Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Διανύσματα

Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

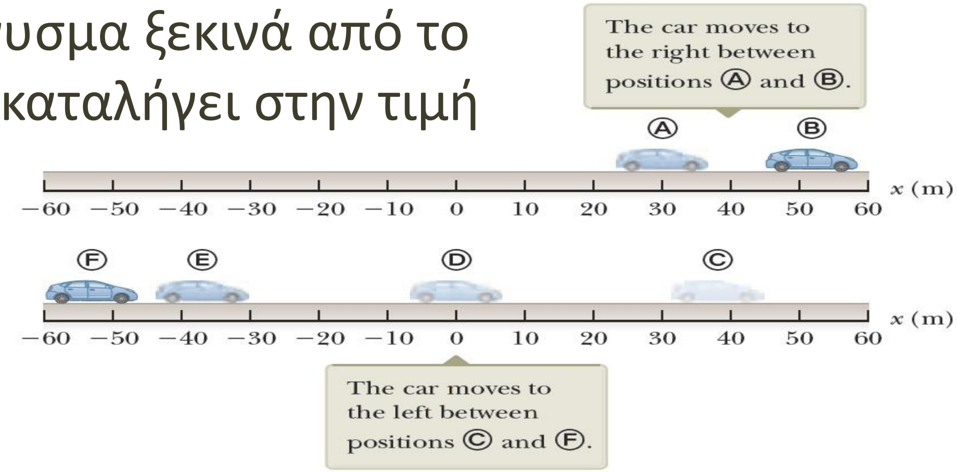
Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Διανύσματα

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Κίνηση σώματος σε μια ευθεία γραμμή
  - Σώμα == σωματίδιο
  - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
- **Θέση** $\vec{x}$: η τοποθεσία του σωματιδίου σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (συχνά, η αρχή των αξόνων αναφοράς)
  - Διανυσματικό μέγεθος
  - Μπορεί να είναι θετική ή αρνητική ως τιμή ***x***
  - Θετική τιμή → το διάνυσμα ξεκινά από το σημείο αναφοράς και καταλήγει στην τιμή
  - Αντίθετα για αρνητική τιμή



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$**: η αλλαγή στη θέση ενός σωματιδίου σε δεδομένο χρονικό διάστημα
- <u>Ορισμός</u>: $\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_f - \vec{x}_i$
  - με $\vec{x}_f, \vec{x}_i$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
- Προσοχή: απόσταση d ≠ μετατόπιση $\Delta\vec{x}$!
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρή!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$: διανυσματικό μέγεθος!
  - Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά
- $\Delta \mathrm{x} = x_f - x_i > 0 \Longleftrightarrow$ κίνηση προς τα δεξιά
- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \Longleftrightarrow$ κίνηση προς τα αριστερά
- Σπάνια θα τη χρησιμοποιούμε ως διάνυσμα…
  - Θα κάνουμε κι εδώ μια «σύμβαση» για τα πρόσημά της!
- **Μέση ταχύτητα**:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

  - Διάνυσμα: έχει διεύθυνση και φορά!
  - Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)

- **Μέση αριθμητική ταχύτητα:**
  - $s_{avg} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\Delta \mathrm{t}}$, όπου d η απόσταση
  - Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !
- Προσοχή στη διαφορά τους!

Κίνηση σε μια Διάσταση

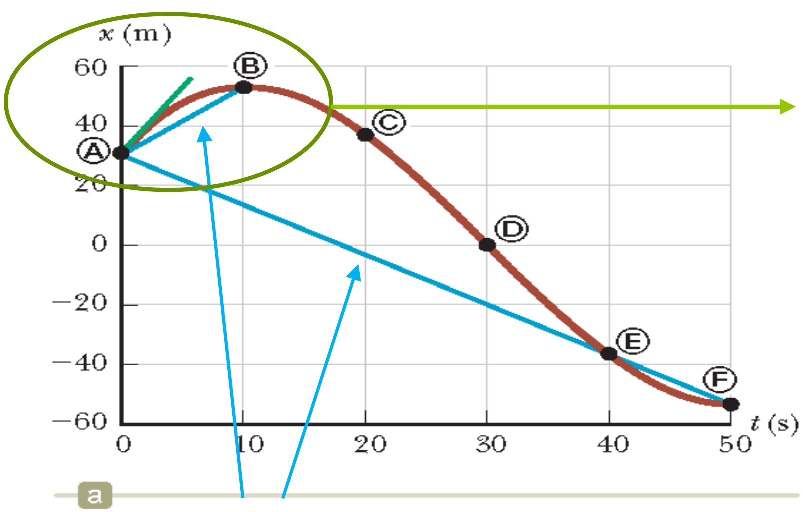
- **Στιγμιαία Ταχύτητα**
  - Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
  - Η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε Δt → 0

