



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση
Διανύσματα



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

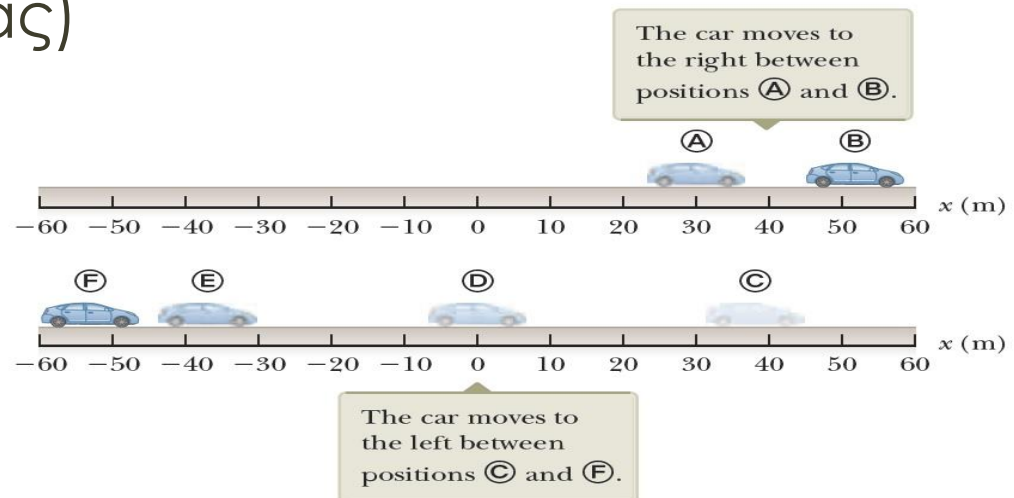
Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση
Διανύσματα

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Κίνηση σώματος σε μια ευθεία γραμμή
 - Σώμα == σωματίδιο (δε μας ενδιαφέρει το μέγεθος)
 - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
- **Θέση x :** η τοποθεσία του σωματιδίου σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (συχνά, η αρχή των αξόνων αναφοράς)



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$:** η αλλαγή στη θέση ενός σωματιδίου σε δεδομένο χρονικό διάστημα
- Ορισμός: $\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_f - \vec{x}_i$
 - με $\vec{x}_f, \vec{x}_i$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
- Προσοχή: απόσταση $\neq$ μετατόπιση!
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρή!



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μετατόπιση: διανυσματικό μέγεθος!
 - Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά
- $|\Delta x| > 0 \rightarrow$ κίνηση προς τα δεξιά
- $|\Delta x| < 0 \rightarrow$ κίνηση προς τα αριστερά
- Σπάνια θα τη χρησιμοποιούμε ως διάνυσμα...
- **Μέση ταχύτητα:**
 - $\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$
 - Διάνυσμα: έχει διεύθυνση και φορά!
 - Απαιτούνται δυο σημεία
- **Μέση αριθμητική ταχύτητα:**
 - $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
 - Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !
- Προσοχή στη διαφορά τους!



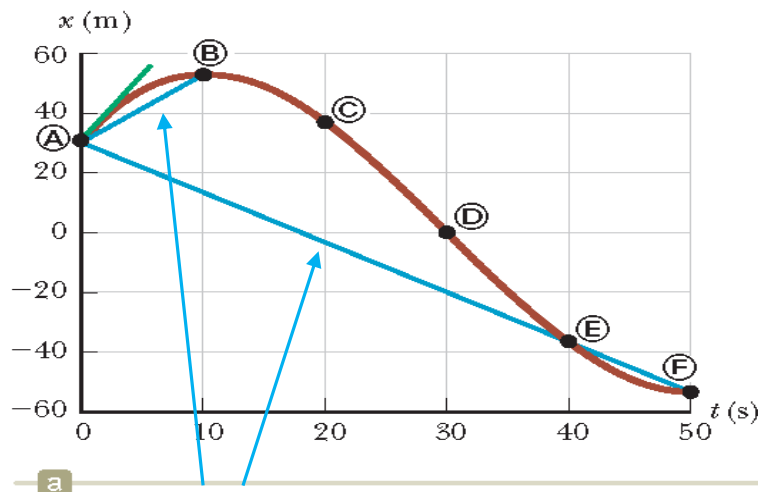
Κίνηση σε μια Διάσταση

Στιγμιαία Ταχύτητα

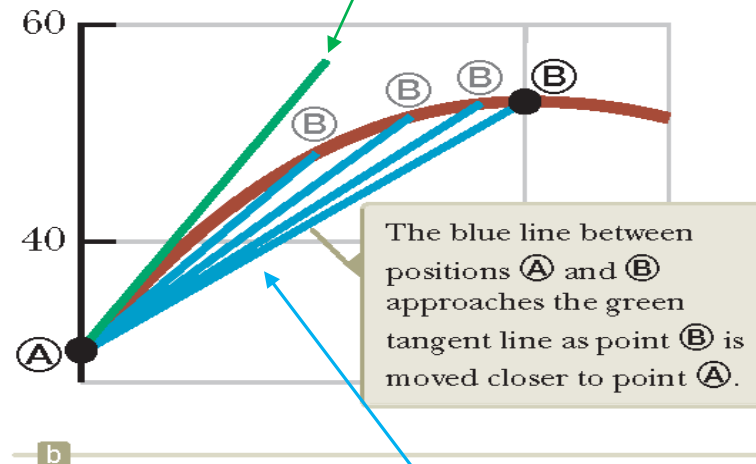
- Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
- Η μέση ταχύτητα όταν μετريέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Κλίση εφαπτομένης σε σημείο = στιγμιαία ταχύτητα



Κλίση ευθείας = μέση ταχύτητα



Κλίση ευθείας = μέση ταχύτητα

Κίνηση σε μια Διάσταση

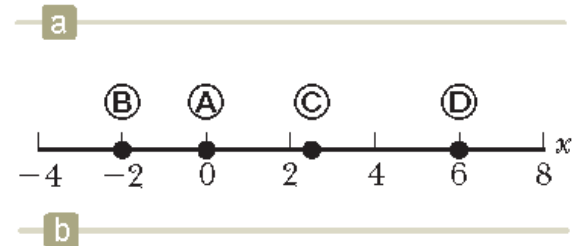
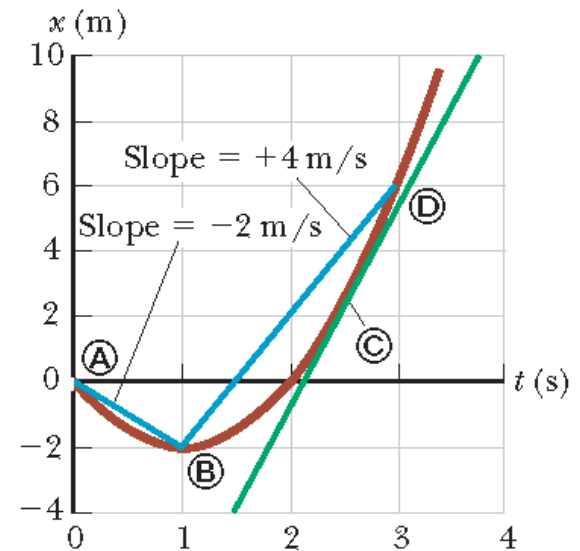
● Παράδειγμα:

- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m, και t είναι ο χρόνος σε sec, όπως στο Σχήμα (a).

- A. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- B. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

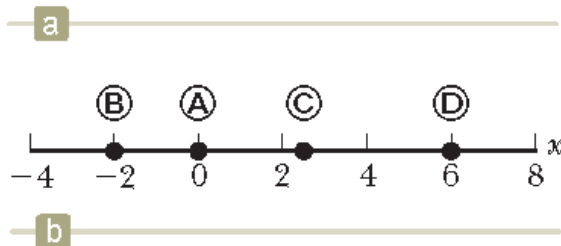
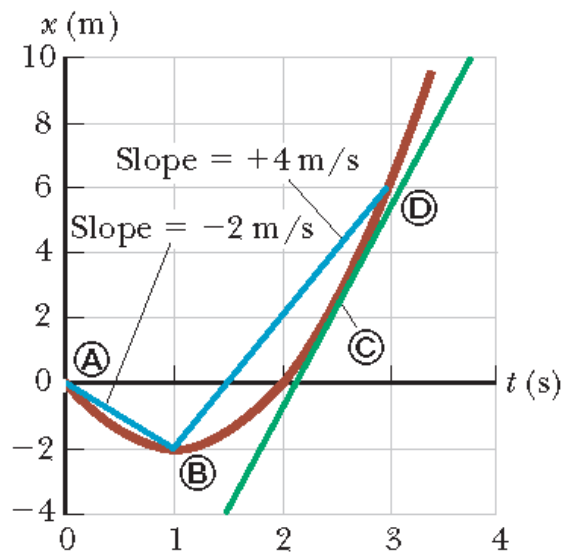
Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

$$\begin{aligned} \bullet \Delta x_{0 \rightarrow 1} &= [x]_{t=1} - [x]_{t=0} \\ &= -4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - (-4 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2) \\ &= -2 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \Delta x_{1 \rightarrow 3} &= [x]_{t=3} - [x]_{t=1} \\ &= -4 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2) = \\ &= 8 \text{ m} \end{aligned}$$



$$\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

Λύση:

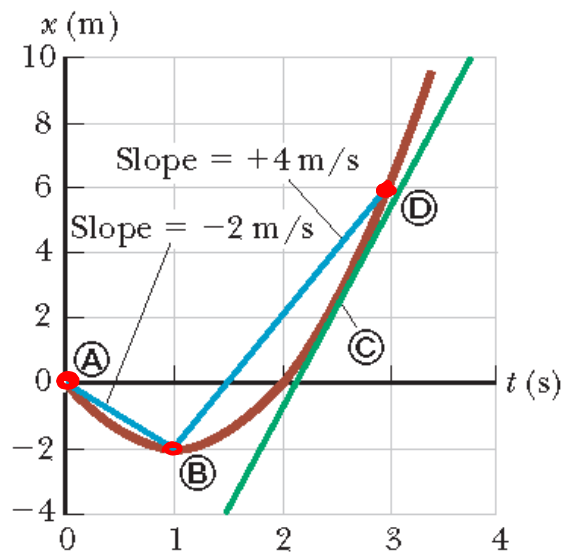
$$x = -4t + 2t^2$$

- B. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.

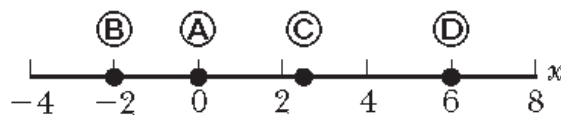
$$\bullet u_{avg}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\Delta x_{0 \rightarrow 1}}{\Delta t} = \Delta x_{0 \rightarrow 1} = -2 \frac{m}{s}$$

0 → 1 s
1 → 3 s

$$\bullet u_{avg}^{1 \rightarrow 3} = \frac{\Delta x_{1 \rightarrow 3}}{\Delta t} = \frac{8}{3-1} = 4 \frac{m}{s}$$



a



b

$$u_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

Λύση:

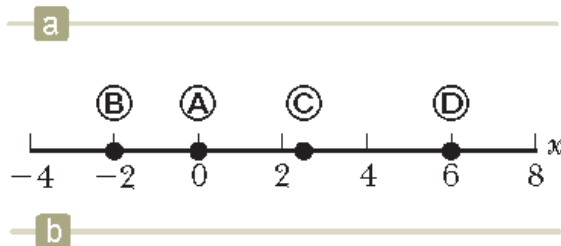
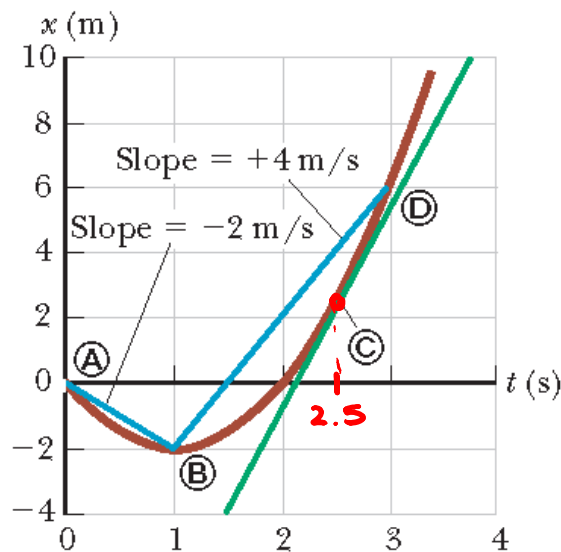
$$x = -4t + 2t^2$$

- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

$$\text{Έχουμε } \frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt} (-4t + 2t^2)$$

$$= -4 + 4t \leadsto \text{σφτ. ταχύτητα}$$

$$[u_x]_{t=\frac{5}{2}} = -4 + 4 \cdot \frac{5}{2} = -4 + 10 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Θέση σωματιδίου υπό σταθερή ταχύτητα

- $u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta t \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta t$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

όπου d το μήκος της απόστασης που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση**

- όταν η ταχύτητα αλλάζει συναρτήσει του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση**

$$a_{x,avg} \equiv \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{xf} - u_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμιαία επιτάχυνση**

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{du_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt} u_x = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt}$$

είναι

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

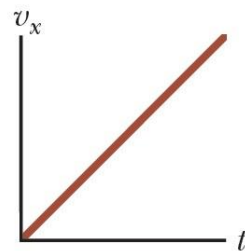
Κίνηση σε μια Διάσταση

- Quiz 1:

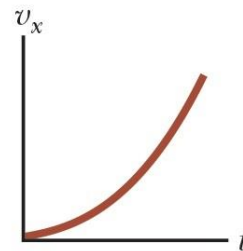
- Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας

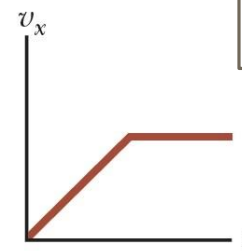
$a \rightarrow e$
 $b \rightarrow f$
 $c \rightarrow d$



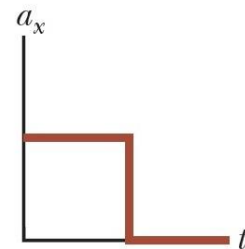
a



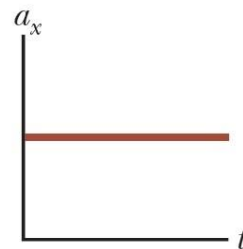
b



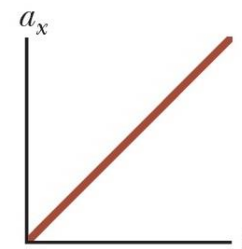
c



d



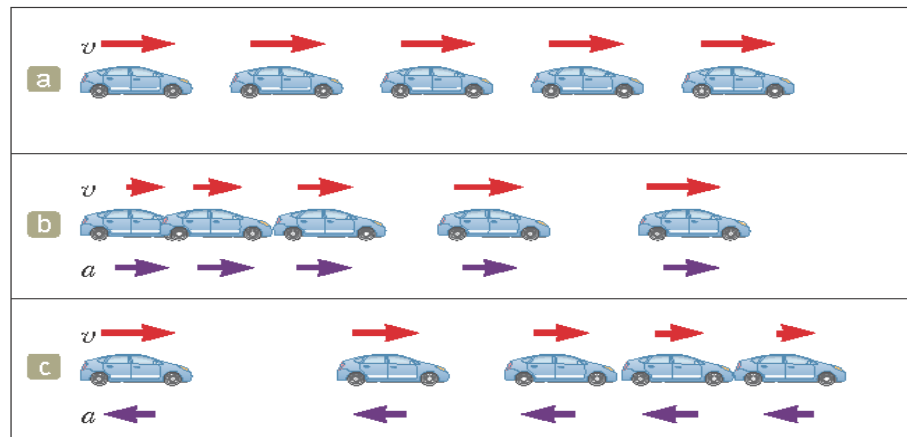
e



f

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Επιτάχυνση
 - όταν η ταχύτητα αλλάζει με το χρόνο
 - Σταθερή ταχύτητα $\longrightarrow$ μηδενική επιτάχυνση
- Ταχύτητα και επιτάχυνση: διανύσματα
 - Θετική και αρνητική ταχύτητα
 - Θετική και αρνητική επιτάχυνση
- Παράδειγμα



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Ειδική περίπτωση: a_x σταθερή
- **Εξισώσεις Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:**

1. $u_{xf} = u_{xi} + a_x t$

2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$

3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$

4. $x_f = x_i + u_{x,avg}t$

5. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

6. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

$$u = u_i + a_x \cdot t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

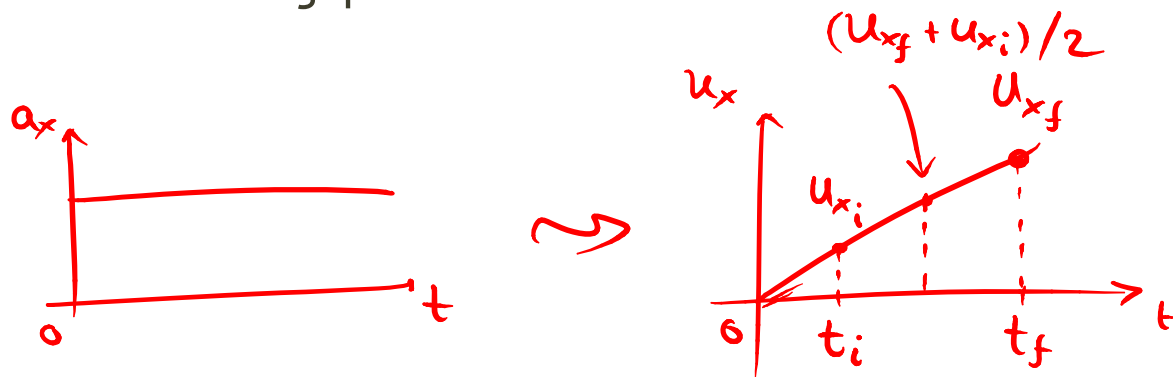
$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{xf} - u_{xi}}{t_f - t_i} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow a_x = \frac{u_{xf} - u_{xi}}{t} \Rightarrow \\ t_i = 0, t_f = t \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a_x t = u_{xf} - u_{xi} \Rightarrow \boxed{u_{xf} = a_x t + u_{xi}} \quad (1)$$

$$u_{avg} = \frac{u_{xf} + u_{xi}}{2}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:



Άρα

$$\boxed{u_{avg} = \frac{u_{xf} + u_{xi}}{2}} \quad (2)$$

$$x_f = x_i + u_{avg} \cdot t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

$$\text{Έχουμε } u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \left\{ \Rightarrow \right.$$
$$t_i = 0, t_f = t$$

$$\Rightarrow u_{avg} = \frac{x_f - x_i}{t} \Rightarrow \boxed{x_f = x_i + u_{avg} \cdot t} \quad (3)$$

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Γνωρίζουμε ότι } u_f = u_i + a_x \cdot t \\ \text{και } x_f = x_i + \frac{u_f + u_i}{2} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_f &= x_i + \frac{1}{2} (u_i + a_x \cdot t + u_i) \cdot t \\ &= x_i + \frac{1}{2} (2u_i + a_x \cdot t) \cdot t \end{aligned}$$

$$\boxed{x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2}$$

$$x_f = x_i + \frac{u_f + u_i}{2} \cdot t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι $u_{avg} = \frac{u_{xf} + u_{xi}}{2}$

και ότι $x_f = x_i + u_{avg} \cdot t$ από (3).

