Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Επανάληψη…

- Με όσα έχουμε δει ως τώρα
  - **Θέση**
  - **Ταχύτητα**
  - **Επιτάχυνση**
  - **Δύναμη**
- και με αρχές όπως ο $2^{ος}$ νόμος του Newton, μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα…

- Στην πράξη, πολλές φορές αντιμετωπίζουμε δυσκολίες…

- Χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση…

Επανάληψη…

- Οι έννοιες που θα συζητήσουμε ίσως σας ξενίσουν…
- Κάποιες άλλες ίσως σας φανούν οικείες, αλλά στη Φυσική απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια…
- Ας ξεκινήσουμε με την έννοια της **ενέργειας**.
  - Ιδέες που έχουμε από την καθημερινότητά μας για την ενέργεια
    - Βενζίνη + πετρέλαιο για μεταφορές και θέρμανση
    - Ηλεκτρισμός για φωτισμό και συσκευές
    - Φαγητό για κατανάλωση

Επανάληψη…

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

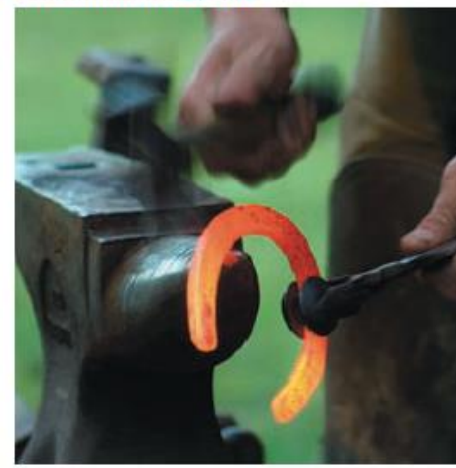
Kinetic energy *K*

Kinetic energy is the energy of motion. All moving objects have kinetic energy. The more massive an object or the faster it moves, the larger its kinetic energy.

Potential energy *U*

Potential energy is stored energy associated with an object's position. The roller coaster's gravitational potential energy depends on its height above the ground.

Thermal energy E_{th}



Thermal energy is the sum of the microscopic kinetic and potential energies of all the atoms and bonds that make up the object. An object has more thermal energy when hot than when cold.

Επανάληψη…

- Τα παραπάνω δεν αποτελούν ακριβή ορισμό της ενέργειας.
  - Γενικότερα, είναι δύσκολο να οριστεί με ακρίβεια
  - Είναι περισσότερο… «αφηρημένη» έννοια
- Ξεκινάμε τη συζήτηση θεωρώντας ένα νέο μοντέλο, το ***σύστημα***
  - Αργότερα, θα μιλήσουμε για μοντέλα ανάλυσης ενός συστήματος
- Προς το παρόν, ας δούμε τι είναι ένα σύστημα και πώς σχετίζεται με την ενέργεια

Επανάληψη…

- Όταν συζητάμε για ένα σύστημα, αγνοούμε τι συμβαίνει εκτός συστήματος
  - …εκτός αν υπάρχει κάποια εξωτερική επιρροή στο σύστημα
- Πρώτο βήμα είναι η **αναγνώριση** του συστήματος
- Συστήματα μπορεί να είναι:
  - Ένα απλό σώμα ή αντικείμενο
  - Πολλά σώματα ή αντικείμενα
  - Μια περιοχή του χώρου
  - Κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος

Επανάληψη…

- Ένα σύστημα μπορεί να επηρεαστεί από το περιβάλλον του, με πολλούς τρόπους
- Ο πρώτος που θα δούμε είναι το **έργο (work)**
- Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα

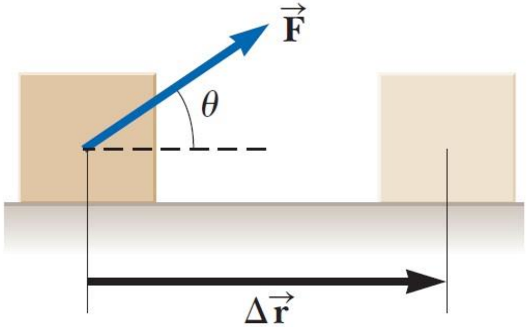
Ενέργεια Συστήματος

- Αναγνωρίζουμε το σύστημα = σπόγγος
- Ερώτημα: **πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με τη δύναμη που βάζουμε (όμοια σε μέτρο σε όλες τις περιπτώσεις) στο να κινήσουμε το σπόγγο;**
- Σε ποια περίπτωση τα καταφέρνουμε καλύτερα;