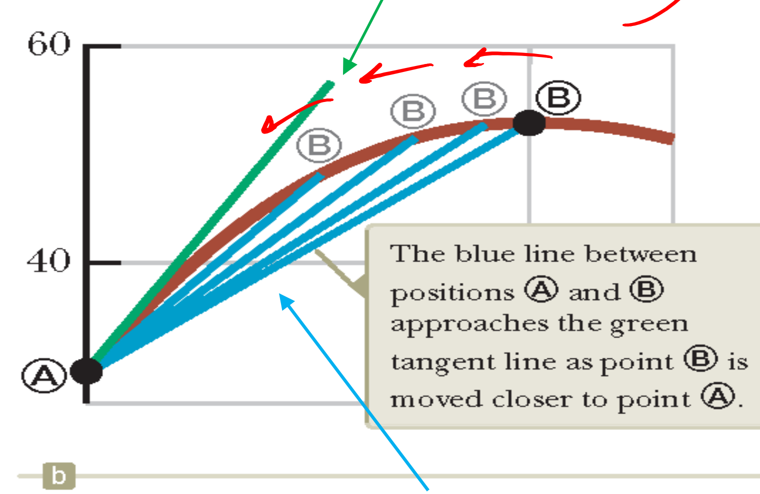
$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Το (Β) πλησιάζει το (Α) όλο και περισσότερο

- Παράδειγμα:

Κλίση εφαπτομένης σε σημείο = στιγμιαία ταχύτητα





Κλίση ευθείας = μέση ταχύτητα

Κλίση ευθείας = μέση ταχύτητα

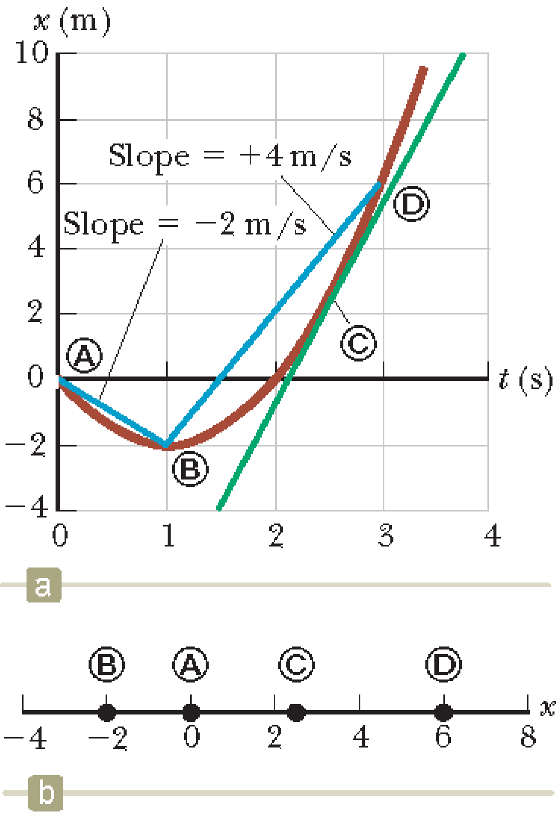
Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα**:
- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m, και t είναι ο χρόνος σε sec, όπως στο Σχήμα (α).

- A. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- B. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



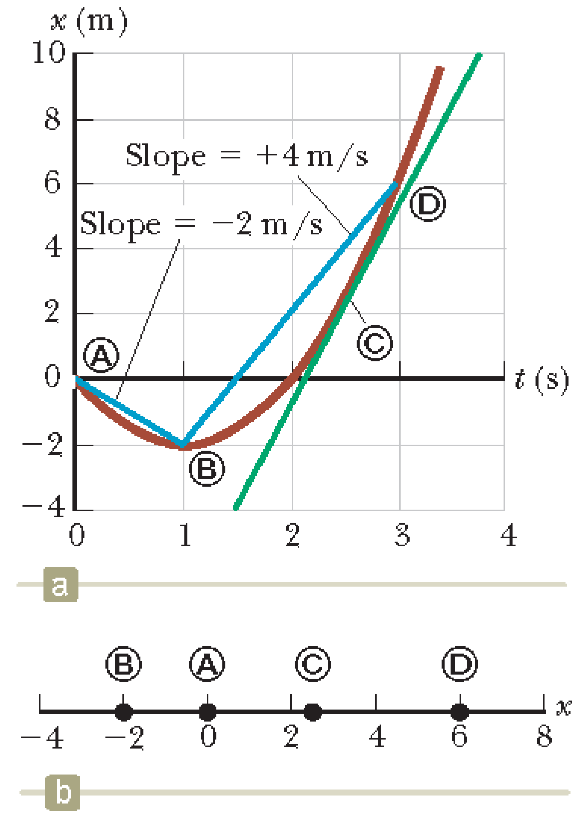
Κίνηση σε μια Διάσταση

- Λύση:

$$x = -4t + 2t^2$$

x(t)

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.



