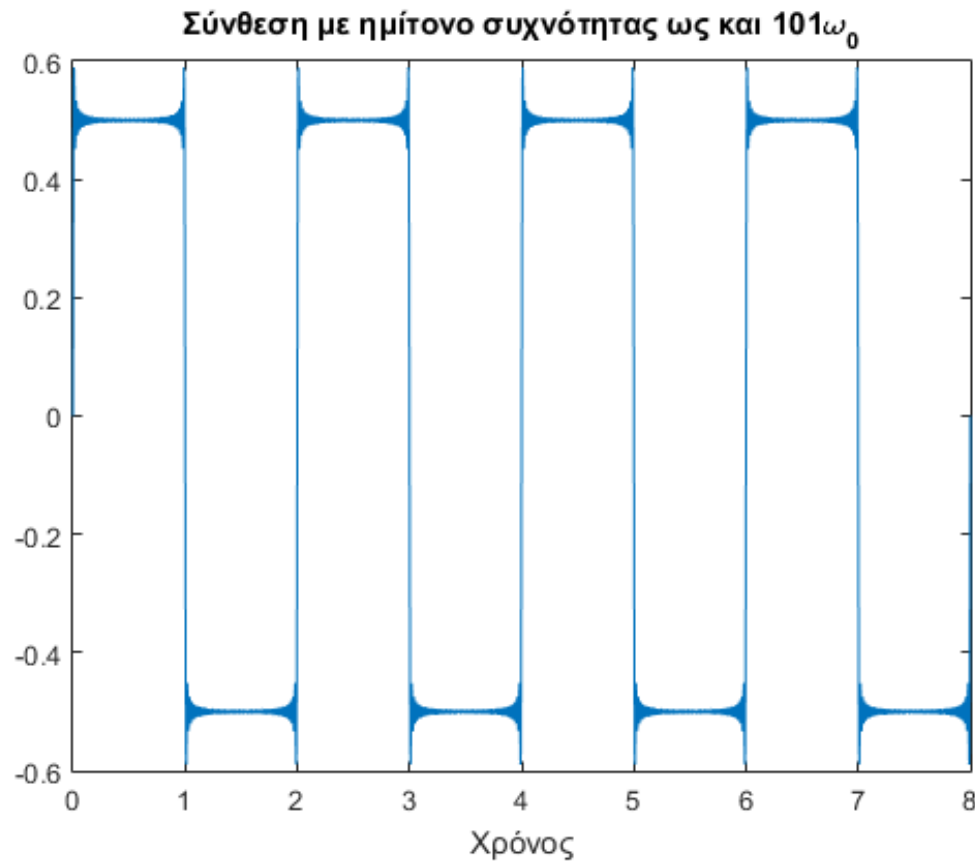
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