Ενέργεια Συστήματος

- Ας θεωρήσουμε ένα απλό παράδειγμα

  - Ένα σώμα (σύστημα) που μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια σταθερή δύναμη που του ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο



  - Το **έργο W** που παράγεται στο σύστημα από τη δύναμη που ασκείται στο σύστημα ορίζεται ως
    - το <u>γινόμενο</u> του μέτρου της σταθερής **δύναμης F**, του μέτρου της **μετατόπισης Δr** του σημείου εφαρμογής της δύναμης, και του **συνημιτόνου** της **γωνίας θ** ανάμεσα στα δυο προηγούμενα:

$$W \equiv F\,\Delta r\cos(\theta)$$

Ενέργεια Συστήματος

- Διακρίνετε τη διαφορά με την «κοινή» αίσθησή σας για το έργο;
  - Κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων για 2’
  - Στο τέλος, θα έχετε κουραστεί και θα θεωρείτε ότι «παράξατε αρκετό έργο» επάνω στην μπάλα
  - Η αλήθεια είναι ότι ο ορισμός που μόλις είδαμε θα σας πει ότι $W = 0$!
    - Γιατί απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε
- Επίσης, δείτε ξανά την (c) εικόνα με το σπόγγο.

Ενέργεια Συστήματος

- **Quiz:** Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις σε αύξουσα τιμή έργου

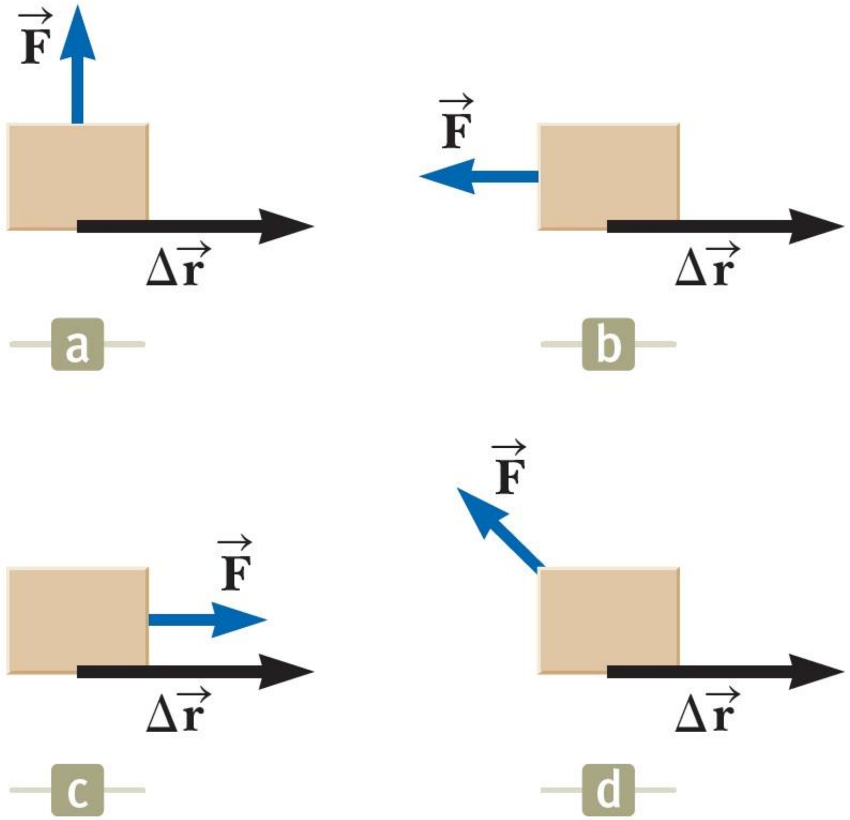
$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$

c

a

d

b



Ενέργεια Συστήματος

- Μονάδα μέτρησης έργου

$$N \cdot m = J\ (Joule)$$

- Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

έργο == μεταφορά ενέργειας

- Αν W είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε
  - **Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>προς</u> το σύστημα
  - **Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>από</u> το σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