Ζητείται η μετατόπιση $\Delta\vec{x} = x_{τελ.} - x_{αρχ.}$

- $t=0 \longrightarrow t=1$:

$$\Delta x = x_f - x_i = x\Big]_{t=1} - x\Big]_{t=0} = -2-0 = -2\ m$$

- $t=1 \longrightarrow t=3$:

$$\Delta x = x\Big]_{t=3} - x\Big]_{t=1} = 6-(-2) = 8\ m$$

Ελέγξτε αυτές τις μετατοπίσεις στο γράφημα!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Λύση:

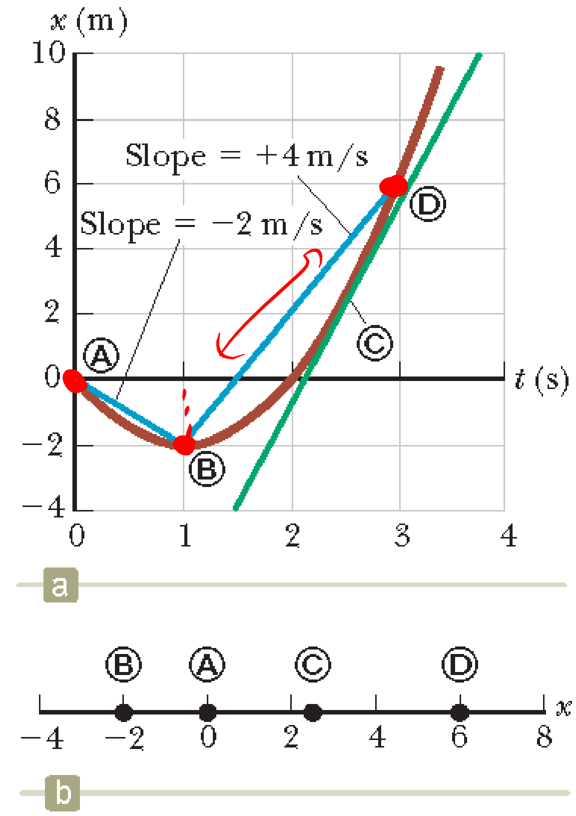
$$x = -4t + 2t^2$$

  - Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i}$$

• $t=0 \rightarrow t=1$: $u_{avg} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{-2-0}{1-0} = -2\ \frac{m}{s}$

• $t=1 \rightarrow t=3$: $u_{avg} = 4\ \frac{m}{s}$



Ελέγξτε ότι οι τιμές αυτές ισούνται με τις κλίσεις των ευθειών μπλε χρώματος στο γράφημα!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Λύση:

$$x = -4t + 2t^2$$

- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

$$\frac{d}{dt}x(t) = x'(t)$$

(Συμβολισμός)

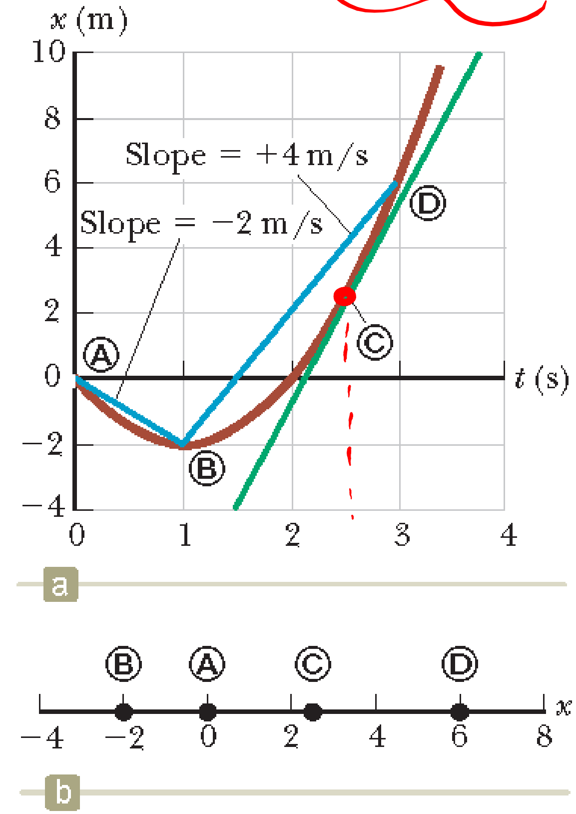
$(-4t+2t^2)'$

$\vec{u}_x = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$, είναι $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-4t+2t^2)$