Άρα

$$x_f = x_i + \frac{u_{xf} + u_{xi}}{2} \cdot t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

● Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι:

$$u_f = u_i + a_x \cdot t \Rightarrow t = \frac{u_f - u_i}{a_x}$$

— || —

$$x_f = x_i + \frac{u_{xf} + u_{xi}}{2} \cdot t$$

} $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_f &= x_i + \frac{1}{2} (u_{x_f} + u_{x_i}) \cdot \left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x} \right) \\ &= x_i + \frac{1}{2a_x} (u_{x_f} + u_{x_i})(u_{x_f} - u_{x_i}) \\ &= x_i + \frac{1}{2a_x} (u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

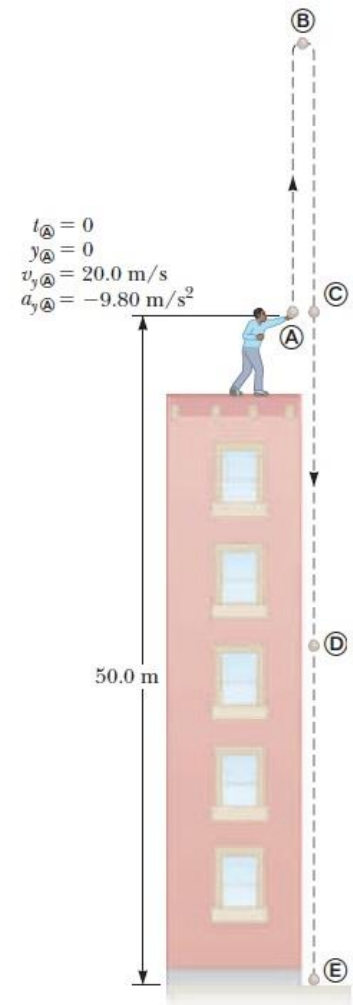
Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην κίνηση αυτή
 - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν χωρίς διανύσματα
 - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!
- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως θετική φορά αυτή προς τα δεξιά
 - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
 - Μην ξεχνάτε να ορίζετε το σημείο αναφοράς σας!
- **Ελεύθερη πτώση** (κίνηση σε μια διάσταση – κατακόρυφη)
 - Επιτάχυνση βαρύτητας g
 - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)
 - Συνήθως ορίζουμε θετική φορά προς τα επάνω

Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m .
- Α) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
- Β) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
- Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
- Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5 \text{ s}$.



Κίνηση σε μια Διάσταση

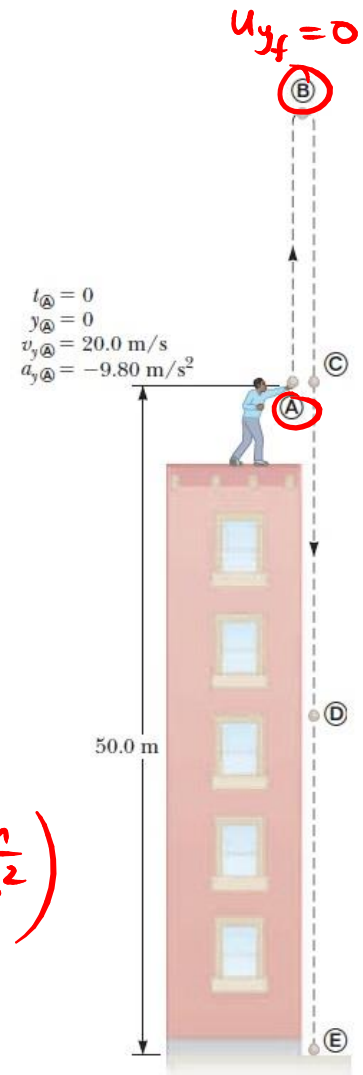
• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Α) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

$$\text{Ξέρουμε ότι } u_{yf} = u_{yi} + a_y \cdot t \quad (A \rightarrow B)$$

$$\text{Όταν } u_{yf} = 0, \text{ άρα } 0 = u_{yi} - g \cdot t \Rightarrow \left(g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{20}{9.8} \approx 2.04 \text{ sec.}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

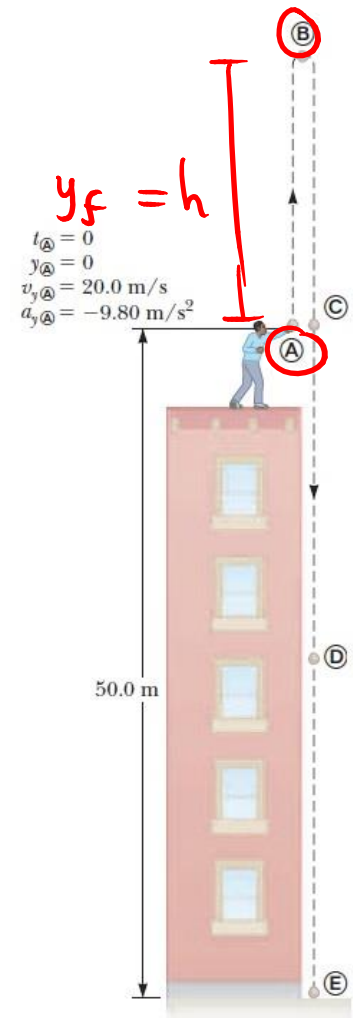
- Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- B) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

Ξέρουμε ότι $y_f = y_i + \frac{1}{2} (u_{y_i} + u_{y_f}) \cdot t$

Άρα από Α) ερώτημα, $t = 2.04 \text{ s}$ στο σημείο Β.

Οπότε $y_f = h = 0 + \frac{1}{2} (20 + 0) \cdot 2.04 = 20.4 \text{ m}$



Κίνηση σε μια Διάσταση

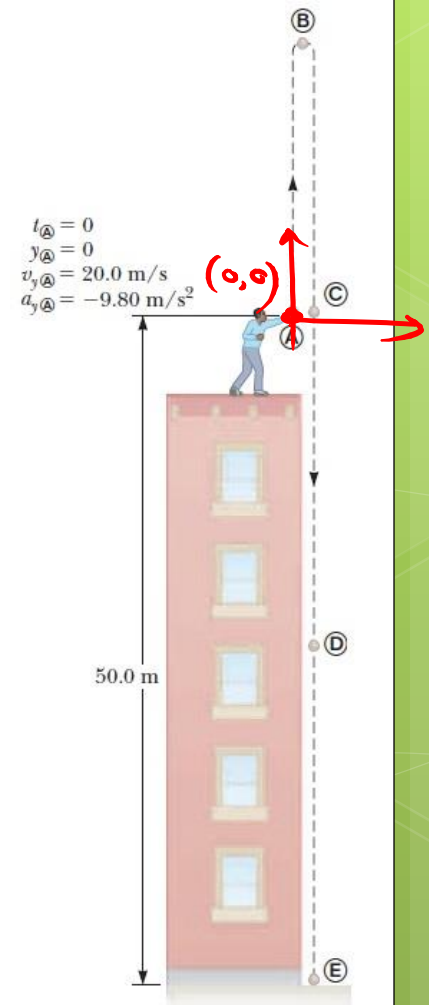
• Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Γ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Επιλέγαμε τα σημεία A, C : } y_A = y_C = 0 \\ u_{y_C}^2 = u_{y_A}^2 - 2g(y_C - y_A) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{y_C}^2 = u_{y_A}^2 \Rightarrow u_{y_C} = \pm u_{y_A} = \pm 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Επιλέγαμε } u_{y_C} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα – Λύση:

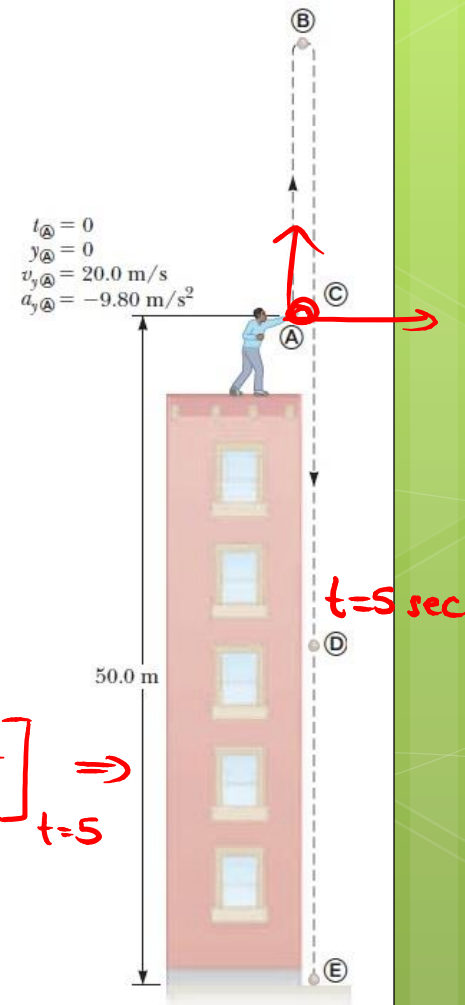
- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.

Επιλέξαμε τα σημεία A, D :

$$\bullet \quad u_f = u_i - g t = 20 - 9.8 \cdot 5 = -29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bullet \quad y_f = y_i + u_i \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_D = \left[0 + 20 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 t^2 \right]_{t=5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_D = -22.5 \text{ m}$$





Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση
Διανύσματα



Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

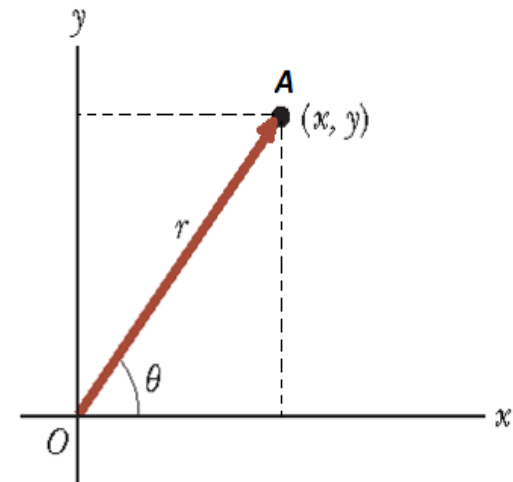
Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Διανύσματα

Διανύσματα

- Στην κίνηση στο επίπεδο, τα διανύσματα είναι απαραίτητα!
- Διάνυσμα OA : προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα
 - Μέτρο
 - Διεύθυνση
 - Φορά
- Καρτεσιανές συντεταγμένες
 - x – τετμημένη
 - y – τεταγμένη



$$\ast \alpha \tan(x)$$

$$\ast \alpha \tan 2(x, y)$$

Διανύσματα

• Πολική μορφή

$$\bullet x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

• όπου

$$\bullet r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{OA}|$$

$$\bullet \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

• Παράδειγμα:

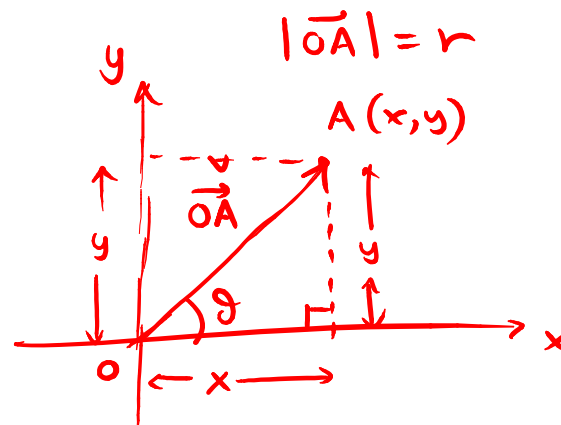
- Βρείτε την πολική μορφή του διανύσματος με συντεταγμένες $(x, y) = (1, 1)$ και ύστερα αυτού με συντεταγμένες $(x, y) = (-1, -1)$.

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

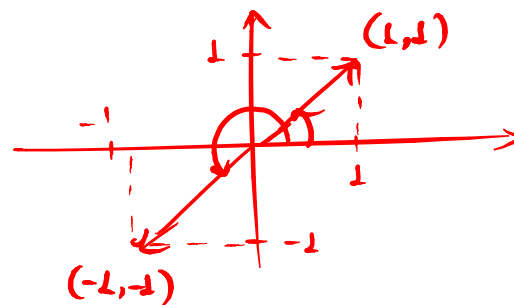
$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \tan^{-1}(1) = 45^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{4}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{-1}{-1} = \tan^{-1}(1) = 45^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{4} ! \text{ Όμως } \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = 225^\circ$$



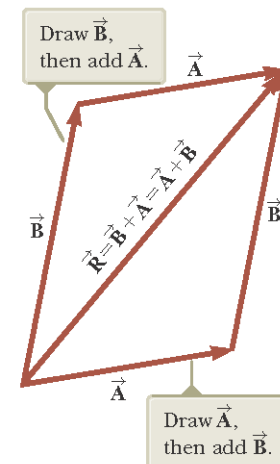
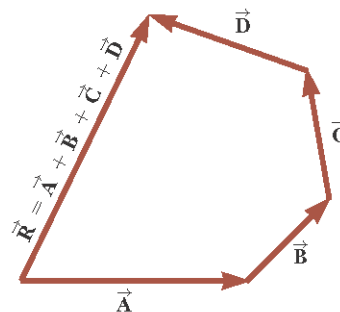
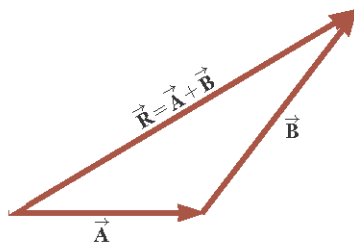
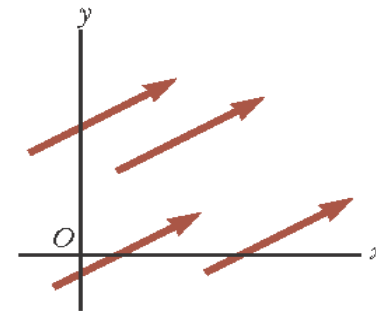
$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x)$$



Διανύσματα

- Ιδιότητες διανυσμάτων
 - Ισότητα διανυσμάτων
 - Ίδιο μέτρο και κατεύθυνση
 - Πρόσθεση διανυσμάτων



Διανύσματα

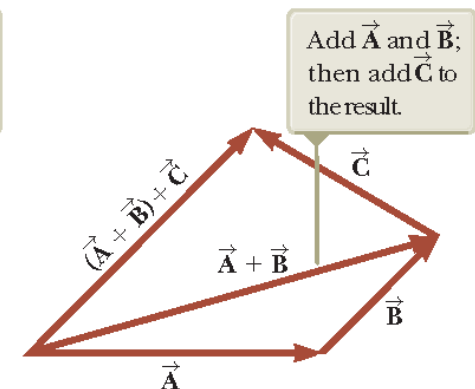
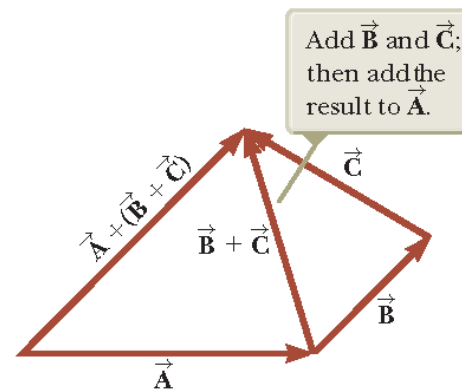
Ιδιότητες

Αντιμεταθετικότητα

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

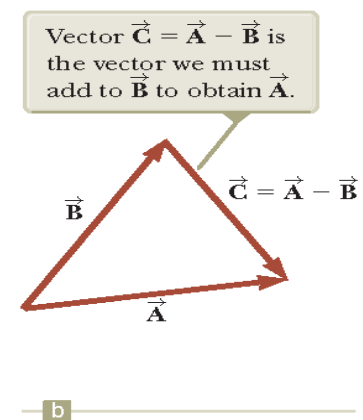
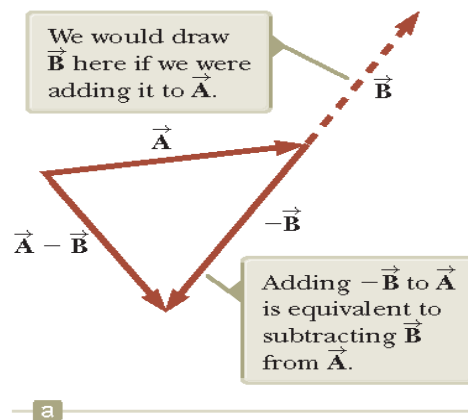
Προσεταιριστικότητα

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



Διανύσματα

- Αρνητικό διάνυσμα ενός διανύσματος $\vec{A}$
 - Ορίζεται ως το διάνυσμα εκείνο που όταν προστεθεί στο $\vec{A}$, μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ. $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$
- Παράδειγμα:
 - Πρόσθεση