- Η μαθηματική έκφραση

$$\boldsymbol{W} \equiv \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})$$

  μοιάζει περίεργη…

- Προκύπτει από το μαθηματικό εργαλείο που λέγεται **εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων**

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ισούται με

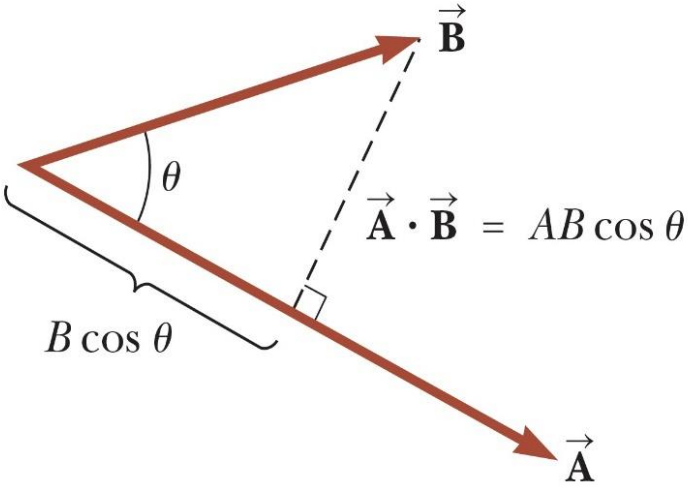
$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})$$

- Άρα το έργο $\boldsymbol{W}$ μπορεί να γραφεί ως $\vec{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}$ **!**

Ενέργεια Συστήματος

- Ας πούμε λίγα για το εσωτερικό γινόμενο

- Προσέξτε ότι $B\ \cos(\theta)$ είναι το μέτρο της προβολής του $\vec{\mathrm{B}}$ στο $\vec{\mathrm{A}}$!



- Άρα το εσωτερικό γινόμενο ισούται με το μέτρο του $\vec{\mathrm{A}}$ επί το μέτρο της προβολής του $\vec{\mathrm{B}}$ στο $\vec{\mathrm{A}}$!

Ενέργεια Συστήματος

- Αντιμεταθετικότητα

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

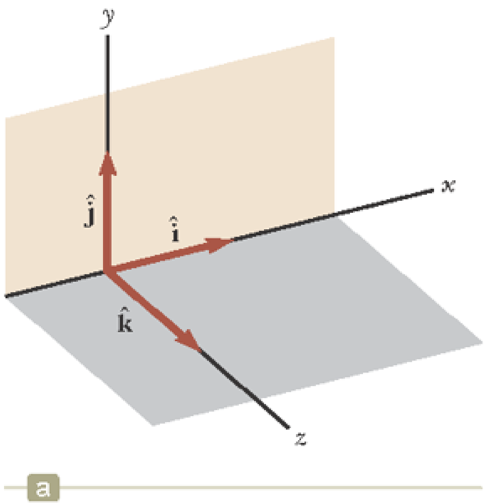
- Επιμεριστικότητα

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

- Ειδικές περιπτώσεις
  - $\vec{\mathrm{A}} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
  - $\vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$
  - $\vec{A} \uparrow\downarrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}||\vec{B}|$

Ενέργεια Συστήματος

- Μοναδιαία διανύσματα $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$
  - Ορίζουν ένα 3Δ σύστημα συντεταγμένων



- Εύκολα αποδεικνύεται (do it! ☺) ότι

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$$

- Για $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y j + A_z\hat{k}, \quad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y j + B_z\hat{k},$

έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Ενέργεια Συστήματος

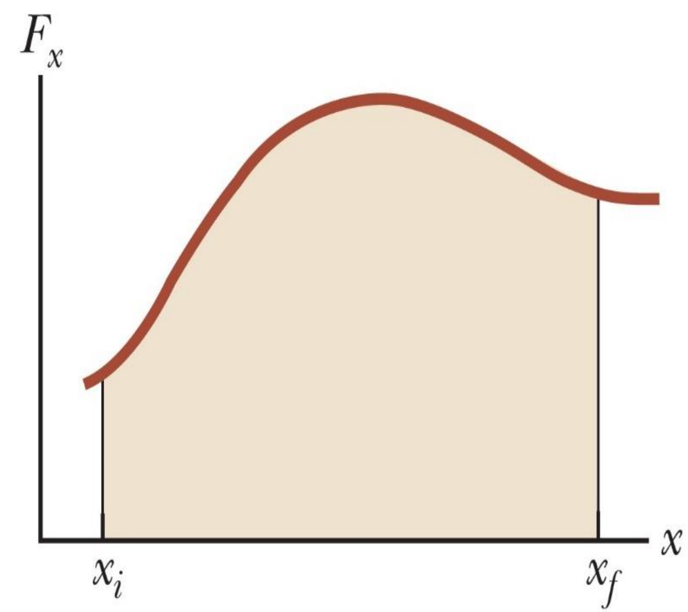
- **Παράδειγμα**
  - Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{r} = 2.0\hat{\imath} + 3.0\hat{\jmath}$ m λόγω μιας σταθερής δύναμης $\vec{\mathrm{F}} = 5.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath}$ N που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο.

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (5\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2$$
$$= 10 + 6$$
$$= 16 \text{ J}$$

Ενέργεια Συστήματος

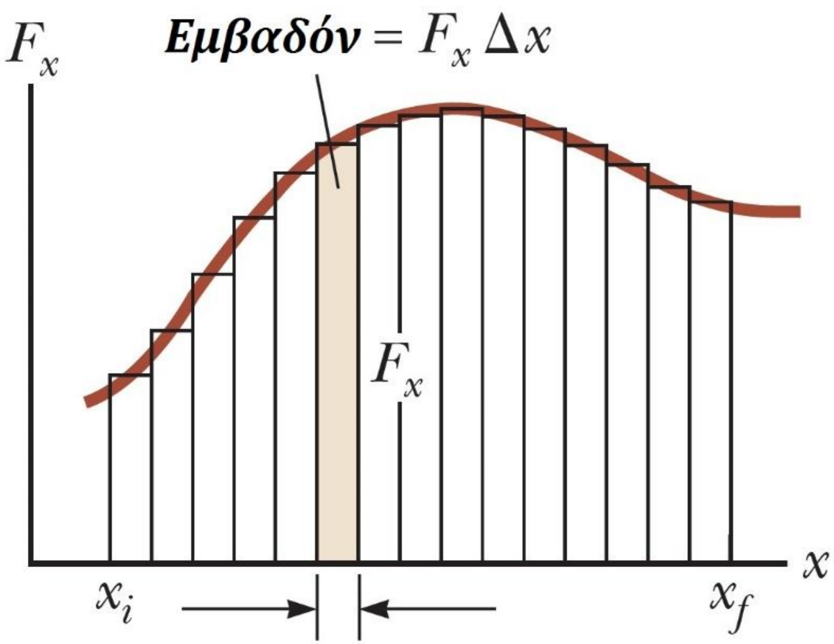
- Συζητάμε τόση ώρα για έργο υπό σταθερή δύναμη
  - Τι γίνεται όταν η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη αλλά η κίνηση εξακολουθεί να είναι ευθύγραμμη;
  - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που είδαμε!