$= -4+4t = u_x$

Άρα για $t = 2.5\ s = \frac{5}{2}\ s$,

είναι $u_x = (-4+4t)\Big|_{t=\frac{5}{2}} = 6\ m/s$



Μετρήστε την κλίση της εφαπτομένης (πράσινης) ευθείας στο γράφημα και επιβεβαιώστε την τιμή που βρήκατε!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Θέση σωματιδίου υπό ***<u>σταθερή</u>*** ταχύτητα

$$u_x = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta \mathrm{t} \Leftrightarrow \left(x_f - x_i\right) = u_x \Delta \mathrm{t}$$

- Άρα

$$\boxed{x_f = x_i + u_x \Delta \mathrm{t}}$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta \mathrm{t}}$$

όπου d το μήκος της απόστασης που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση**
  - όταν η ταχύτητα αλλάζει συναρτήσει του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση**

$$a_{x,avg} \equiv \frac{\Delta u_x}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{u_{xf} - u_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμιαία επιτάχυνση**

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u_x}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{du_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt} u_x = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt}$$

είναι

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

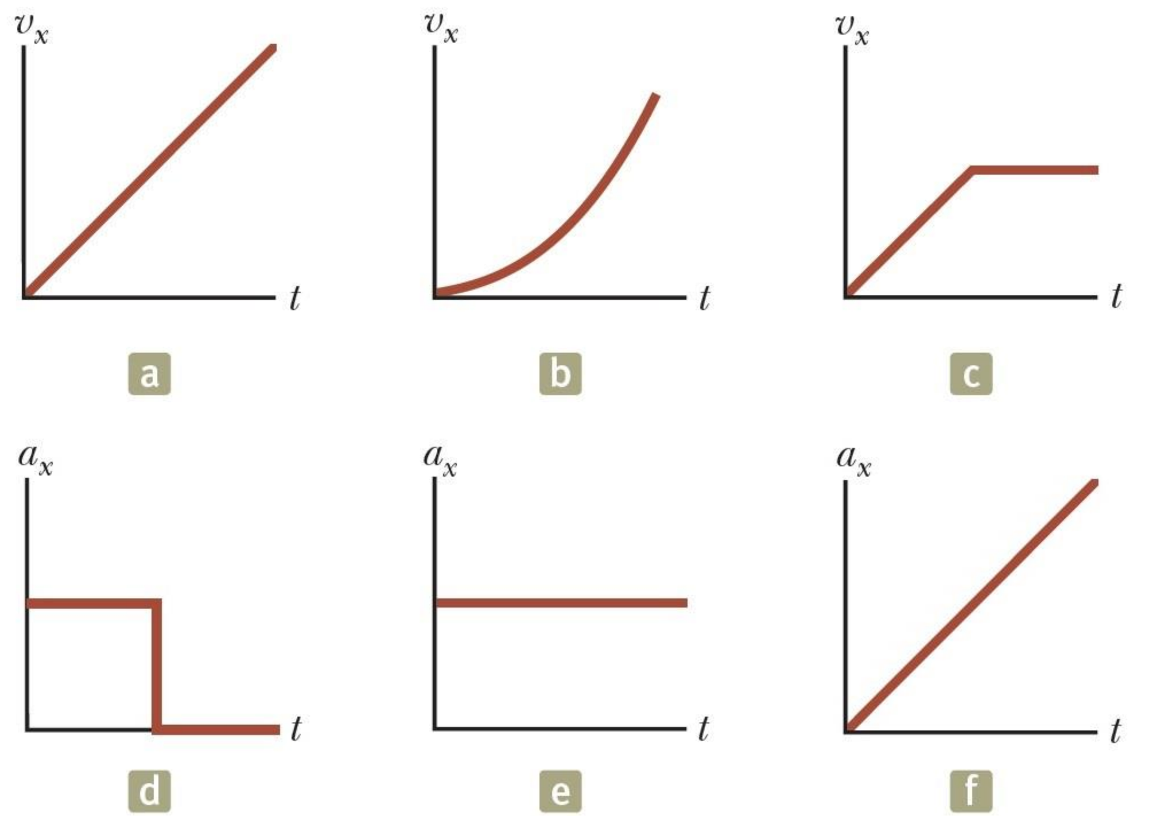
- Quiz 1:
  - Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

<u>Hint</u>: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας

a → e

b → f

c → d



Κίνηση σε μια Διάσταση

* Η ερμηνεία του ±3 s είναι ότι η ταχύτητα είναι μηδενική 3 s πριν και 3 s μετά τη στιγμή t=0!