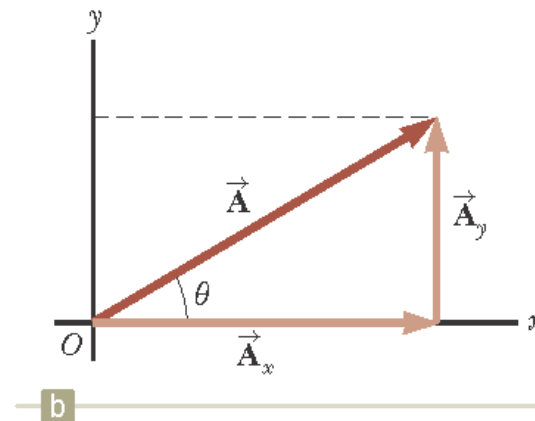
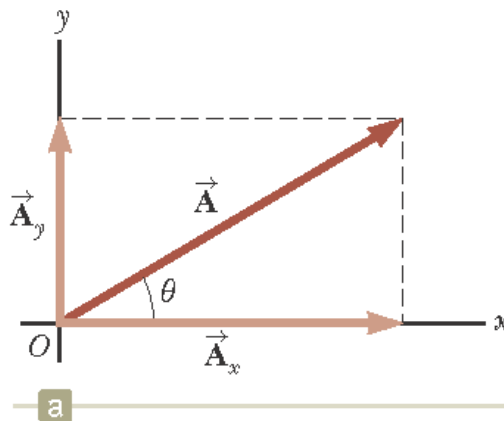


Διανύσματα

- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό
 - Το διάνυσμα διατηρεί τη διεύθυνση, αλλά αλλάζει (πιθανώς) η φορά, και το μέτρο του
 - $\vec{B} = m\vec{A}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow |\vec{B}| = |m||\vec{A}|$
 - $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, \text{ αν } m > 0$
 - $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}, \text{ αν } m < 0$

Διανύσματα

- Η γραφική μέθοδος είναι βολική για απλά ή διαισθητικά προβλήματα
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια, προτιμούμε την ανάλυση σε **συνιστώσες** (μία κάθετη και μία παράλληλη στον x-άξονα)



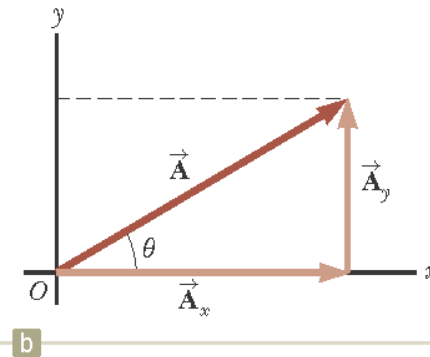
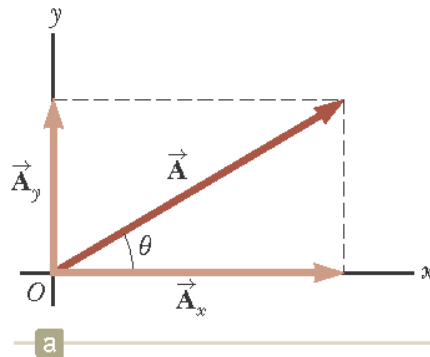
Διανύσματα

- Πολική μορφή

$$A_x = A \cos(\theta),$$

$$A_y = A \sin(\theta)$$

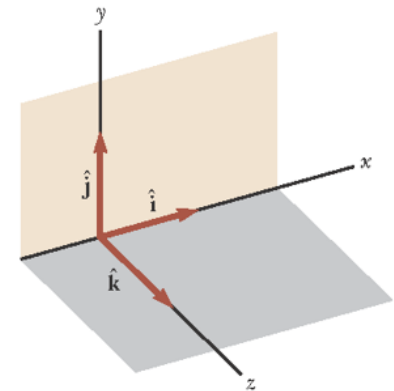
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{A_y}{A_x} \right)$$



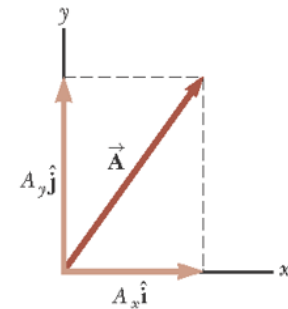
- Προσοχή στον υπολογισμό της γωνίας θ !

Διανύσματα

- Πολλές φορές εκφράζουμε σύνθετα διανύσματα με όρους **μοναδιαίων διανυσμάτων**
- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 - Έχουν μέτρο 1 (μονάδα)
 - Δίνουν διεύθυνση
 - $i \rightarrow x, j \rightarrow y, k \rightarrow z$
 - Κάθετα μεταξύ τους
 - $i \perp j, j \perp k, i \perp k$



a



b

Διανύσματα

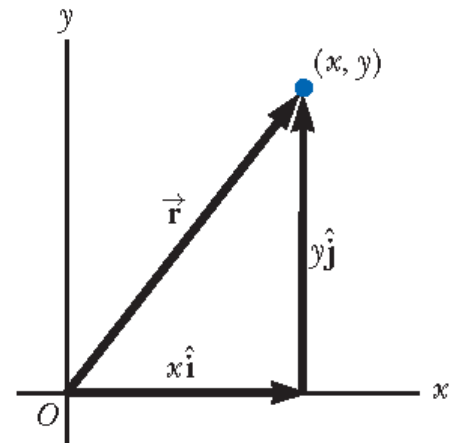
- Το διάνυσμα $\vec{A}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

με χρήση των μοναδιαίων διανυσμάτων

- **Διάνυσμα θέσης**

- Σημείο $A(x,y)$
- $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Οι συνιστώσες του $\vec{r}$ είναι οι $x\vec{i}, y\vec{j}$.



Διανύσματα

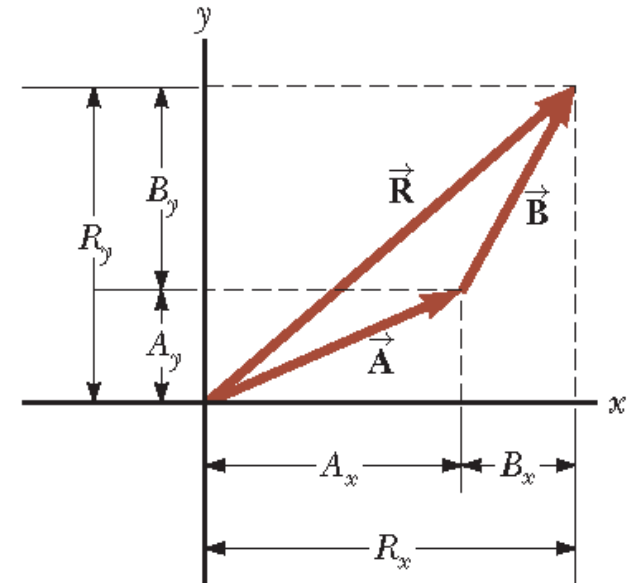
- $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{R} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j})$
- $\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$
- με

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$

- Πρόσθεση όλων των x-συνιστωσών και όλων των y-συνιστωσών

- $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$

- $\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$

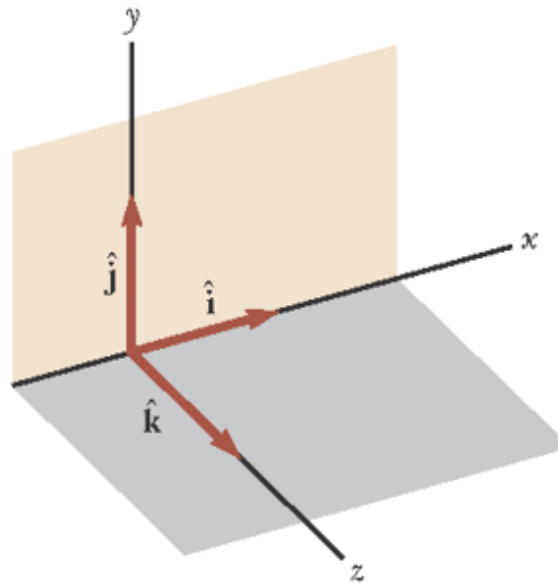


Διανύσματα

- Προσθήκη περισσότερων διαστάσεων

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

- Όμοια ακριβώς συλλογιστική!

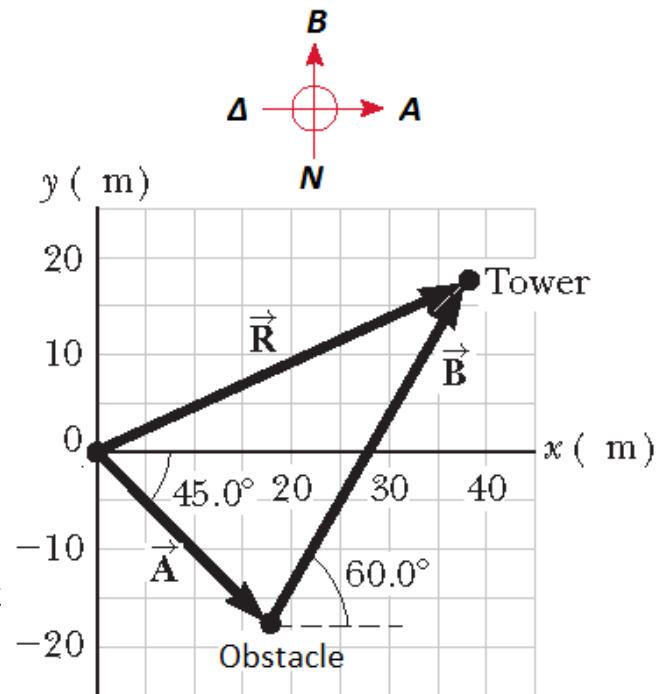


Διανύσματα

Παράδειγμα

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

- A. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.
- B. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το R με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.
- C. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με τον πύργο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



Διανύσματα

● Παράδειγμα (Λύση)

● Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

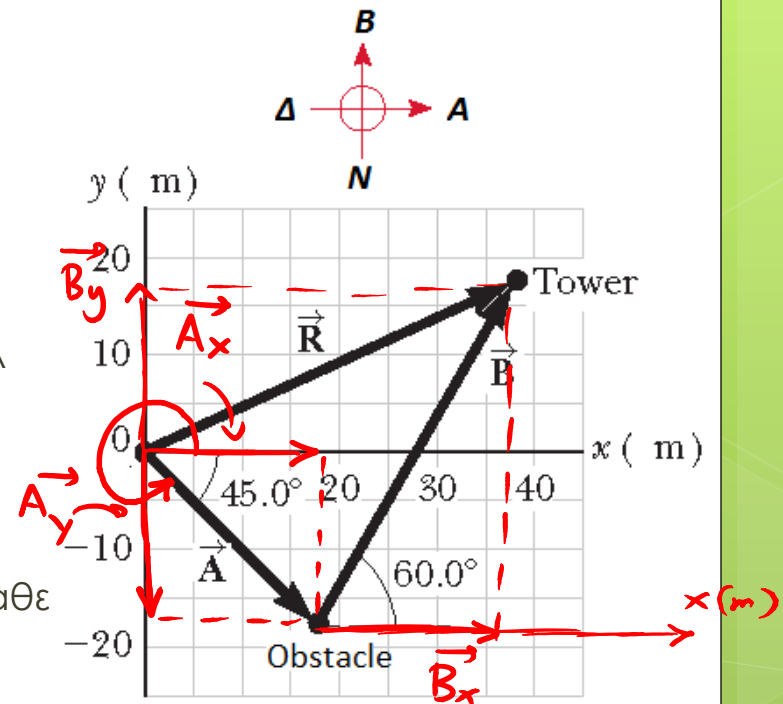
Α. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.

$$A_x = A \cdot \cos(-45^\circ) = 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 17.7 \text{ m}$$

$$A_y = A \cdot \sin(-45^\circ) = -A \cdot \sin(45^\circ) = -25 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -17.7 \text{ m}$$

$$B_x = B \cdot \cos 60^\circ = 20 \text{ m}$$

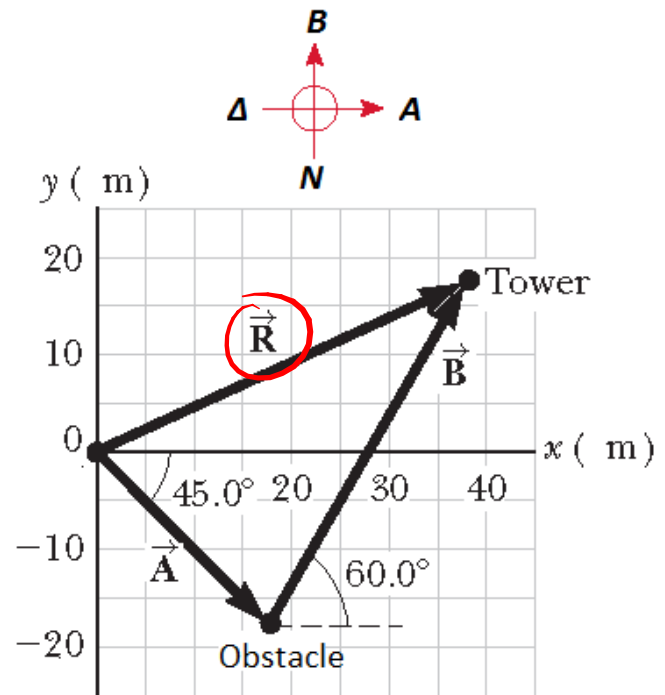
$$B_y = B \cdot \sin 60^\circ \approx 34.7 \text{ m}$$



Διανύσματα

Παράδειγμα (Λύση)

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)
- Β. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.



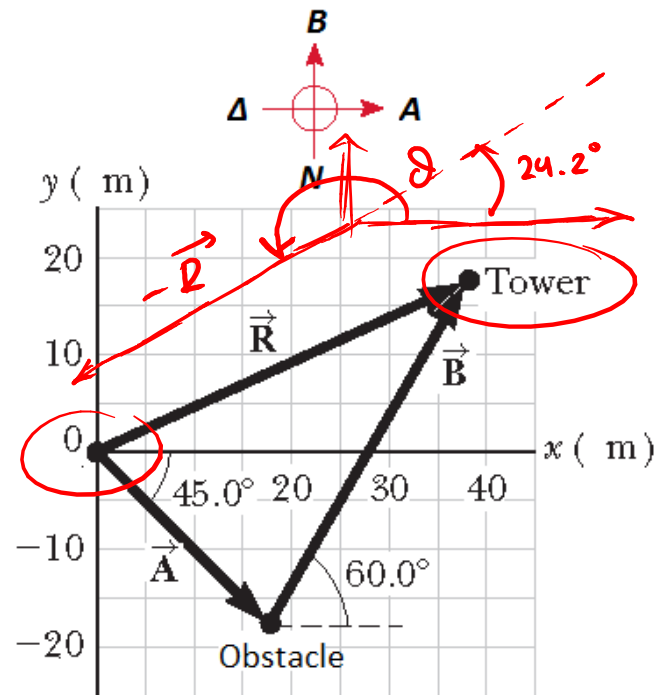
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \\ R_x &= A_x + B_x = 37.7 \\ R_y &= A_y + B_y \approx 17.0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = 37.7 \vec{i} + 17.0 \vec{j}$$

Διανύσματα

● Παράδειγμα (Λύση)

● Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

c. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με τον πύργο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



$$\vec{R}' = -\vec{R} = -(37.7 \cdot \vec{i} + 17.0 \cdot \vec{j}) = -37.7 \cdot \vec{i} - 17 \cdot \vec{j}$$

$$\text{Κατεύθυνση: } \vartheta = \tan^{-1} \frac{R'_y}{R'_x} = \tan^{-1} \frac{-17}{-37.7} \approx 0.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta \approx 24.2^\circ \xrightarrow{+\pi} \vartheta \approx 204.2^\circ$$



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

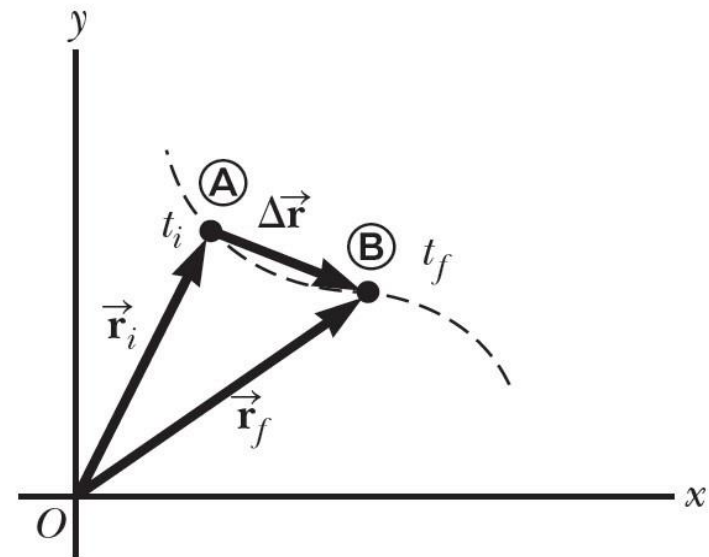
- Μελέτη κίνησης σε δυο διαστάσεις
 - Κίνηση στο επίπεδο (x-y)
- Χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές
 - Κίνηση ρομπότ στο επίπεδο
 - Κίνηση ηλεκτρονίων σε ηλεκτρικό πεδίο
 - Κίνηση δορυφόρου σε τροχιά

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Είδαμε σε προηγούμενη διάλεξη την κίνηση σε μια διάσταση (οριζόντιος άξονας x)
- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες μας στο χώρο $x-y$
 - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
 - αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
 - Ξεκινά από το $(0,0)$ και φτάνω ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy
- **Μετατόπιση $\vec{\Delta r}$**
 - Διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης
 - $\vec{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt :

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

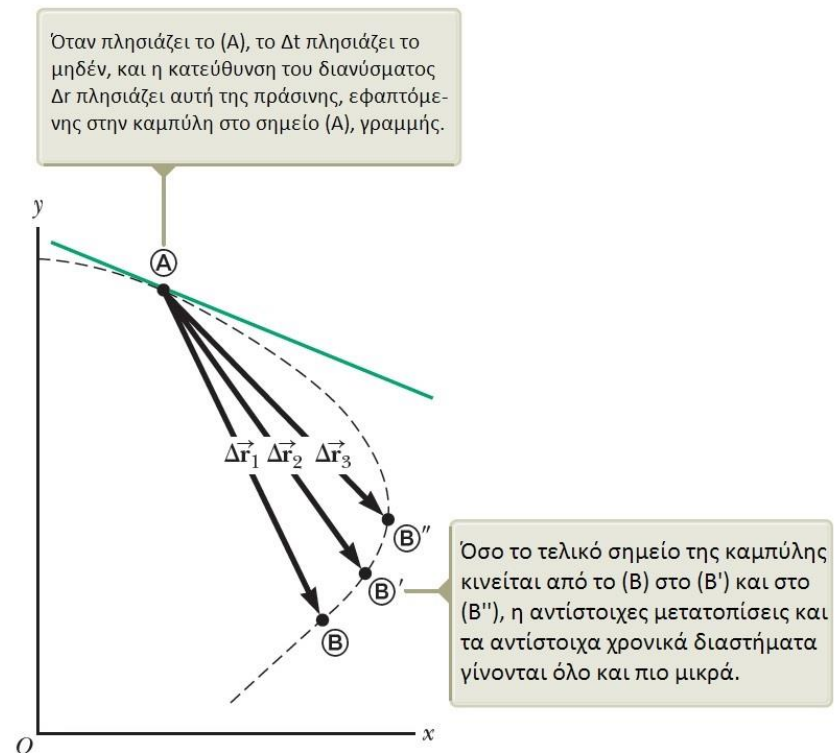
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta \vec{r}$
 - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!!
 - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta \vec{r}$
 - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, A και B.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά διαστήματα (B, B', B'')
- Η κατεύθυνση του $\Delta \vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Ταχύτητα $\vec{v}$**

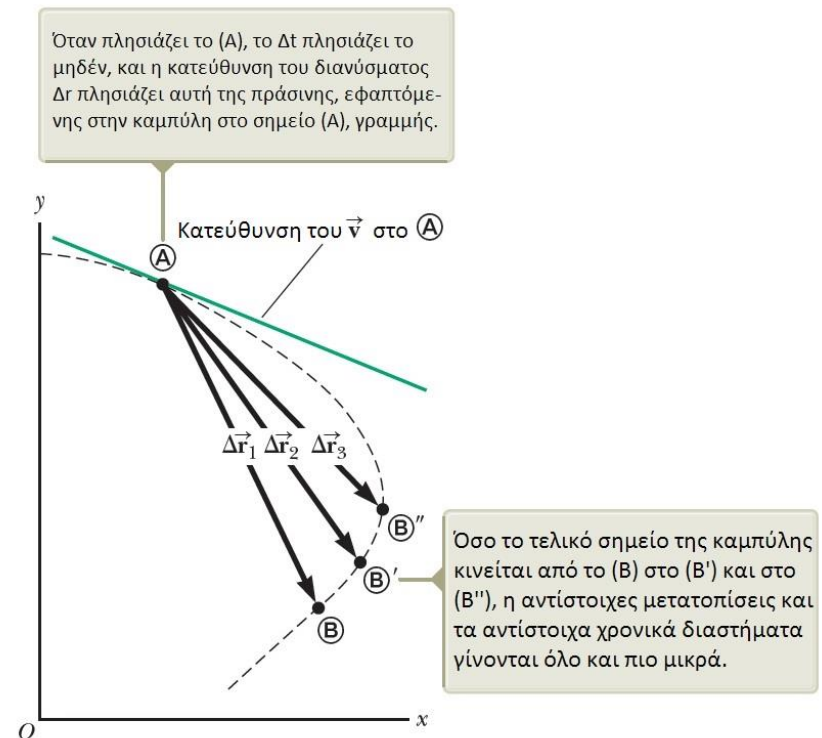
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της σε οποιοδήποτε σημείο βρίσκεται στην εφαπτομένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο

- Ταχύτητα $u = |\vec{v}|$

- Θυμηθείτε:

$$u_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μέση Επιτάχυνση $\vec{a}_{avg}$

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

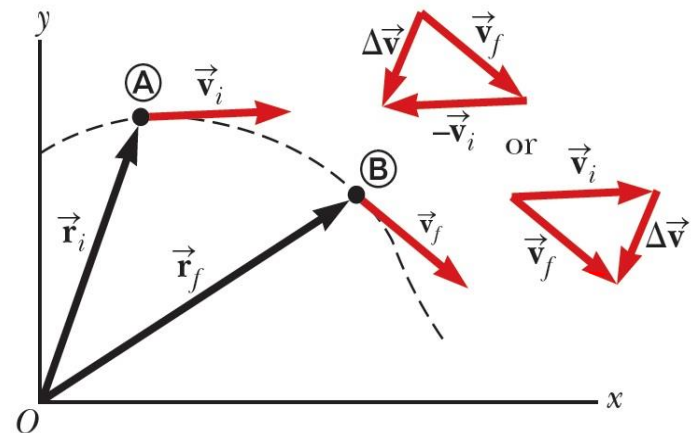
- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta \vec{v}$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στιγμιαία Επιτάχυνση $\vec{a}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Τι αλλαγές συμβαίνουν σε ένα σωματίδιο που επιταχύνει;
 - Αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας
 - Αλλαγή στην κατεύθυνση της ταχύτητας
 - Αλλαγή και των δυο παραπάνω
- Παράδειγμα:
 - Αυτοκίνητο με γκάζι, φρένο, τιμόνι. Ποια από αυτά προκαλούν την επιτάχυνσή του;

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μας ενδιαφέρει η κίνηση σε δυο διαστάσεις με **σταθερή** επιτάχυνση
 - ...όμοια με ό,τι κάναμε στην κίνηση στη μια διάσταση
- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
 - Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:
 - Τον άξονα των x
 - Τον άξονα των y
- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{r}$, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα $\vec{v}$, ως

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

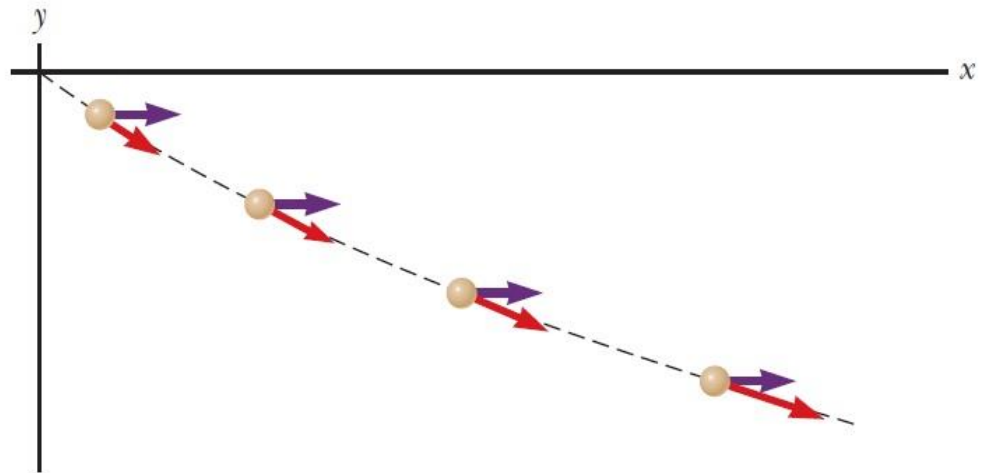
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα με μέτρο $a_x = 4\text{m/s}^2$.

A) Βρείτε το συνολικό διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

B) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$ και τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης r .



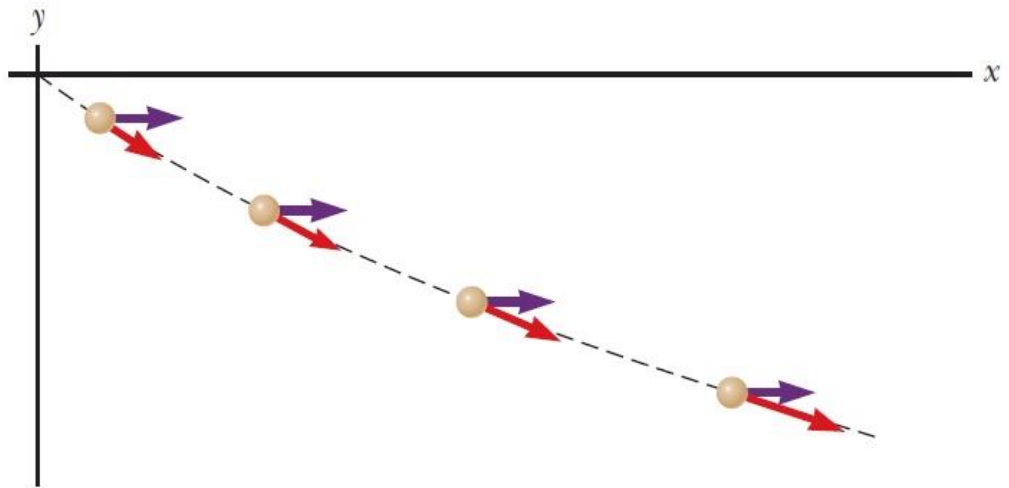
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα με μέτρο $a_x = 4\text{m/s}^2$.

Α) Βρείτε το συνολικό διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε } \vec{v}_f &= \vec{v}_i + \vec{a} \cdot t = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} \\ &= (u_{x_i} + a_x t) \vec{i} + (u_{y_i} + a_y t) \vec{j} \\ &= (20 + 4t) \vec{i} + (-15 + 0) \vec{j} \\ &= (20 + 4t) \vec{i} - 15 \vec{j}\end{aligned}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα με μέτρο $a_x = 4\text{m/s}^2$.

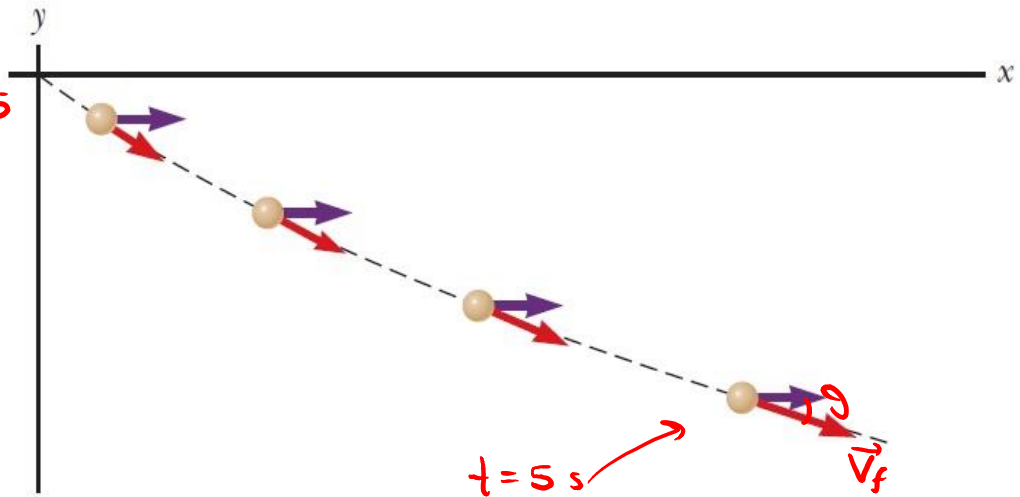
Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$ και τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

$$\text{Είναι } \vec{v}_f = (20 + 4t)\vec{i} - 15\vec{j} \Big]_{t=5}$$

$$= 40\vec{i} - 15\vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα } |\vec{v}_f| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} = 43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{και } \theta = \tan^{-1} \frac{-15}{40} \approx -21^\circ$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα με μέτρο $a_x = 4\text{m/s}^2$.
- Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης r .

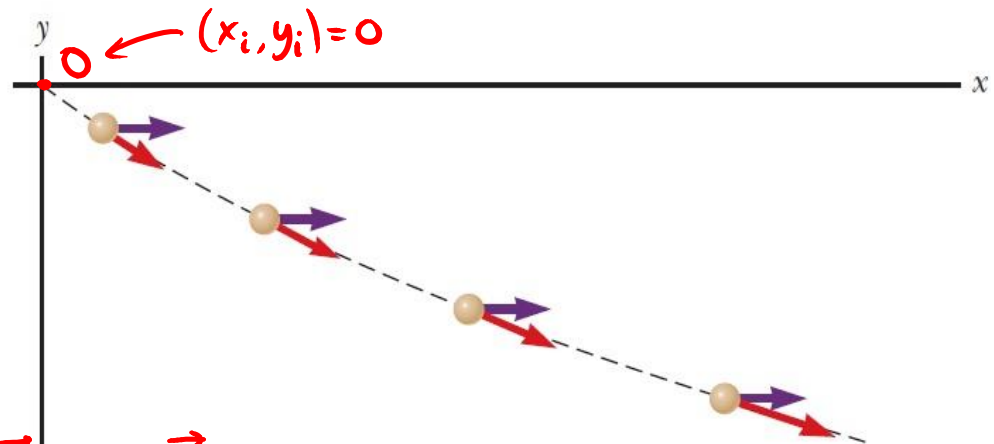
Στον y -άξονα, ομαλή κίνηση:

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + u_{y_i} t = 0 + u_{y_i} \cdot t \\ &= -15t \end{aligned}$$

Στον x -άξονα, επιταχ. κίνηση:

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + u_{x_i} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ &= 20t + 2t^2 \end{aligned}$$

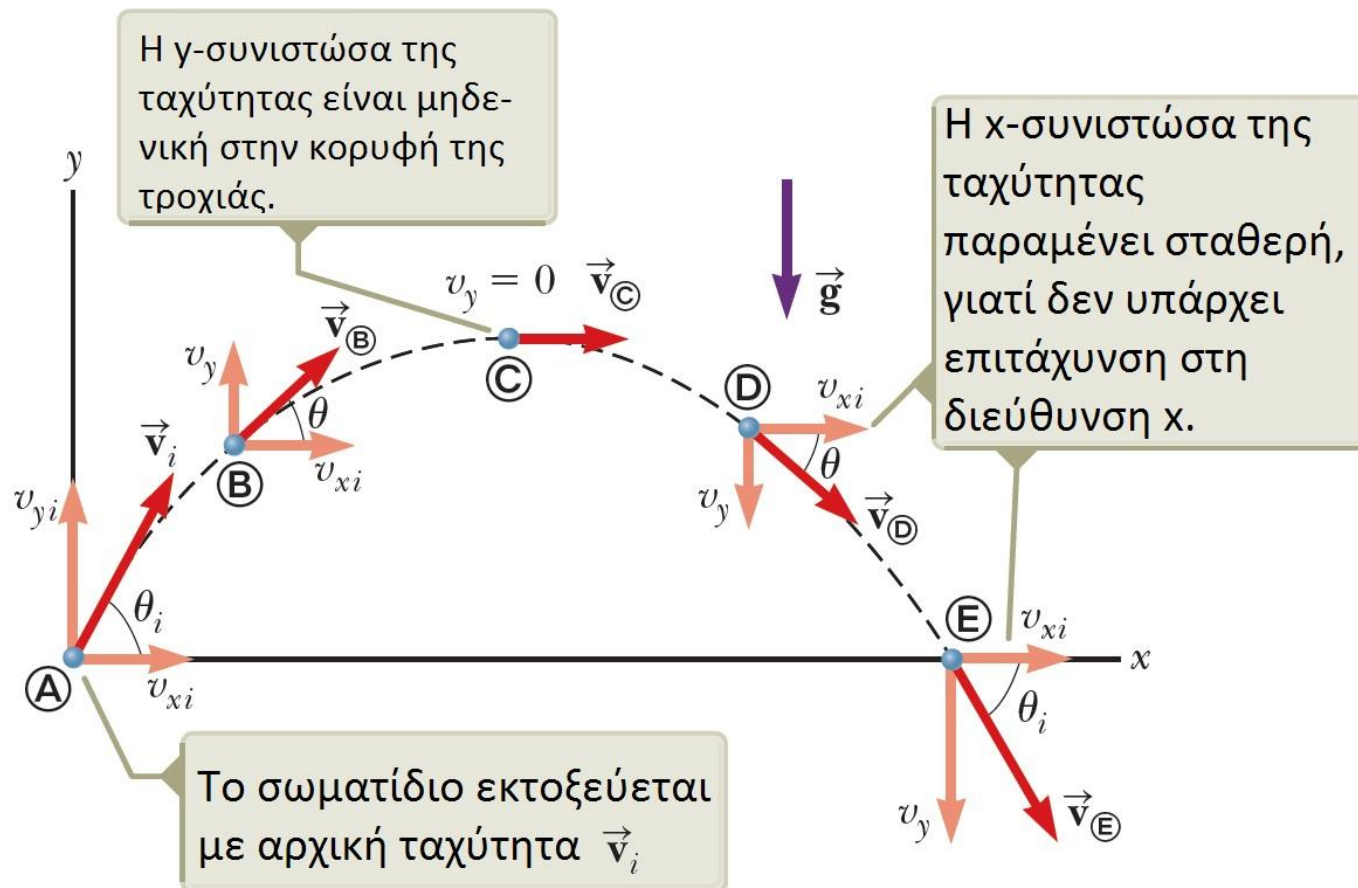
$$\text{Άρα } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (20t + 2t^2)\vec{i} - 15t\vec{j}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή**.
- Το μόνο που αλλάζει είναι
 - A. Η **επιτάχυνση της βαρύτητας g** , που θεωρείται σταθερή και κάθετη (προς τα κάτω) στον άξονα x .
 - B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.
- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή...