- Παράδειγμα:
  - Η x-συνιστώσα της δύναμης μεταβάλλεται κατά την κίνηση



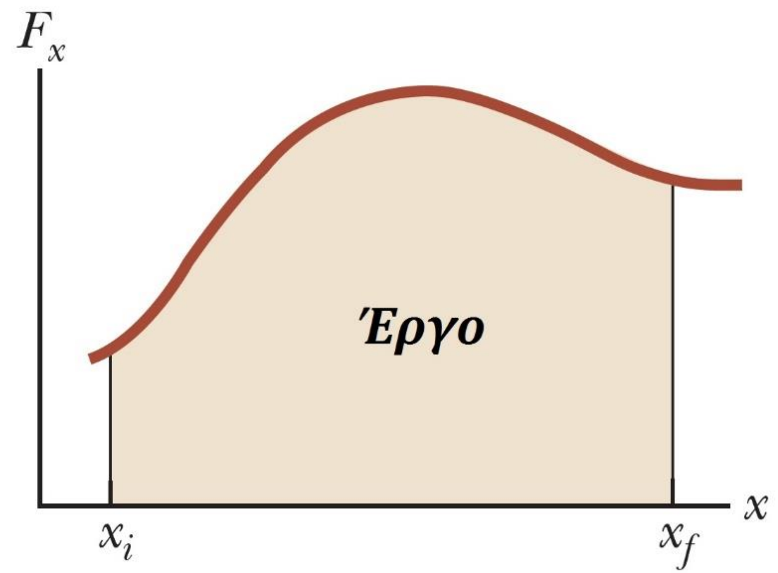
Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για απειροστά μικρά διαστήματα Δx) σταθερή!
- Παράδειγμα:
  - Χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα Δx.
  - Σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε έργο W_j, που ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παραλληλογράμμου.



Ενέργεια Συστήματος

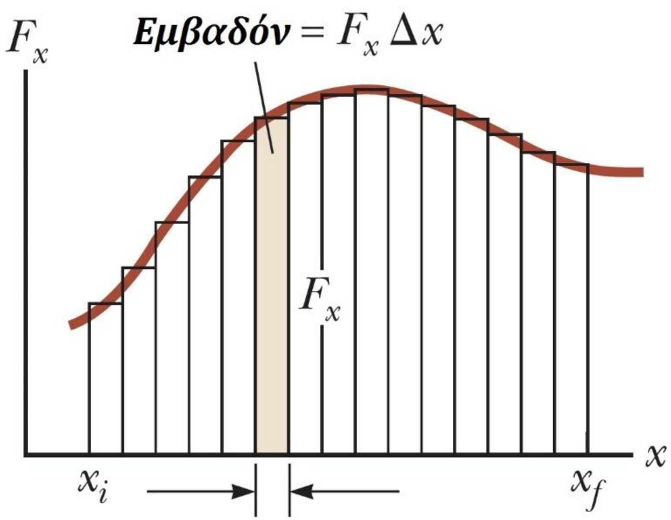
- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για απειροστά μικρά διαστήματα Δx) σταθερή!
- Παράδειγμα:
  - Το συνολικό έργο είναι $\sum_j W_j$
  - Όταν τα διαστήματα γίνονται απειροστά μικρά ($\Delta x \rightarrow 0$), τότε το συνολικό έργο ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη!