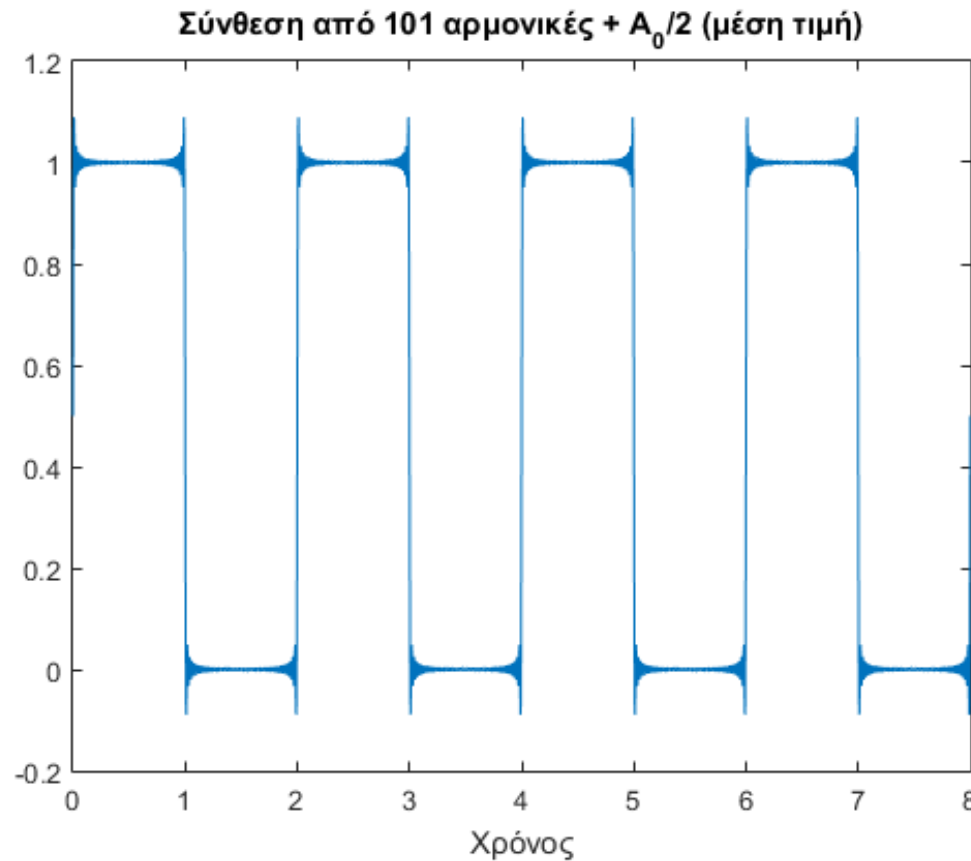
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



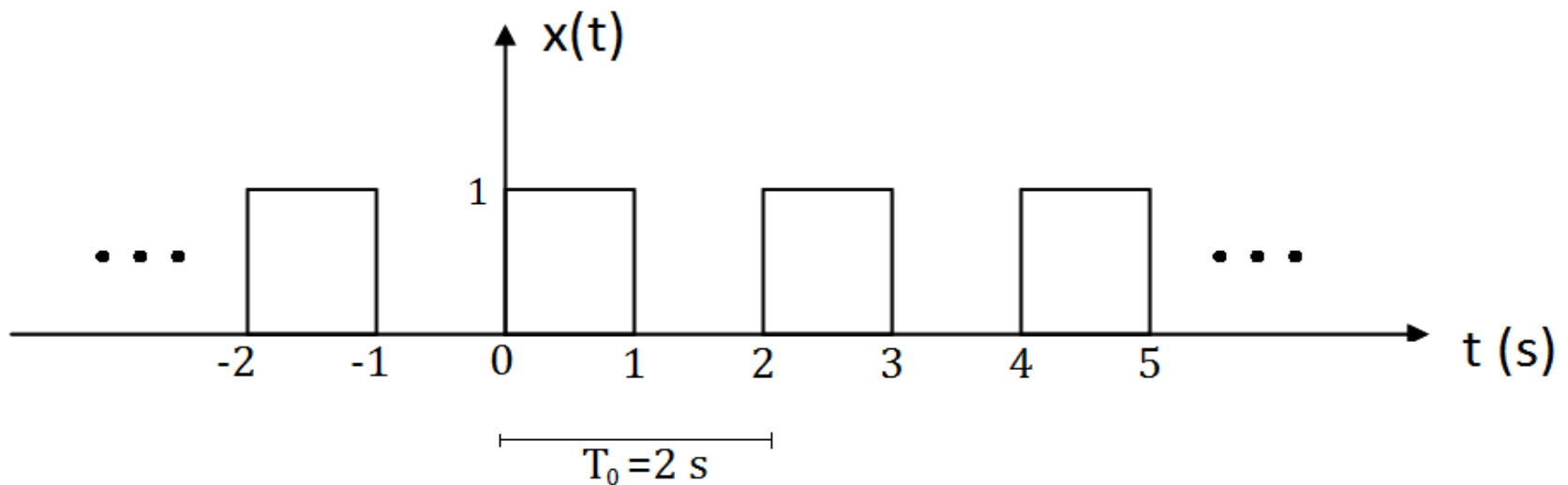
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση



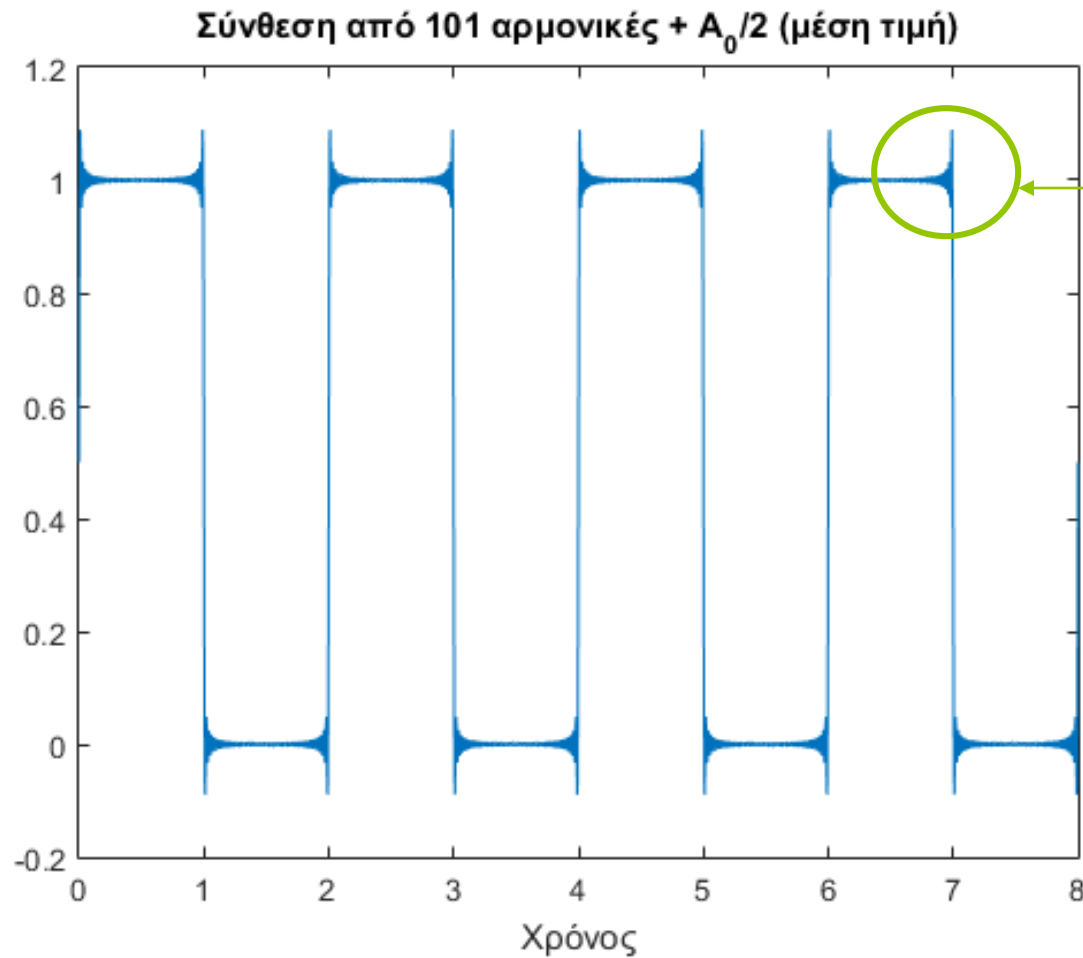
Στάσιμα Κύματα

- Οπτικοποίηση σειράς Fourier – Σύνθεση – Σύγκριση



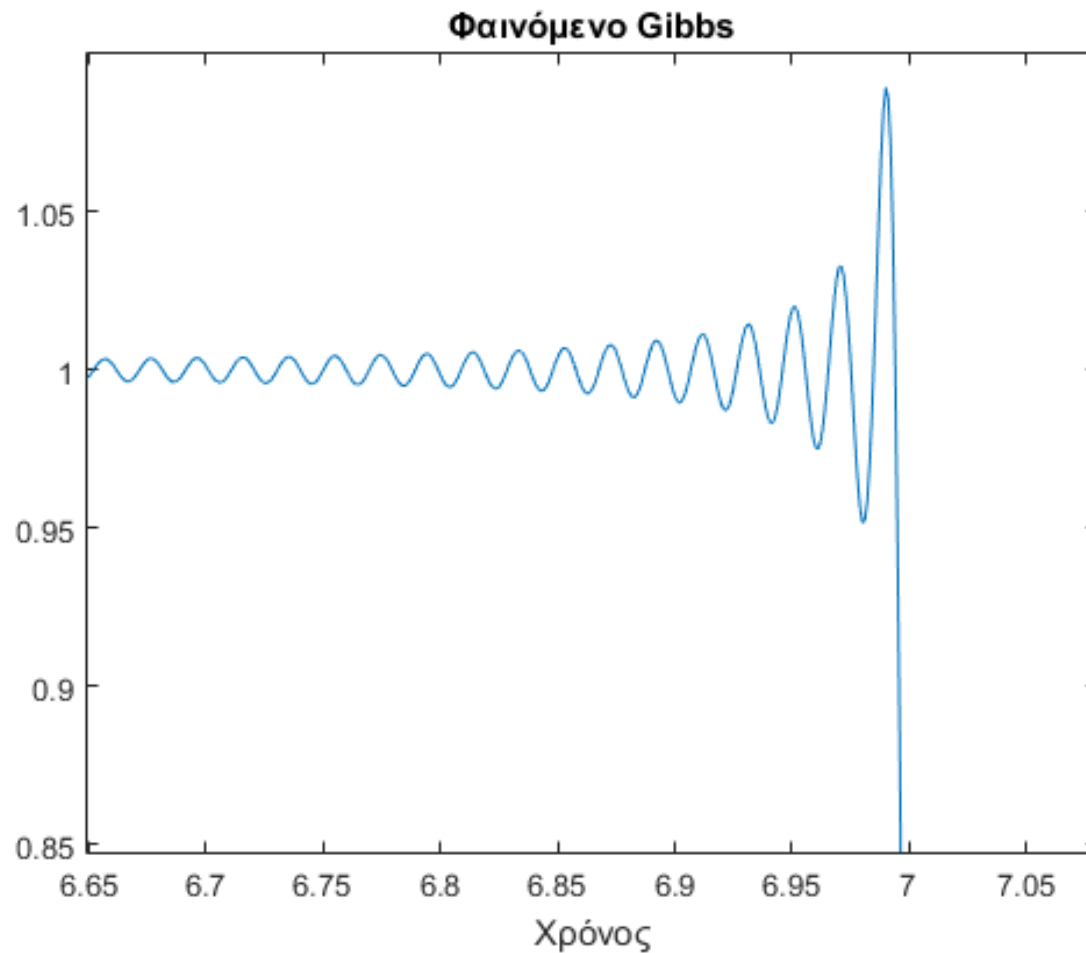
Στάσιμα Κύματα

Φαινόμενο Gibbs



Στάσιμα Κύματα

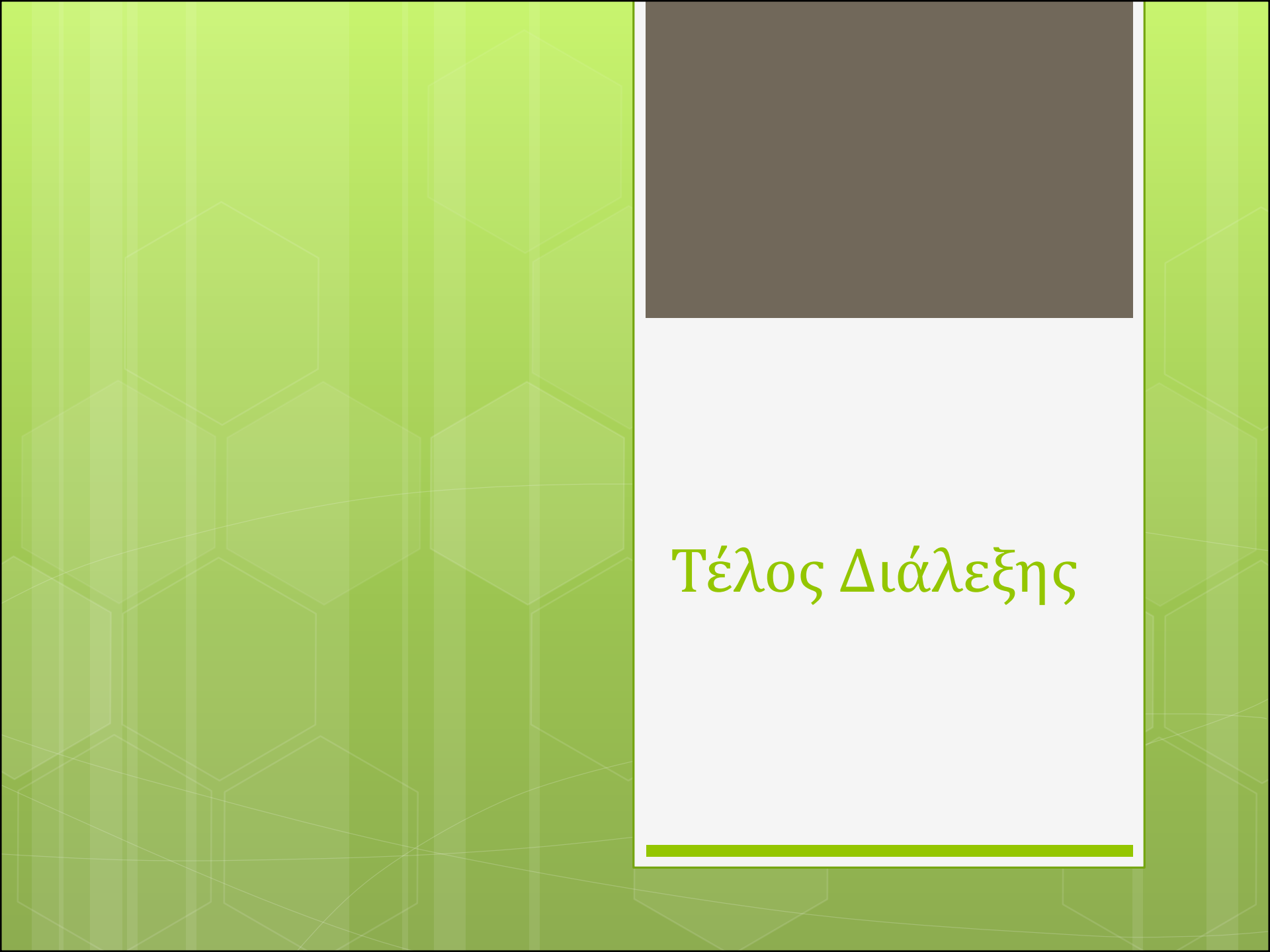
Φαινόμενο Gibbs



Στάσιμα Κύματα

◉ Φαινόμενο Gibbs

- ◉ Ανακαλύφθηκε το 1848 από τον H. Wilbraham
 - ◉ ... και ξανά, το 1899 από τον J. Gibbs
- ◉ Περιγράφει το πώς συμπεριφέρεται μια σειρά Fourier στα σημεία ασυνέχειας
- ◉ Προκύπτει από το ότι δεν μπορεί να αναπαρασταθεί μια ασυνέχεια από ένα άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- ◉ Το φαινόμενο είχε παρατηρηθεί και από φυσικούς, αλλά θεωρήθηκε ως σφάλμα λόγω κακών συσκευών μετρήσεων...



Τέλος Διάλεξης