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις βολής
 - $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g}t$
 - $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 14 (7 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση

- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$

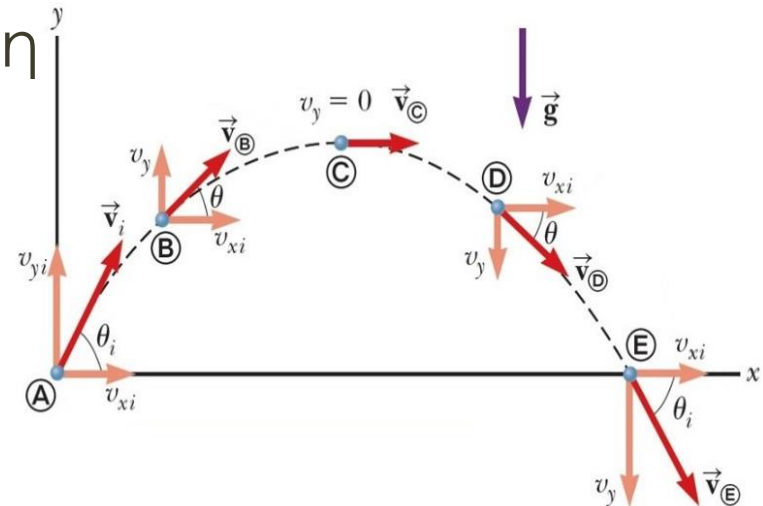
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:

- A) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα (u σταθερή)

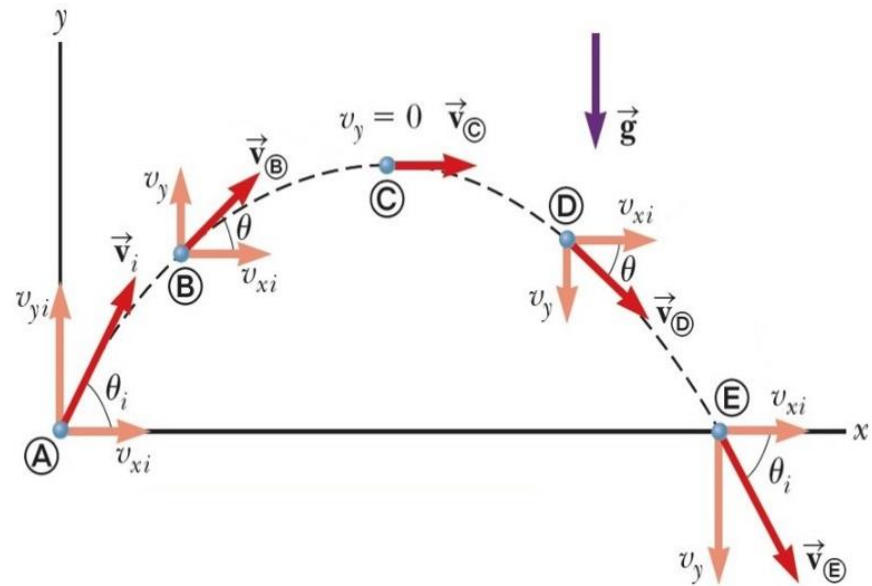
- B) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα (g – βαρύτητα)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

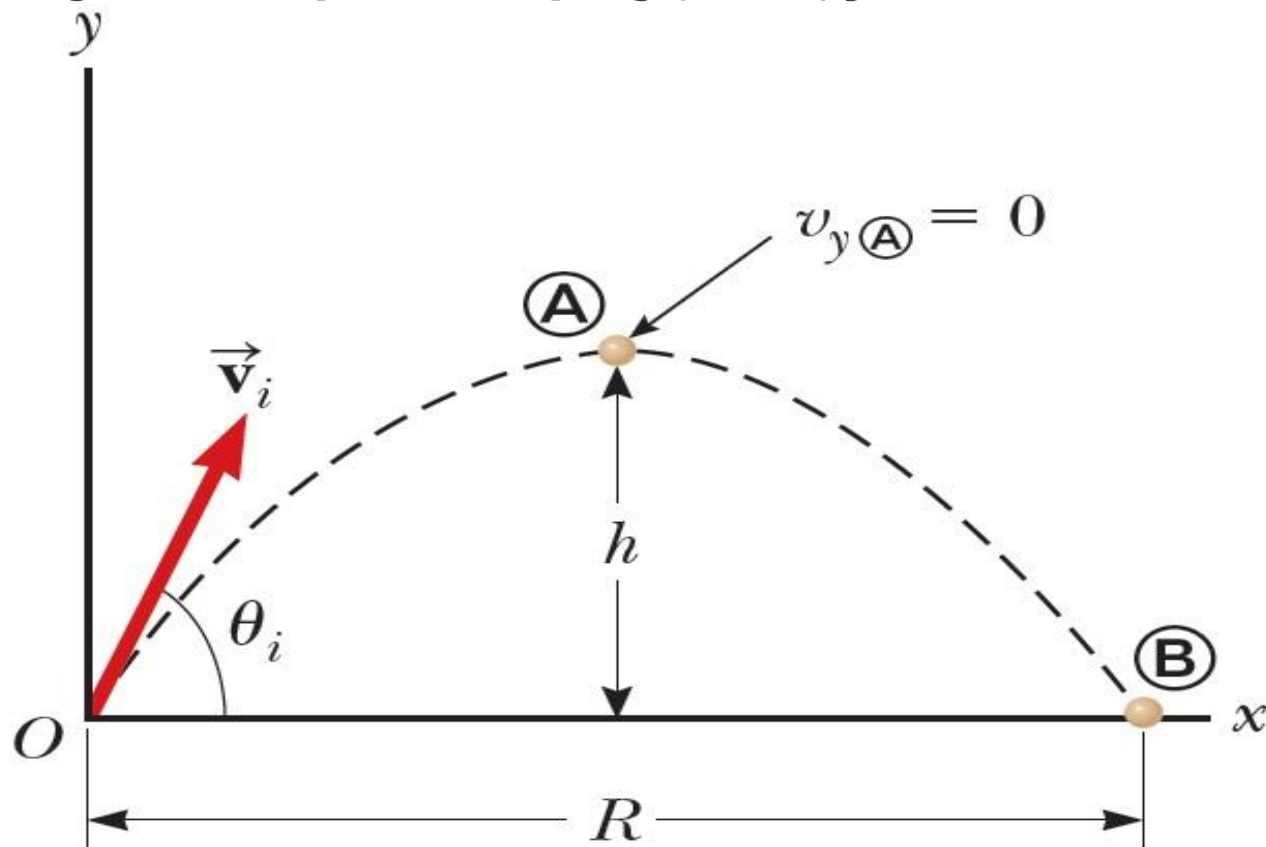
- **A)** $x_f = x_i + u_{xi}t$
- **B)** $u_{yf} = u_{yi} - gt$
 $u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$
 $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
 $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
 $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



- Εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Εύρος και Μέγιστο Ύψος βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h , R συναρτήσει των δεδομένων:

Εύρος R :

Στον x -άξονα, ευθύγραμμη φάση: $x_f = x_i + u_{x_i} t \Rightarrow R = 0 + u_{x_i} \cdot t \Rightarrow$
 $\Rightarrow R = u_i \cdot \cos \theta_i \cdot t \Rightarrow t = \frac{R}{u_i \cdot \cos \theta_i} \quad (1)$

Στον y -άξονα, φάση επιταχυνόμενη: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 = 0 + u_i \sin \theta_i \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{(1)} 2 u_i \sin \theta_i \cdot \frac{R}{u_i \cdot \cos \theta_i} = g \left(\frac{R}{u_i \cos \theta_i} \right)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 R \tan \theta_i = g \frac{R^2}{u_i^2 \cos^2 \theta_i} \Rightarrow R = \frac{2 u_i^2 \cos^2 \theta_i \cdot \tan \theta_i}{g} =$
 $= \frac{2 u_i^2 \sin \theta_i \cdot \cos \theta_i}{g}$
 $2 \sin \theta_i \cdot \cos \theta_i = \sin(2 \theta_i) \quad \left. \vphantom{\frac{2 u_i^2 \sin \theta_i \cdot \cos \theta_i}{g}} \right\} \Rightarrow R = \frac{u_i^2 \sin 2 \theta_i}{g}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Μέγιστο ύψος h :

Στον y -άξονα, ομαλά επιταχυνόμενη: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{y_f = h}$

$$\Rightarrow h = 0 + u_i \sin \theta_i \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης, } u_{y_f} = u_{y_i} - g t \Leftrightarrow 0 = u_i \sin \theta_i - g t \Rightarrow t = \frac{u_i \sin \theta_i}{g} \quad (2)$$

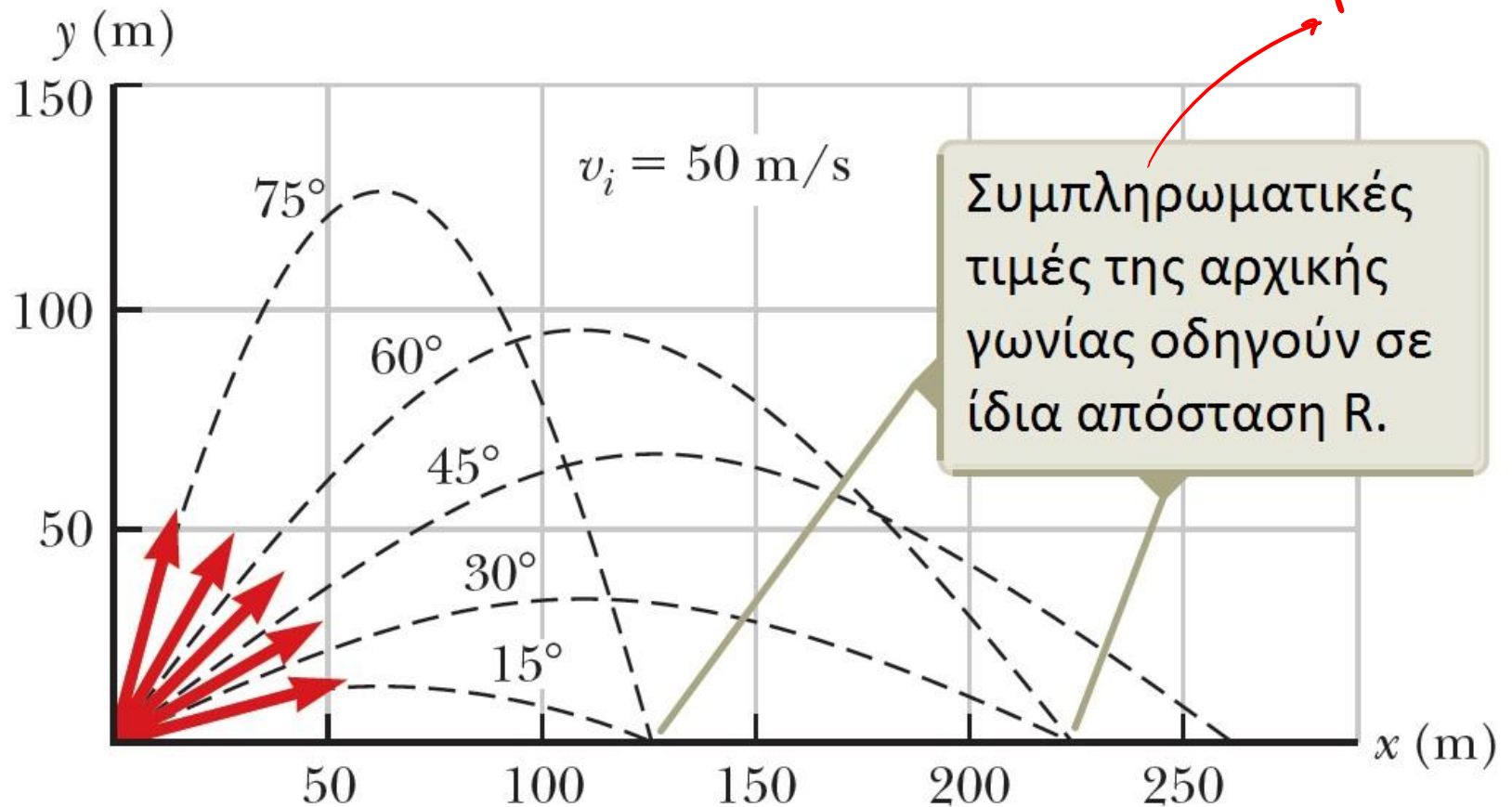
Η (1) λόγω (2) δίνει:

$$h = u_i \sin \theta_i \cdot \frac{u_i \sin \theta_i}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_i \sin \theta_i}{g} \right)^2$$

$$= \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{g} - \frac{1}{2} \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{g}$$

$$= \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g} \longrightarrow h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

ο Παράδειγμα

- ο Ο Βασίλης Σπανούλης σουτάρει υπό πίεση την μπάλα υπό γωνία 60° με το οριζόντιο επίπεδο, και με ταχύτητα 8m/s .

A) Μπορεί υπό αυτές τις συνθήκες να σκοράρει 3ποντο;

B) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 60° - ταχύτητα 8m/s .

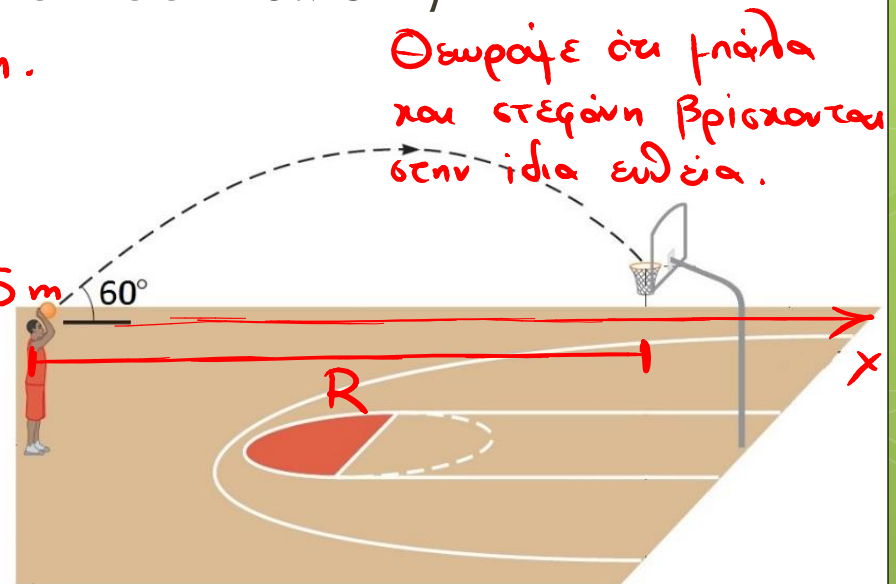
Α) Μπορεί υπό αυτές τις συνθήκες να σκοράρει 3ποντο; (απόσταση 3ποντου = 6.75m)

Θεωράμε ότι σκοράρει αν $R = 6.75\text{ m}$.

Όμως

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} = 5.61\text{ m} < 6.75\text{ m}$$

Άρα ΔΕΝ σκοράρει.



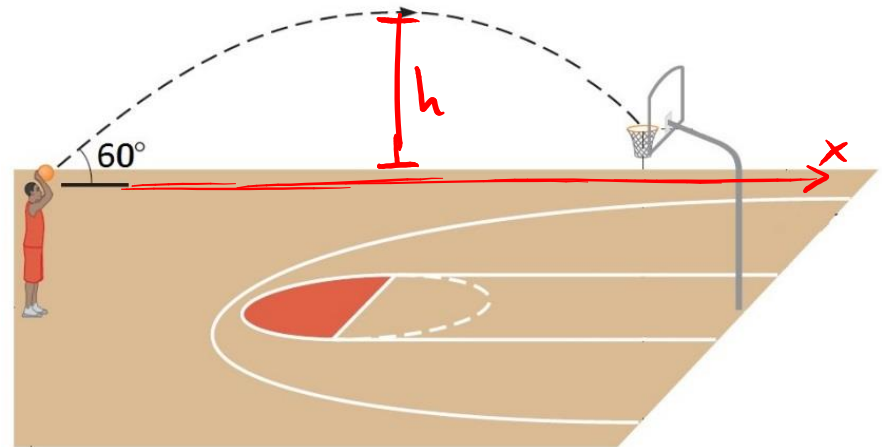
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ γωνία 60° - ταχύτητα 8m/s .

Β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;

Είναι
$$h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{g} \approx 2.41 \text{ m}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

ο Παράδειγμα (πιο ρεαλιστικό)

- ο Βασίλης Σπανούλης σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40° με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3m.

A) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλώ;



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

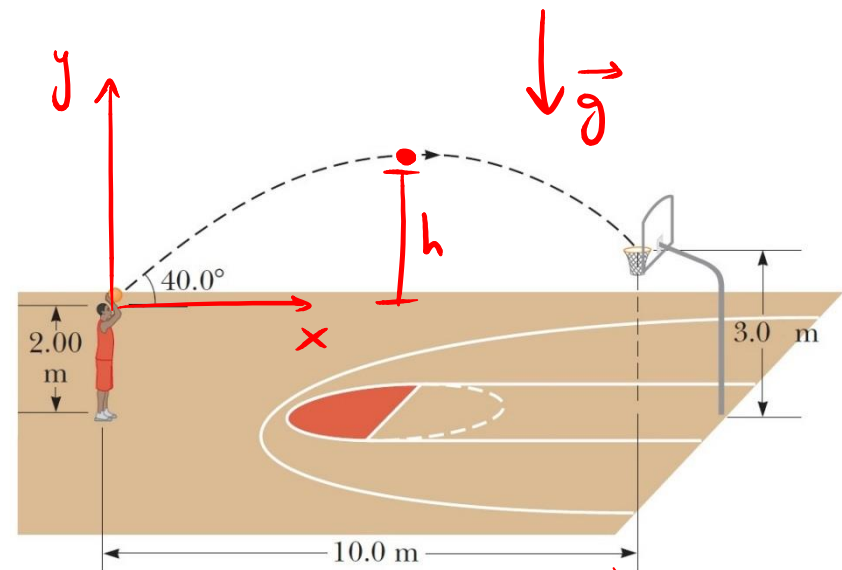
Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Προφανώς $\vec{g}$, σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς της!