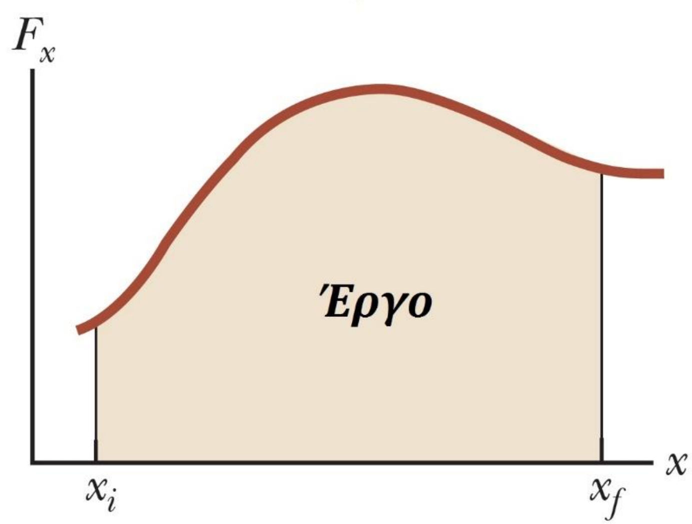


Ενέργεια Συστήματος

- Με μαθηματικά,

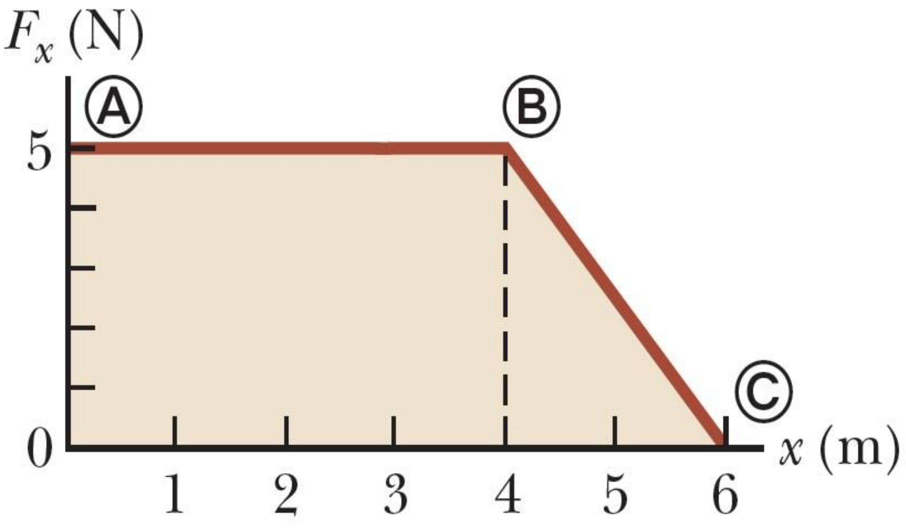
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$





Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα**
  - Μια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση, όπως στο Σχήμα.
    Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό κινείται από x=0 ως x=6 cm.



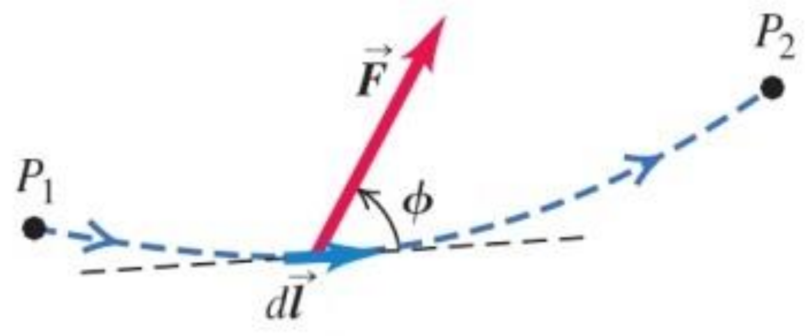
Ενέργεια Συστήματος

- Για τη <u>γενική περίπτωση</u> όπου η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μεταβλητή σε μέτρο ή/και κατεύθυνση, και η μετατόπιση δεν ακολουθεί ευθεία γραμμή, χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$W_{o\lambda} = \sum dW = \int \left(\sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα σωματίδιο που κινείται σε μη ευθύγραμμο μονοπάτι, όπως στο Σχήμα.



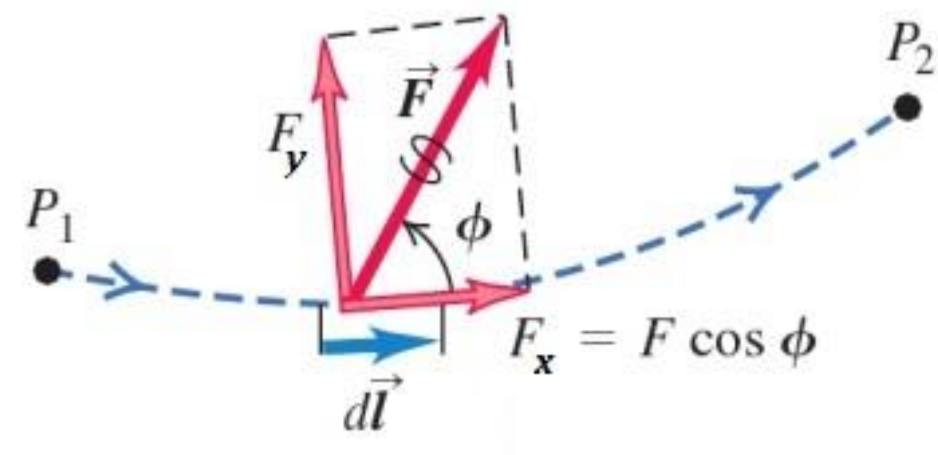
- Έστω ότι η δύναμη είναι κατά μέτρο σταθερή. Ορίζουμε μια απειροστά μικρή μετατόπιση $d\vec{l}$. Εφαρμόζουμε τον τύπο που είδαμε πριν:

$$W_{o\lambda} = \sum dW = \int \left(\sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- Ας δούμε πως εφαρμόζεται η παραπάνω σχέση.