- Quiz 2:
  - Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = x = 4 - 27t + t^3$$

α) - Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
β) - Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
γ) - Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή που το σωματίδιο είχε u = 0?

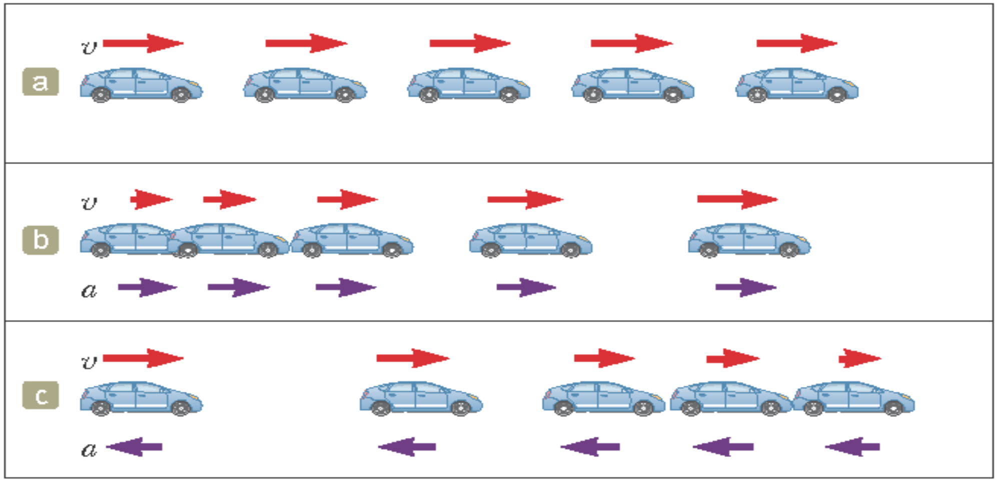
α) $u = \frac{dx}{dt} = -27 + 3t^2$

β) $a = \left.\begin{array}{c} \frac{d^2}{dt^2}x \\ \text{ή} \\ \frac{d}{dt}u \end{array}\right\} = 6t$

γ) Είναι $u = -27 + 3t^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3\ s \Rightarrow t = 3\ s$ *

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Επιτάχυνση
  - όταν η ταχύτητα αλλάζει με το χρόνο
  - Σταθερή ταχύτητα ⟶ μηδενική επιτάχυνση
- Ταχύτητα και επιτάχυνση: διανύσματα
  - Θετική και αρνητική ταχύτητα
  - Θετική και αρνητική επιτάχυνση
  - Τα πρόσημα υποδηλώνουν φορά!
- **<u>Παράδειγμα</u>**



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Ειδική περίπτωση: a_x σταθερή

- **Εξισώσεις Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:**

1. $u_{xf} = u_{xi} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{xi} + u_{xf}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x,avg} t$
5. $x_f = x_i + u_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
6. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε $a_{x,avg} = a_x$.

Είναι $a_x = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_f - u_i}{t_f - t_i}$

αν $t_i = 0$, $t_f = t$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u_f = u_i + a_x t}$$

Παρατήρηση: Υπολογίζαμε την ταχύτητα σε <u>κάθε</u> χρονική στιγμή t αν γνωρίζαμε:

α) u_{x_i} (αρχ. ταχύτητα)

β) a_x (σταθ. επιτάχυνση)

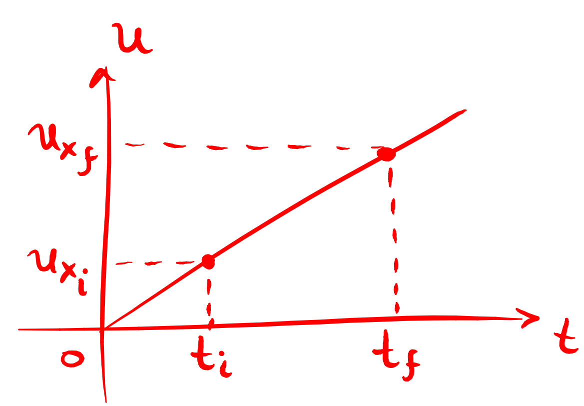
Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. η αντι-παράγωγος, το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική.