Δηλ. $g = -9.8 \frac{m}{s^2}$, αφού το

διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει

φορά προς τα κάτω (θεωρείμε θετική φορά προς τα επάνω)



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$

Στον y -άξονα: $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$

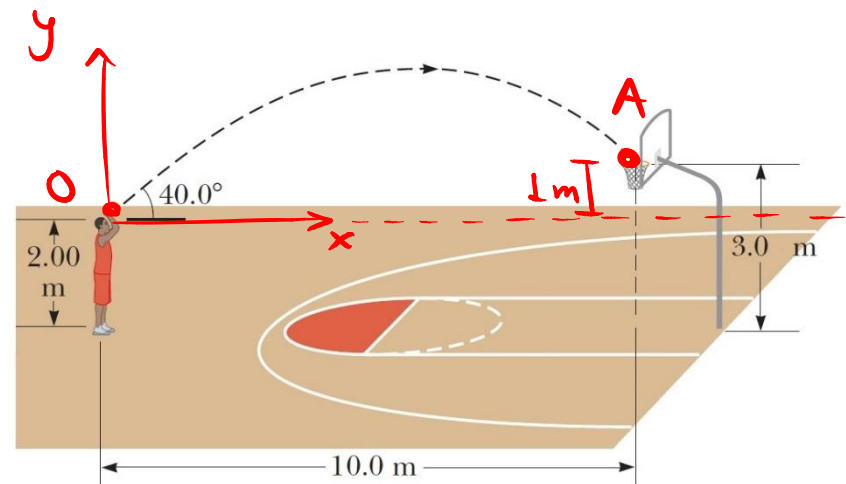
① $\leftarrow 1 = 0 + u_i \sin \theta_i t - \frac{1}{2}gt^2$

Στον x -άξονα: $x_f = x_i + u_{x_i}t$

$$10 = 0 + u_i \cos \theta_i t$$

$$t = \frac{10}{u_i \cos \theta_i} \quad \text{②}$$

Η ① $\xrightarrow{\text{②}}$ $1 = 10 \tan \theta_i - \frac{1}{2}g \frac{100}{u_i^2 \cos^2 \theta_i} \Rightarrow u_i \approx 10.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



↑ ΔΕΝ είναι πλέον το εύρος R!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

ο Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.
Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

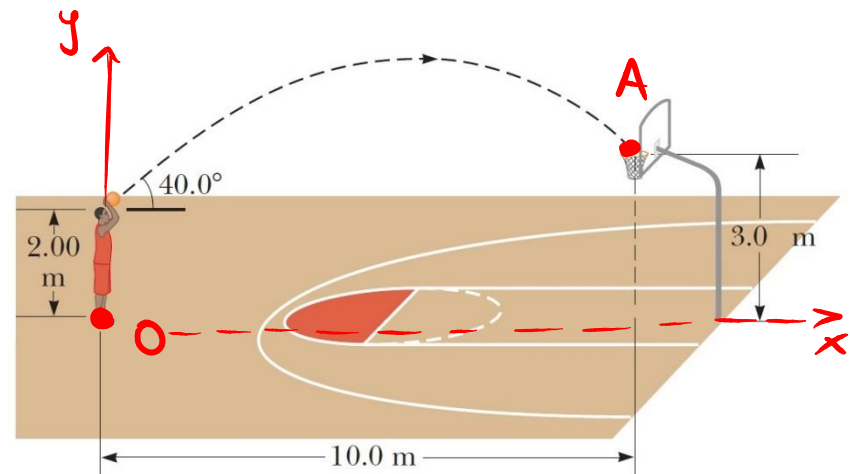
$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$

Εναλλακτική λύση : σημείο αναφοράς
το $O(0,0)$ στα πόδια του παίκτη.

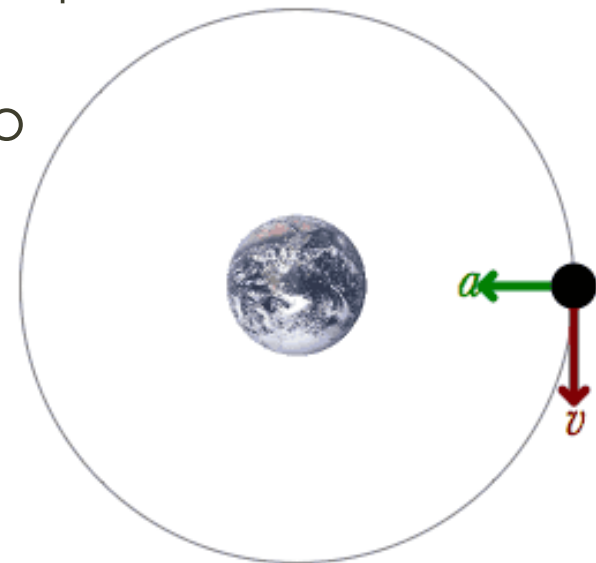
Ωστε το! 😊



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**

- Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
- Σταθερή αριθμητική ταχύτητα
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
- Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ομαλή κυκλική κίνηση

- Ταχύτητα

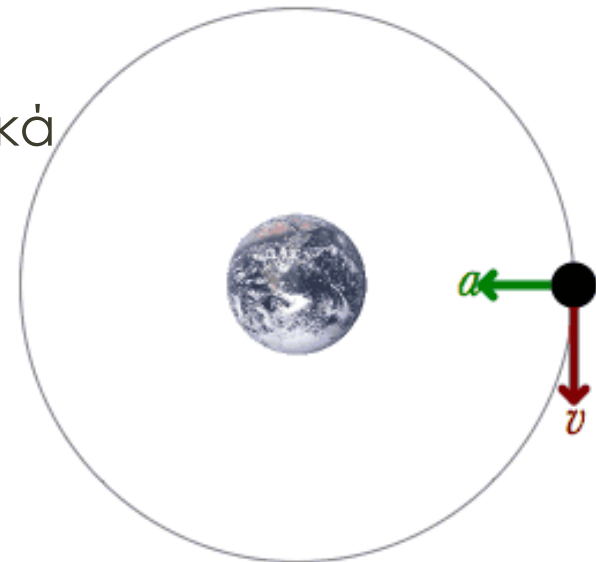
- Διάνυσμα εφαπτόμενο στον κύκλο
- Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης

- Επιτάχυνση

- Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
- Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου



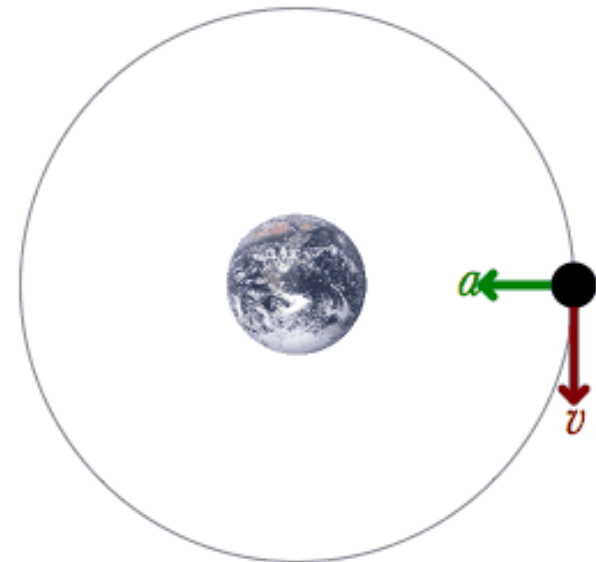
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

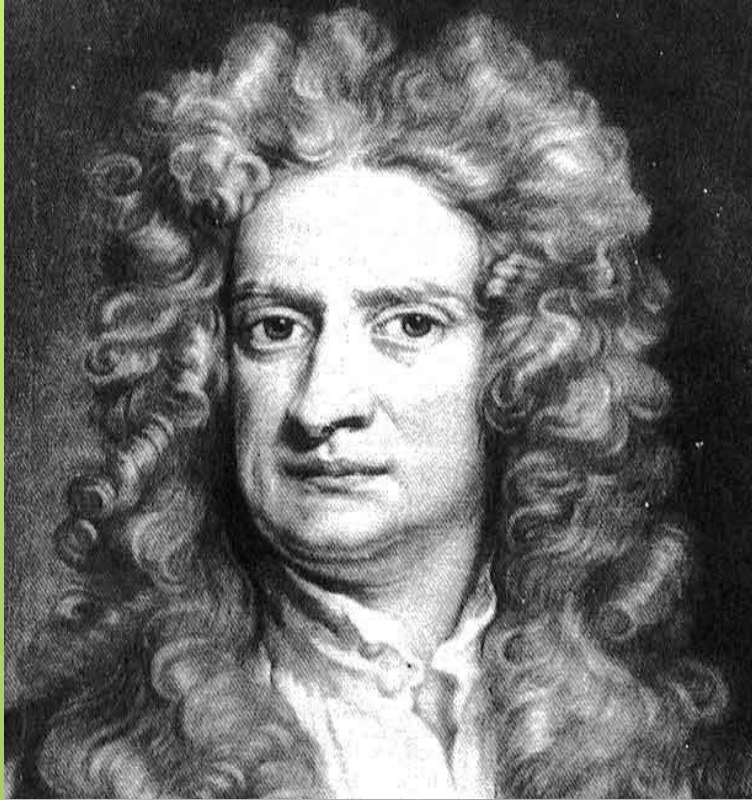
- Ομαλή κυκλική κίνηση

- Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

- Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**



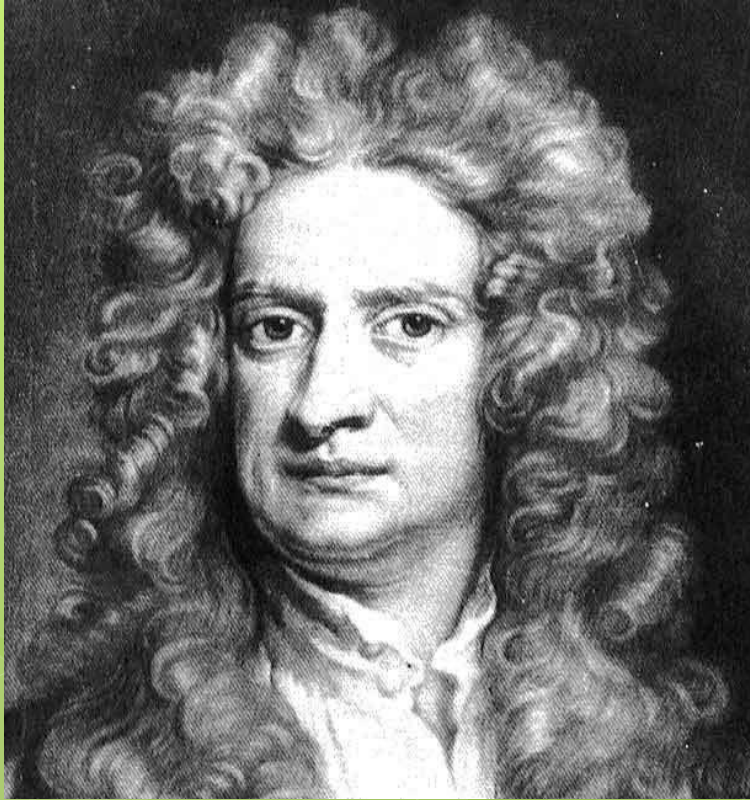


Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης



Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ως τώρα, μελετήσαμε κινήσεις σωματιδίων
 - Ορίσαμε μέτρο, κατεύθυνση
 - Δεν μας ενδιέφερε η **αίτια** της κίνησης
- Καιρός να τη μελετήσουμε κι αυτή! 😊

Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Ερωτήματα

- ◉ Γιατί αλλάζει η κίνηση ενός αντικειμένου;
- ◉ Τι προκαλεί την κίνηση ή την ακινησία του;
- ◉ Γιατί είναι πιο εύκολο να κινήσουμε ένα μικρό από ένα μεγάλο αντικείμενο;

◉ «Κλειδιά» για τις απαντήσεις

- ◉ **Δύναμη (Force – F)** που ασκείται στο αντικείμενο
- ◉ **Μάζα (Mass – m)** του αντικειμένου

Οι Νόμοι της Κίνησης

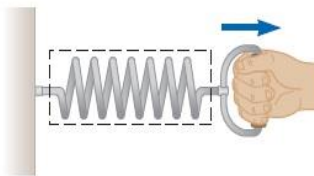
ο Δύναμη

- ο Καθημερινή εμπειρία
 - ο Πέταγμα μπάλας
 - ο Σπρώξιμο ντουλάπας
 - ο Τράβηγμα συρταριού
- ο Αλληλεπίδραση με αντικείμενα μέσω μυσικής δράσης, με αποτέλεσμα την αλλαγή της ταχύτητάς τους
- ο Δεν είναι όμως πάντα απαραίτητη η πρόκληση κίνησης
 - ο Βαριά μπάλα
 - ο Μεγάλη ντουλάπα
 - ο Κλειδωμένο συρτάρι

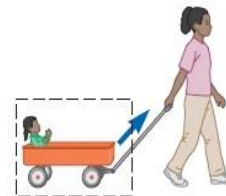
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Οι Δυνάμεις είναι αυτές που αλλάζουν την ταχύτητα ενός αντικειμένου (I. Newton)
- Δυο κατηγορίες δυνάμεων
 - Δυνάμεις Επαφής
 - Δυνάμεις Πεδίου

Δυνάμεις Επαφής



a



b

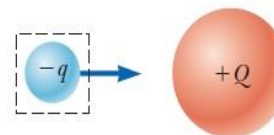


c

Δυνάμεις Πεδίου



d



e

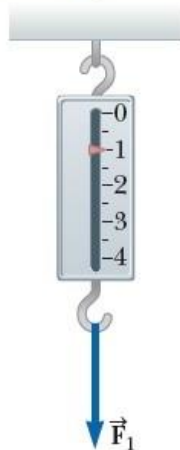


f

Οι Νόμοι της Κίνησης

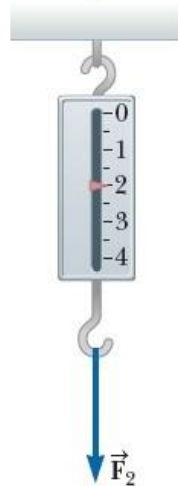
- Η διανυσματική φύση της Δύναμης

Μια δύναμη προς τα κάτω επιμηκύνει το ελατήριο κατά 1 εκ.



a

Μια μεγαλύτερου μέτρου δύναμη επιμηκύνει το ελατήριο κατά 2 εκ.



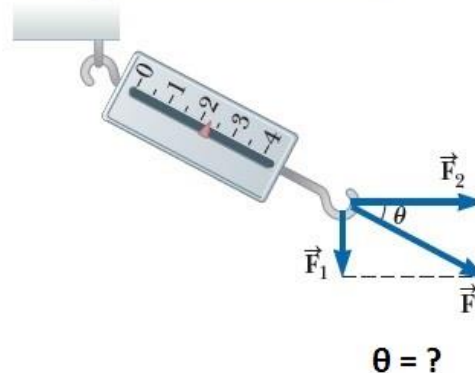
b

Όταν οι δυο δυνάμεις εφαρμόζονται ταυτόχρονα στην ίδια κατεύθυνση, το ελατήριο επιμηκύνεται κατά 3 εκ.



c

Όταν οι δυο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους όπως στο σχήμα (d), ο συνδυασμός τους (η συνισταμένη τους) επιμηκύνει το ελατήριο κατά 2.24 εκ.



d

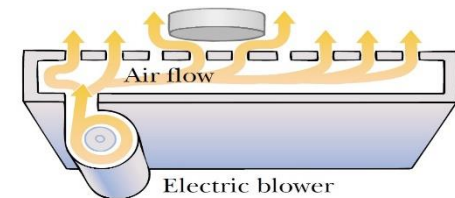
Οι Νόμοι της Κίνησης

• Πρώτος Νόμος του Newton – Αδράνεια

- Ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ένα αντικείμενο έχει **μηδενική** επιτάχυνση, αν αυτό δεν αλληλεπιδρά με άλλα αντικείμενα λέγεται Αδρανειακό σύστημα αναφοράς

• Παράδειγμα

- Σε ακινησία (αδρανειακό σύστημα)
- Σε σταθερή ταχύτητα (--- “ ---)
- Υπό σταθερή επιτάχυνση (π.χ. σε ένα τρένο)
(ΜΗ αδρανειακό για τον επιβάτη, αδρανειακό για τον εξωτερικό παρατηρητή)
- Οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς που κινείται με **σταθερή ταχύτητα** σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι κι αυτό αδρανειακό



Οι Νόμοι της Κίνησης

● Πρώτος Νόμος του Newton (2^η έκδοση ☺)

- Απουσία εξωτερικών δυνάμεων και παρουσία αδρανειακού συστήματος αναφοράς
 - ένα αντικείμενο σε ηρεμία παραμένει σε ηρεμία και
 - ένα αντικείμενο σε κίνηση παραμένει σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα
- Με άλλα λόγια
 - Όταν δεν επιδρά καμιά δύναμη σε ένα αντικείμενο, η επιτάχυνση του αντικειμένου είναι μηδενική
- Η τάση ενός αντικειμένου να αντιδρά σε οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής του κατάστασης λέγεται **αδράνεια**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Από τα προηγούμενα, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι:
- Ένα αντικείμενο που επιταχύνει πρέπει να υπόκειται σε κάποια δύναμη
- Η δύναμη είναι το αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός αντικειμένου

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Διαφορετικά αντικείμενα χρειάζονται διαφορετικό μέτρο δύναμης για να μεταβάλλουν την κατάσταση κίνησής τους
 - Με άλλα λόγια, αντιστέκονται περισσότερο ή λιγότερο στη μεταβολή της κίνησής τους
- Γιατί???
- Γιατί έχουν διαφορετική **μάζα**
- Η **μάζα** είναι μια ιδιότητα ενός αντικειμένου που **ορίζει «πόση» αντίσταση παρουσιάζει στην προσπάθεια μεταβολής της ταχύτητάς του**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ο 1^{ος} Νόμος του Newton μας εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα αντικείμενο όταν δεν ασκούνται δυνάμεις επάνω του
- Ο 2^{ος} Νόμος του Newton (που θα δούμε αμέσως) μας εξηγεί τι συμβαίνει όταν μια ή περισσότερες δυνάμεις ασκούνται επάνω του