Ενέργεια Συστήματος

- Αναλύουμε σε συνιστώσες τη δύναμη $\vec{F}$



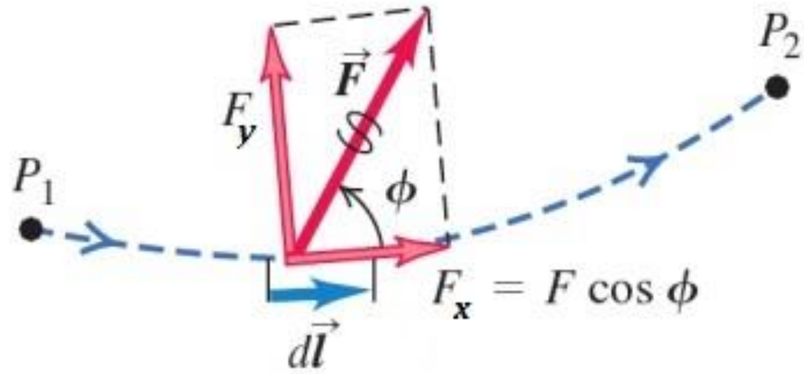
- Μόνο η συνιστώσα παράλληλη με τη μετατόπιση $d\vec{l}$ συνεισφέρει στο έργο της $\vec{F}$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} F \cos\varphi \, dl$$

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} F \cos\varphi \, dl$$



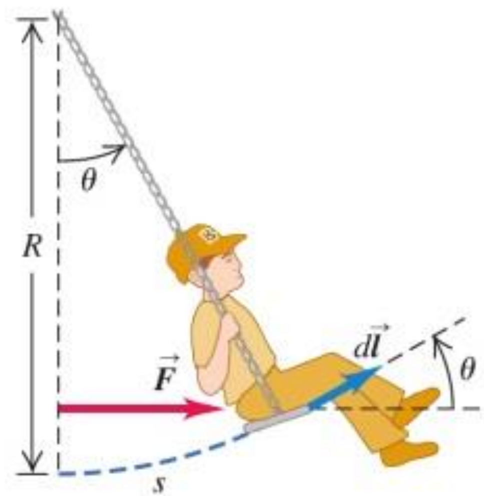
- Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, πρέπει να γνωρίζουμε μια λεπτομερή περιγραφή της διαδρομής P_1-P_2 ή/και τον τρόπο με τον οποίο η F μεταβάλλεται (αν συμβαίνει αυτό)

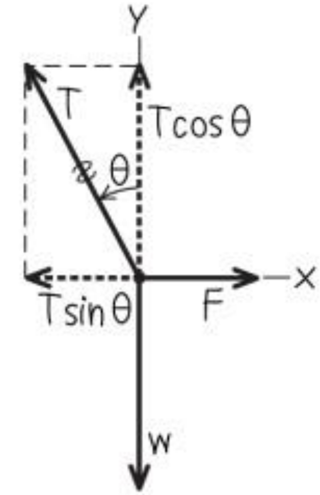
- Συχνά εκφράζουμε τη μετατόπιση dl συναρτήσει άλλων ποσοτήτων, πιο εύκολα υπολογίσιμων

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα (μεταβαλλόμενη δύναμη και διαδρομή):**

  Ένα αγόρι μάζας m χρησιμοποιεί κούνια μήκους R, και φτάνει σε ανώτατη γωνία θ_c όταν υποστεί **μεταβαλλόμενη** δύναμη F, η οποία είναι αρχικά μηδενική. Θεωρήστε ότι η κίνηση γίνεται πολύ αργά ώστε να θεωρείται ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία κάθε στιγμή. Θεωρήστε ότι το σχοινί και η κούνια έχουν αμελητέο βάρος. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη F.