Έτσι, η ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας u_{x_i} και της τελικής u_{x_f}.

Άρα $\boxed{u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}}$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t:

$$\left.\begin{array}{l} u_{x,avg}\cdot t = \frac{1}{2}\left(u_{x_i}+u_{x_f}\right)\cdot t \\ \quad \parallel \\ \Delta x = x_f - x_i \end{array}\right\} \Rightarrow (x_f - x_i) = \frac{1}{2}\left(u_{x_i}+u_{x_f}\right)\cdot t$$

$$\Rightarrow \boxed{x_f = x_i + \underbrace{\frac{1}{2}\left(u_{x_i}+u_{x_f}\right)}_{u_{x,avg}} t}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Έχουμε ήδη

$$\left.\begin{aligned} u_{x_f} &= u_{x_i} + a_x t \\ x_f &= x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_f} + u_{x_i}\right)t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + a_x t + u_{x_i}\right)t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(2u_{x_i} + a_x t\right)t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2}.$$

Παρατήρηση: Υπολογίζουμε την τελική θέση του σώματος αν γνωρίζουμε:

α) χρόνο από αρχική ως τελική θέση

β) αρχική ταχύτητα

γ) επιτάχυνση

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Έχουμε $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \dfrac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$

$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})t$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})\left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_f = x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

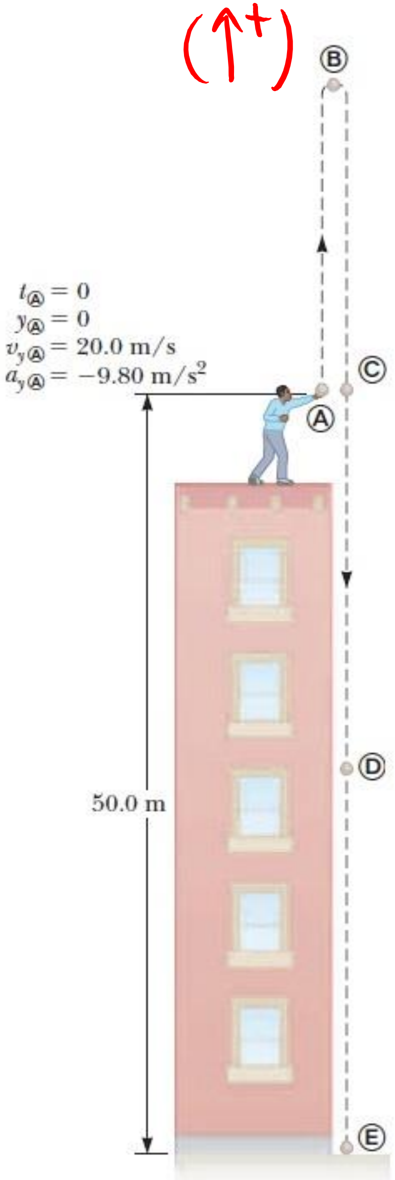
- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην κίνηση αυτή
  - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν χωρίς διανύσματα
  - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!

- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως θετική φορά αυτή προς τα δεξιά
  - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
  - Μην ξεχνάτε να ορίζετε το σημείο αναφοράς σας ($t=0$)!

- **Ελεύθερη πτώση** (κίνηση σε μια διάσταση – κατακόρυφη)
  - Επιτάχυνση βαρύτητας $g = 9.8\ m/s^2$
  - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)
  - Συνήθως ορίζουμε θετική φορά προς τα επάνω

Κίνηση σε μια Διάσταση

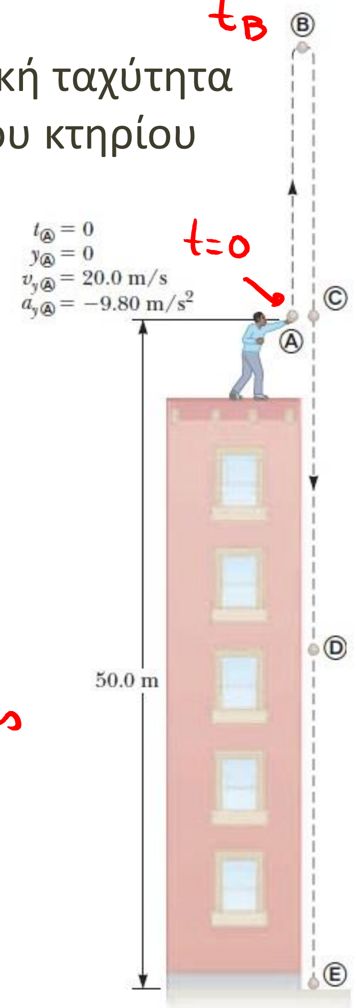
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
    - Β) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
    - Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν t = 5 s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

(+) $\vec{g}$

- Παράδειγμα – Λύση:
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.