Οι Νόμοι της Κίνησης

• Δεύτερος Νόμος του Newton

- Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση ενός αντικειμένου είναι
 - ευθέως ανάλογη στη συνολική δύναμη, $\Sigma \vec{F}$, που ασκείται επάνω του και
 - αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του, m

$$\vec{a} \propto \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$$

- και έτσι έχουμε τη γνωστή σχέση

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Φυσικά, μπορούμε – και σε πολλές περιπτώσεις **επιβάλλεται** – να αναλύσουμε το 2^ο νόμο σε συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες του συστήματος αναφοράς μας

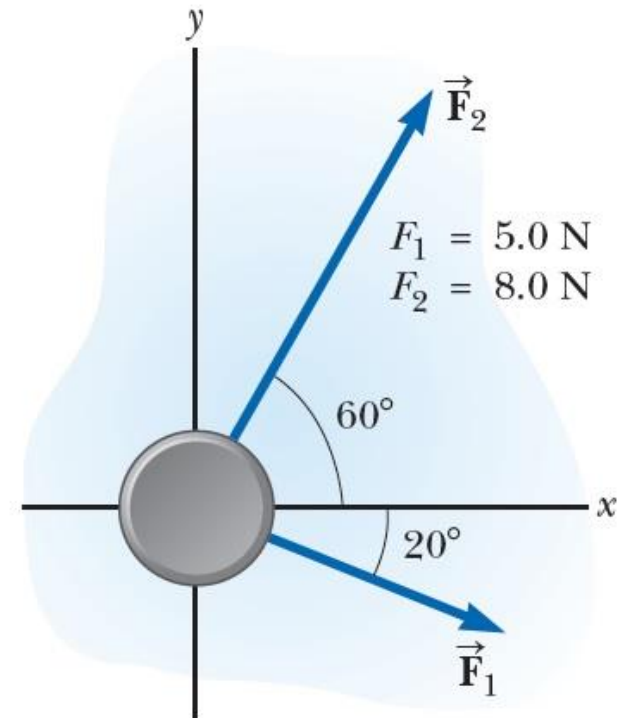
$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x, \quad \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y, \quad \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

- Μονάδα μέτρησης στο S.I.
 - Newton (N) $\Leftrightarrow 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

Οι Νόμοι της Κίνησης

● Παράδειγμα:

- Ένας δίσκος του hockey στον πάγο, μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Δυο μπαστούνια τη χτυπούν ταυτόχρονα, με δυνάμεις και υπό γωνίες όπως στην Εικόνα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.



$$\ast \text{ και } \theta = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1} \frac{17}{29} \approx 30^\circ \Rightarrow \boxed{\theta \approx 30^\circ}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση:

- Δίσκος μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.

$$\text{Στον } x\text{-άξονα: } \Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Rightarrow \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x$$

$$\text{Άρα } F_{1x} + F_{2x} = ma_x \Rightarrow F_1 \cdot \cos 20^\circ + F_2 \cdot \cos 60^\circ = ma_x$$

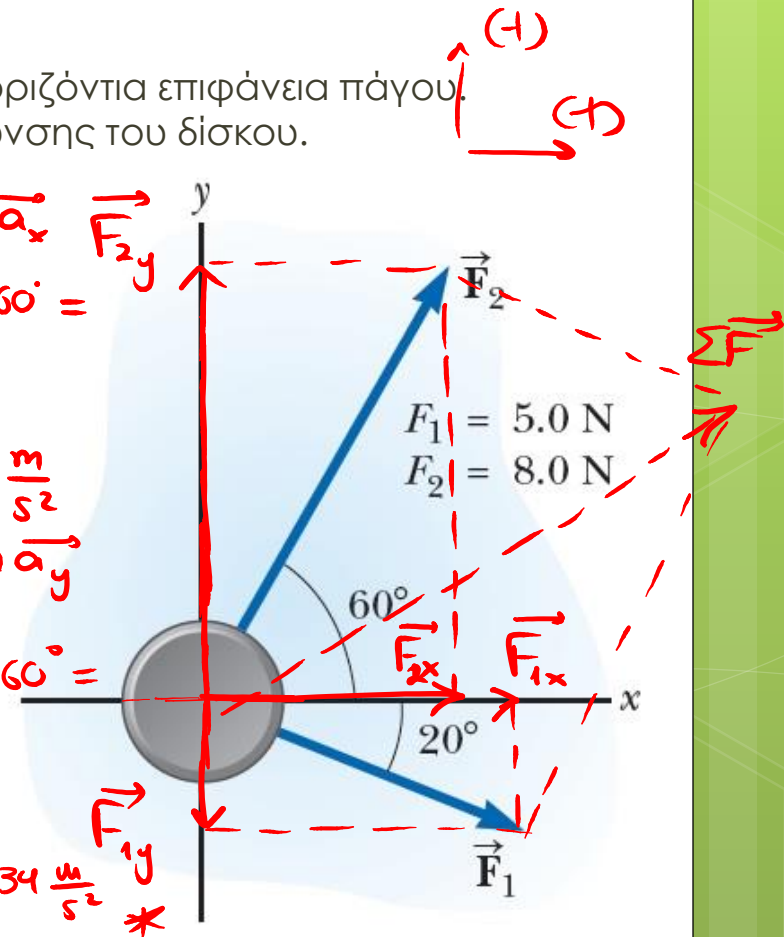
$$\text{Άρα } 5 \cdot \cos 20^\circ + 8 \cos 60^\circ = 0.3 a_x \Rightarrow a_x = 29 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Στον } y\text{-άξονα: } \Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Rightarrow \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y$$

$$\text{Άρα } -F_{1y} + F_{2y} = ma_y \Rightarrow -F_1 \cdot \sin 20^\circ + F_2 \cdot \sin 60^\circ = ma_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_y = 17 \text{ m/s}^2. \text{ Τελικώς, } |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 34 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Rightarrow F_2 \cdot \sin 60^\circ + F_1 \cdot \sin(-20^\circ) = ma_y = \dots$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- Όλα τα αντικείμενα έλκονται από τη Γη
 - Με άλλα λόγια, η Γη ασκεί δύναμη επάνω τους
 - Άρα, τα επιταχύνει!
- Βαρυτική επιτάχυνση $\vec{g}$
- 2^{ος} Νόμος του Newton για αντικείμενο που πέφτει ελεύθερα

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} \leftrightarrow \vec{F}_g = m\vec{g}$$

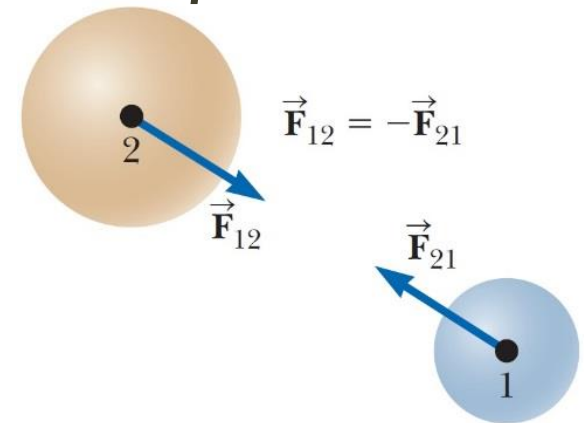
Οι Νόμοι της Κίνησης

• Τρίτος Νόμος του Newton

- Σε κάθε δράση, υπάρχει μια αντίδραση!
- Πιο τυπικά... ☺

- Αν δυο αντικείμενα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το αντικείμενο 1 στο αντικείμενο 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το αντικείμενο 2 στο αντικείμενο 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Ανάλυση** με βάση τους Τρεις Νόμους
 - Δυο μοντέλα
 - Α) Όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία** ($\vec{a} = \mathbf{0}$)
 - Β) Όταν επιταχύνουν από την άσκηση εξωτερικών δυνάμεων ($\vec{a} \neq \mathbf{0}$)

Οι Νόμοι της Κίνησης

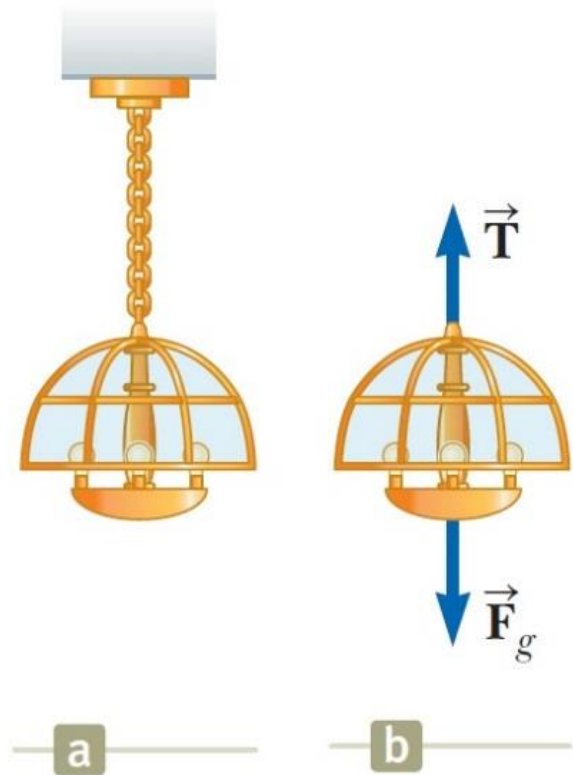
- Α) Όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία**

$$(\vec{a} = 0)$$

- η συνισταμένη των δυνάμεων

$$\Sigma \vec{F} = 0 !$$

- Παράδειγμα

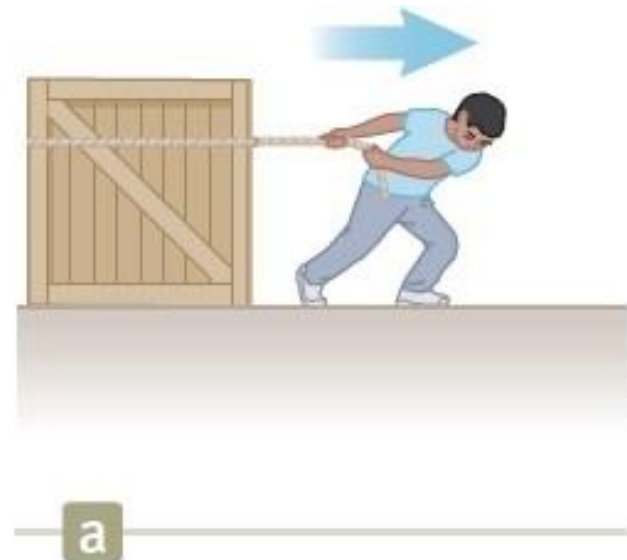


Οι Νόμοι της Κίνησης

- Β) Όταν τα σώματα επιταχύνουν υπό την επίδραση δύναμης ($\vec{a} \neq \mathbf{0}$)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Παράδειγμα
 - Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο
 - Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο



Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Παράδειγμα

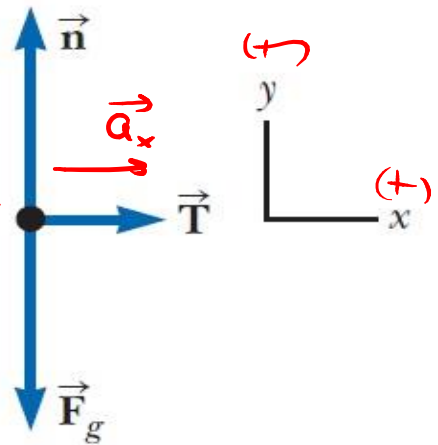
- ◉ Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο
- ◉ Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο



a

$$x\text{-}\acute{\alpha}\lambda\acute{\alpha}\nu\sigma\eta\text{: } \sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Rightarrow T = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{T}{m}.$$

$$y\text{-}\acute{\alpha}\lambda\acute{\alpha}\nu\sigma\eta\text{: } \sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \Rightarrow n = F_g = mg.$$



b

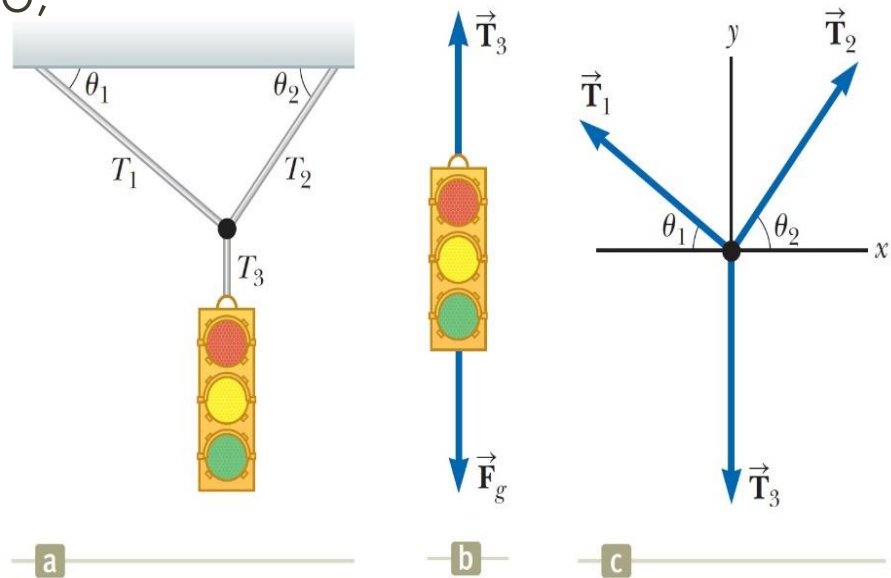
Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δυο σημεία** που πρέπει να προσέξετε
- 1) Σε ένα πρόβλημα, είναι δυνατόν να έχετε διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης σε διαφορετικές κατευθύνσεις (άξονες)
 - Προηγούμενο παράδειγμα
 - Ισορροπία στον άξονα y
 - Επιτάχυνση στον άξονα x
- 2) Είναι δυνατόν να περιγραφεί ένα αντικείμενο από πολλαπλά μοντέλα ανάλυσης (την ίδια στιγμή!)
 - Προηγούμενο παράδειγμα
 - Σώμα υπό επίδραση δύναμης στον άξονα x
 - Σώμα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης στον άξονα x

Οι Νόμοι της Κίνησης

• Παράδειγμα

Ένα φανάρι με βάρος 122 N κρέμεται από ένα καλώδιο, που κρέμεται από άλλα δυο καλώδια, όπως στο Σχήμα. Οι γωνίες θ_1, θ_2 είναι ίσες με 37 και 53 μοίρες, αντίστοιχα. Τα πάνω καλώδια σπάνε αν δεχθούν δύναμη μεγαλύτερη από 100 N . Μπορεί να συμβεί αυτό;



Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση

Δίνονται: $\cos(37) = 0.8, \sin(37) = 0.6$

$\cos(53) = 0.6, \sin(53) = 0.8$

Στο Σχήμα (b): $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_3 = -\vec{F}_g \Rightarrow$
 $\Rightarrow T_3 = F_g = 122 \text{ N. } \textcircled{1}$

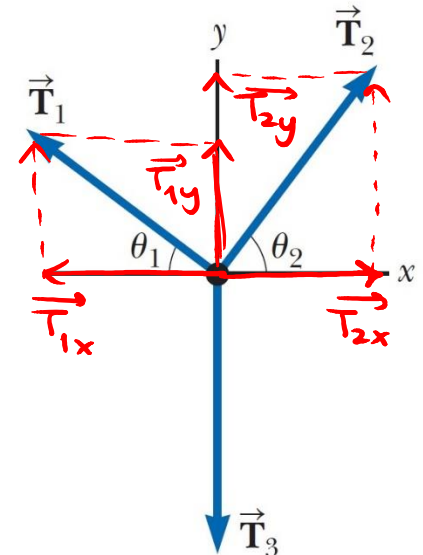
Στο Σχήμα (c): $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{T}_3 = \vec{0} \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} = T_3 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 122 \text{ N} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1 \cdot \sin \theta_1 + T_2 \cdot \sin \theta_2 = 122 \text{ N} \textcircled{2}$

Στον x-άξονα: $\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow -T_1 \cdot \cos \theta_1 + T_2 \cdot \cos \theta_2 = 0 \Rightarrow T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 \Rightarrow T_1 = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} T_2 \textcircled{3}$



Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση

Δίνονται: $\cos(37) = 0.8$, $\sin(37) = 0.6$

$\cos(53) = 0.6$, $\sin(53) = 0.8$

$$\textcircled{3} \Rightarrow T_1 = \frac{0.6}{0.8} T_2 = \frac{3}{4} T_2 \textcircled{4} . \text{ ο. } \textcircled{2} \textcircled{4} \text{ δίναν}$$

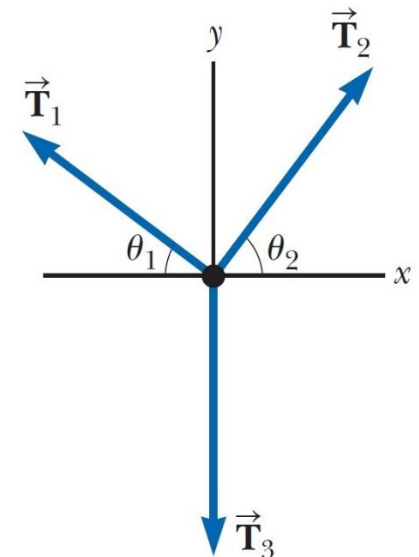
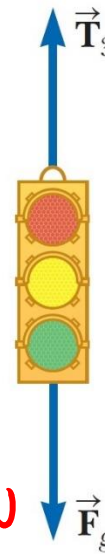
$$T_1 = \frac{3}{4} T_2$$

$$T_1 \cdot \sin(37^\circ) + T_2 \cdot \sin(53^\circ) = 122 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 0.6 \cdot T_2 + T_2 \cdot 0.8 = 122 \Rightarrow T_2 = 97.4 \text{ N}$$

$$\text{και } T_1 = \frac{3}{4} 97.4 = 73.4 \text{ N} . \text{ Άρα } T_1 < T_2 < 100 \text{ N}$$

οπότε δεν σπάει το καλώδιο.