Ενέργεια Συστήματος

$s = R \cdot \theta \rightarrow$ rad

- **Παράδειγμα - Λύση**

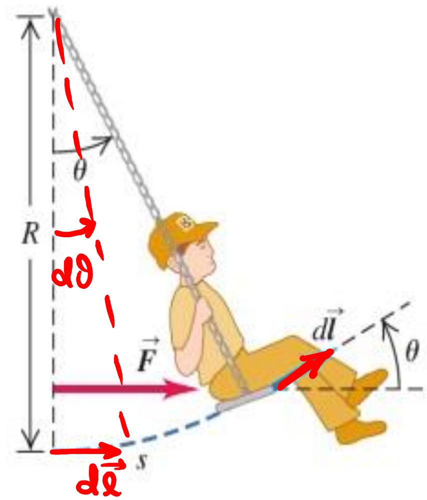
μάζα m, κούνια μήκους R, ανώτατη γωνία θ_c, δύναμη F, η οποία είναι αρχικά μηδενική. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη F.

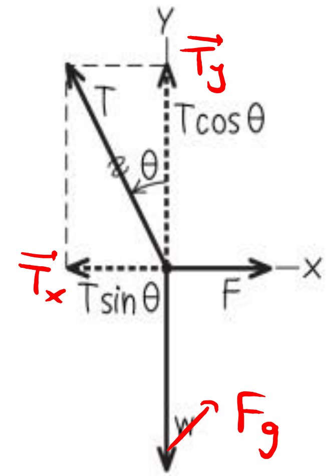
Το σώμα ισορροπεί και στους δύο άξονες:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} + \vec{T}_x = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - T\sin\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F = T\sin\theta} \quad (1)$$





$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_y + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0 \Leftrightarrow \boxed{mg = T\cos\theta} \quad (2)$$

Το έργο W_F δίνεται ως:

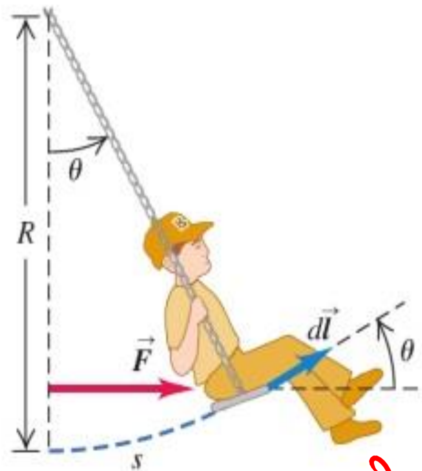
$$W_F = \Sigma\, dW = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\, dl \quad (3)$$

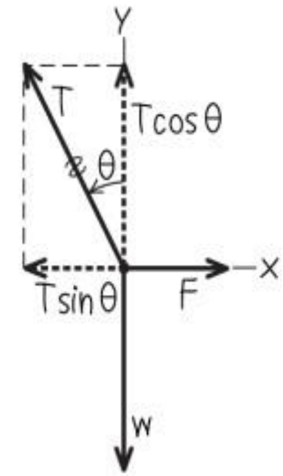
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα - Λύση**

  μάζα m, κούνια μήκους R, ανώτατη γωνία θ_c, δύναμη F, η οποία είναι αρχικά μηδενική. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη F.

Από τη σχέση $s = R\theta$, μπορώ να γράψω: $dl = R\,d\theta$





Άρα από τη σχέση ③ :

$$W_F = \int F\cos\theta\,dl = \int_0^{\theta_c} F\cos\theta \cdot R\,d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_c} FR\cos\theta\,d\theta \overset{①}{=} \int_0^{\theta_c} \underline{T}\sin\theta \cdot R \cdot \underline{\cos\theta}\,d\theta \overset{②}{=} \int_0^{\theta_c} mgR\sin\theta\,d\theta$$

$$= mgR\int_0^{\theta_c} \sin\theta\,d\theta = mgR\int_0^{\theta_c} (-\cos\theta)'\,d\theta = mgR(-\cos\theta)\Big]_0^{\theta_c}$$

$$= mgR(-\cos\theta_c + 1) = mgR(1 - \cos\theta_c).$$

Τέλος Διάλεξης