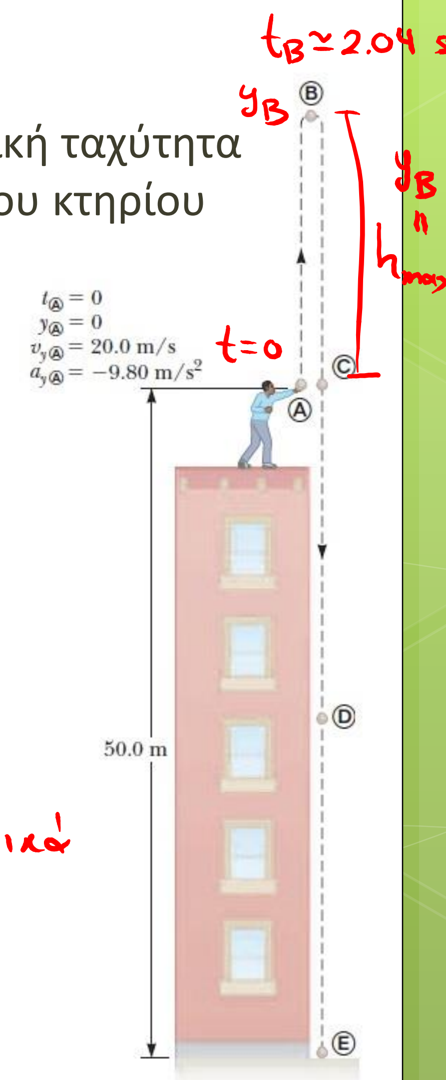
$$u_B = u_A + a_y t \Rightarrow \cancel{u_B}^{0} = 20 + (-9.8)t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \simeq 2.04 \ s \Rightarrow t_B \cong 2.04 \ s$$

Παραπάνω, δεν είχαμε άλλη επιλογή από το σημείο A ως αρχικό και το σημείο B ως τελικό.

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα – Λύση:
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - B) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.



Έχουμε $y_B = y_A + \frac{1}{2}(u_A + u_B)\, t \Leftrightarrow$

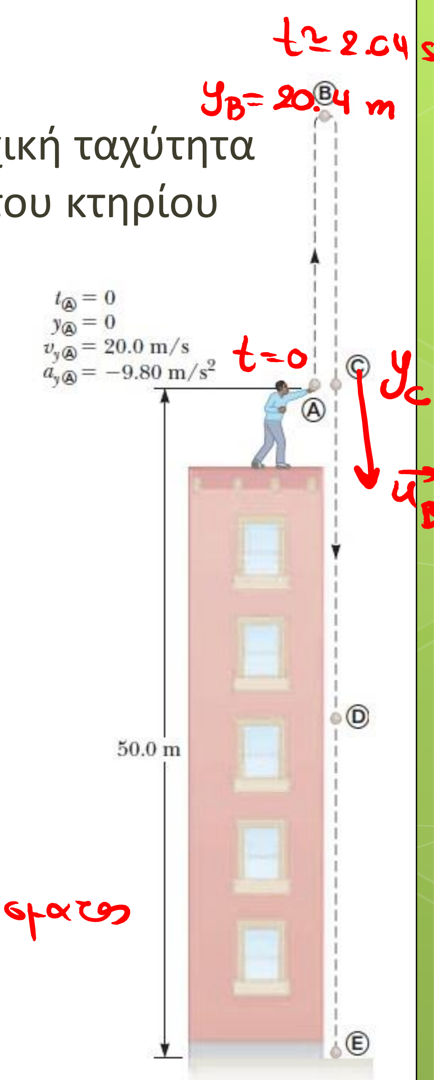
$$\Leftrightarrow y_B = 0 + \frac{1}{2}(20+0)\cdot 2.04 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_B = 20.4 \text{ m}$$

Ξανά, δεν είχαμε άλλες επιλογές για αρχικά και τελικά σημεία πέρα από τα A, B.

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα – Λύση:
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας. Επιλέξαμε A, C!



Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} v_C^2 = v_A^2 + 2a_y(y_C - y_A) \\ y_A = y_C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

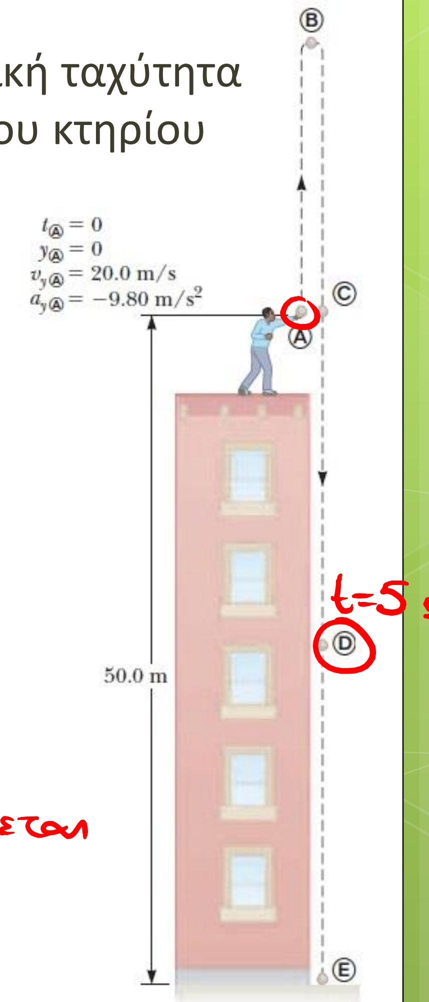
$$\Rightarrow v_C^2 = v_A^2 \Rightarrow v_C = \pm v_A = \pm 20 \ \frac{m}{s}$$

Επιλέξαμε $v_C = -20 \ \frac{m}{s}$, αφού η φορά του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{v}_C$ είναι προς τα κάτω.

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα – Λύση:
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν t = 5 s.

(+) $\vec{g}$



Επιλέγουμε ως βολικότερα σημεία τα A, D.

$$u_Δ = u_A + a_y t = u_A - gt = 20 - 9.8\cdot 5 = -29\ \frac{m}{s}$$

και

$$y_Δ = y_A + u_A t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_A + u_A t - \frac{1}{2} g t^2$$

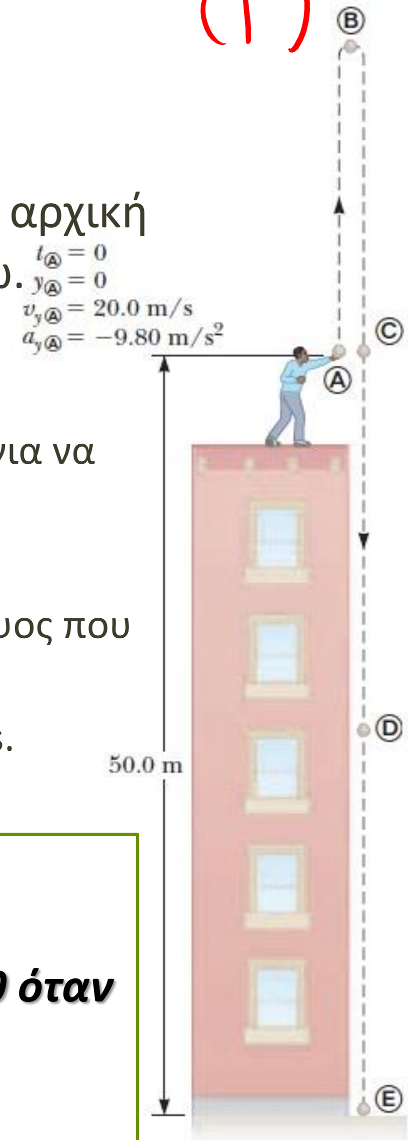
$$= 0 + 20\cdot 5 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 5^2 = -22.5\ m$$

Το (−) μας υποδηλώνει ότι η θέση της μπάλας βρίσκεται "κάτω" από το σημείο αναφοράς, A.

Κίνηση σε μια Διάσταση

(↑+)

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα άνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
    - Β) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
    - Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν t = 5 s.



Εξάσκηση:
α) Λύστε τα Γ, Δ, με διαφορετικές αρχικές θέσεις.
β) Λύστε ξανά τα ερωτήματα Γ, Δ, υποθέτοντας ότι t = 0 όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση Β!
(πρέπει να βρείτε τα ίδια αποτελέσματα)!

Τέλος Διάλεξης