b

c

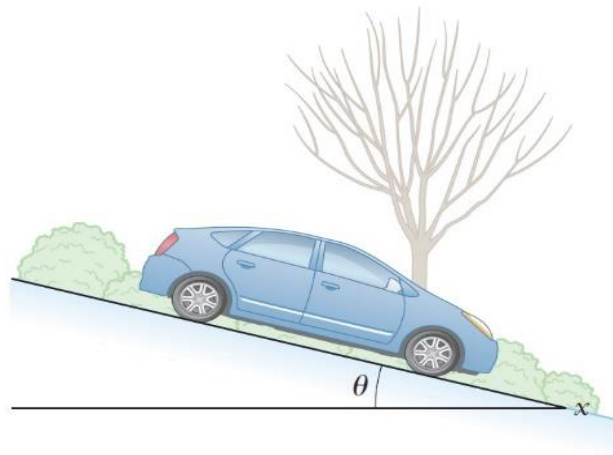
Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Παράδειγμα

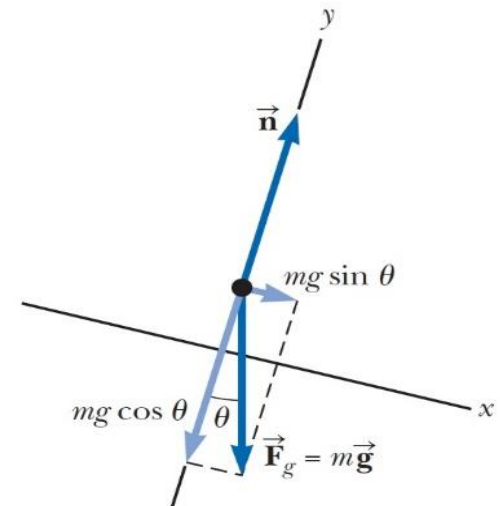
Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

A) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

B) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



a



b

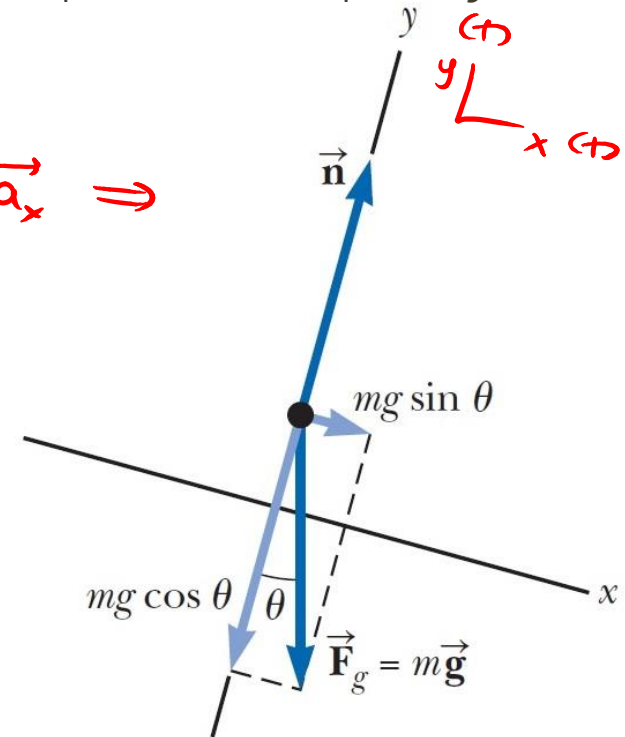
Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Παράδειγμα - Λύση

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

A) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

$$\begin{aligned} \text{Στον } x\text{-άξονα: } \sum \vec{F}_x &= m\vec{a}_x \Leftrightarrow m\vec{g}_x = m\vec{a}_x \Rightarrow \\ \Rightarrow mg \sin \theta &= ma_x \Rightarrow \boxed{a_x = g \sin \theta} \end{aligned}$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

• Παράδειγμα - Λύση

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

B) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;

Στον x -άξονα, ομαλά επιταχυνόμενη :

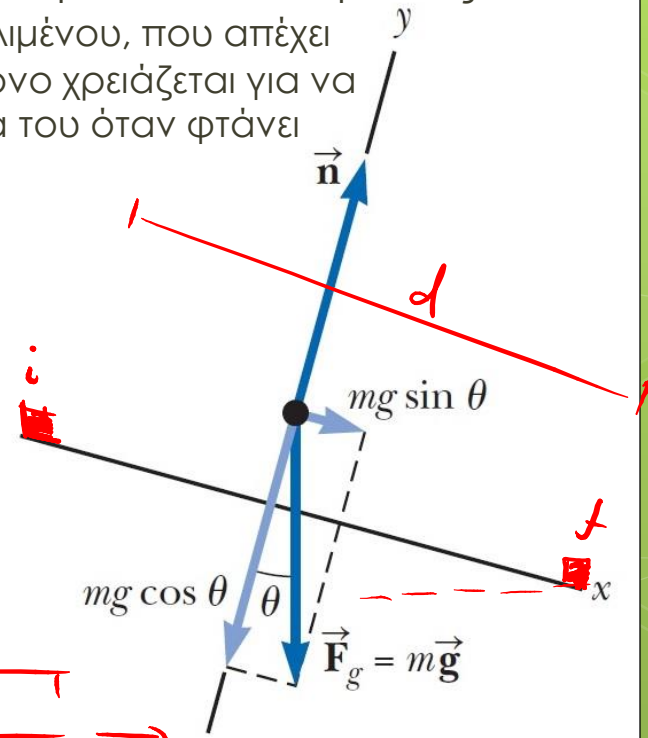
$$x_f = x_i + u_{x_i} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$d = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 \quad (A)$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}}$$

$$\text{Επίσης, } u_f = u_{x_i} + a_x t = a_x \cdot t = g \sin \theta \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{x_f} = \sqrt{2d g \sin \theta}.$$



b

$$g \sin \theta \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}} = \sqrt{g^2 \sin^2 \theta} \cdot \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}} = \sqrt{g^2 \sin^2 \theta} \frac{2d}{g \sin \theta} = \dots$$

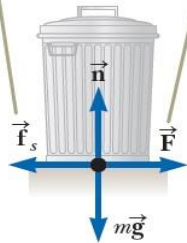
Οι Νόμοι της Κίνησης

ο Δυνάμεις Τριβής

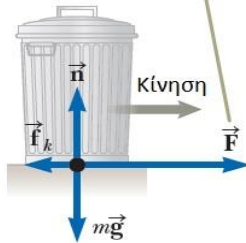
- ο Ως τώρα, τις αγνοήσαμε
- ο Πολύ σημαντικές (είναι ο λόγος που περπατάμε, που τα αυτοκίνητα κινούνται)
- ο **Τριβή είναι η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός σώματος που εφάπτεται σε επιφάνεια**
- ο Πολλά είδη τριβής
 - ο Στατική τριβή, τριβή ολίσθησης, τριβή ρευστών, κ.α.
- ο Στη Κίνηση Σωμάτων, μας ενδιαφέρουν κυρίως οι:
 - ο Στατική τριβή
 - ο Τριβή ολισθήσεως

Οι Νόμοι της Κίνησης

Για μια μικρή δύναμη που εφαρμόζεται στον κάδο, το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής ισούται με το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης.



Όταν το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης υπερβεί το μέτρο της μέγιστης δύναμης της στατικής τριβής, ο κάδος απελευθερώνεται και επιταχύνεται προς τα δεξιά.

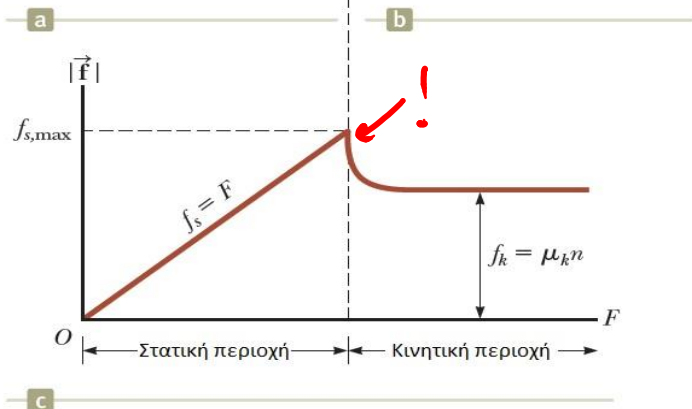


• Στατική Τριβή

- Δύναμη f_s που αντιστέκεται στην κίνηση και στη δύναμη που την προκαλεί

• Τριβή Ολίσθησης

- Δύναμη τριβής f_k για ένα αντικείμενο σε κίνηση



Οι Νόμοι της Κίνησης

• Παρατηρήσεις

- Το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής f_s ανάμεσα σε δυο επιφάνειες σε επαφή μπορεί να πάρει τιμές

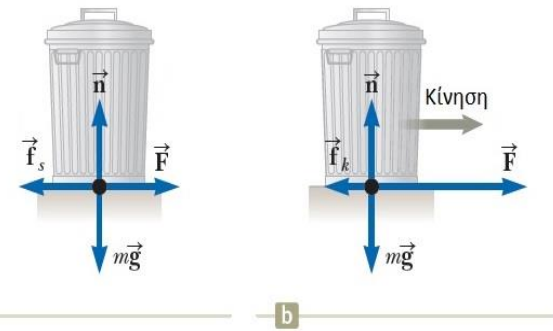
$$f_s \leq \mu_s n$$

όπου η σταθερά μ_s λέγεται **συντελεστής στατικής τριβής**, και n είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται από τη μια επιφάνεια στην άλλη.

- Το μέτρο της δύναμης της τριβής ολίσθησης ανάμεσα σε δυο επιφάνειες ισούται με

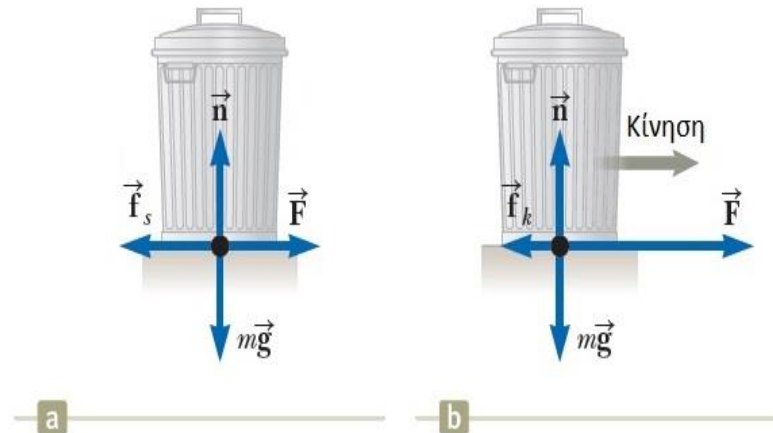
$$f_k = \mu_k n$$

όπου η σταθερά μ_k λέγεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**. Θα τη θεωρούμε σταθερή.



Οι Νόμοι της Κίνησης

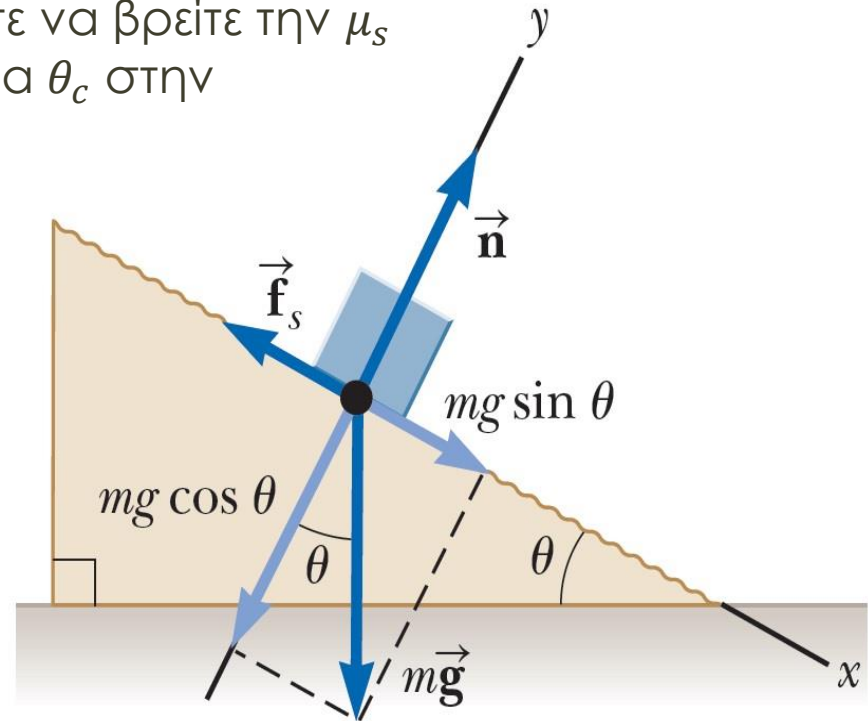
- Οι τιμές των συντελεστών εξαρτώνται από το είδος της επιφάνειας.
- Η **διεύθυνση** της δύναμης τριβής είναι πάντα **παράλληλη με την επιφάνεια** στην οποία εφάπτεται το σώμα, και η **φορά** της πάντα **αντίθετη** στην κίνηση σε σχέση με την επιφάνεια.



Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Παράδειγμα

- ◉ Θεωρούμε ακίνητο σώμα τοποθετημένο σε επιφάνεια με τριβές υπό γωνία θ . Αυξάνουμε τη γωνία θ μέχρι το σώμα να ολισθήσει. Δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε την μ_s μετρώντας την κρίσιμη γωνία θ_c στην οποία το σώμα μόλις αρχίζει να ολισθαίνει.



Οι Νόμοι της Κίνησης

ο Παράδειγμα – Λύση

Το σώμα ισορροπεί :

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow f_s = mg \sin \theta \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow n = mg \cos \theta \quad (2)$$

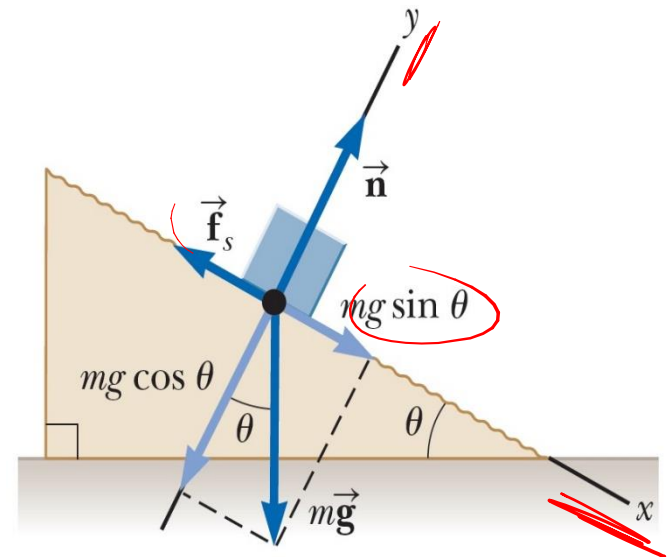
$$\text{Ξέρουμε ότι } f_s \leq f_s \cdot n \Rightarrow f_s = f_s \cdot n \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow mg \sin \theta = f_s mg \cos \theta \Rightarrow \sin \theta = f_s \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow f_s = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \Rightarrow \boxed{f_s = \tan \theta}$$

Όταν $\theta > \theta_c$, τότε το σώμα ολισθαίνει στο κεκλιμένο

και τότε $f_s \rightarrow f_k$.



Οι Νόμοι της Κίνησης

$$\underline{|\vec{a}_1|}, \underline{|\vec{a}_2|} = |\vec{a}|$$

◉ Παράδειγμα

- Σώμα μάζας m_2 σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές συνδέεται με μια μπάλα μάζας m_1 μέσω αβαρούς/ανελαστικού σχοινιού και αβαρούς, λείου τροχού, όπως στο Σχήμα. Μια δύναμη F ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο επάνω στο σώμα και αυτό ολισθαίνει προς τα δεξιά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μ_k . Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δυο αντικειμένων.

$$\underline{m_2}: \Sigma \vec{F}_x = m_2 \vec{a} \Rightarrow F_x - T - f_k = m_2 a \Rightarrow$$

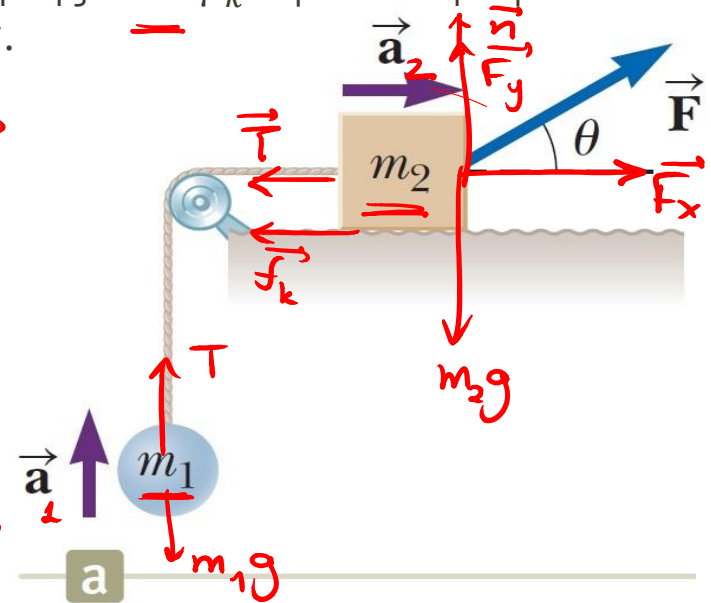
$$\Rightarrow F \cos \vartheta - T - f_k = m_2 a \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} + \vec{F}_y + m_2 \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n + F \sin \vartheta = m_2 g \quad (2)$$

$$\underline{m_1}: \Sigma \vec{F}_y = m_1 \vec{a} \Rightarrow T - m_1 g = m_1 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = m_1 a + m_1 g \quad (3)$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Παράδειγμα - Λύση

- ◉ Σώμα μάζας m_2 σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές συνδέεται με μια μπάλα μάζας m_1 . Δύναμη F ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο επάνω στο σώμα και αυτό ολισθαίνει προς τα δεξιά. Συντελεστής τριβής ολίσθησης μ_k . Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δυο αντικειμένων.

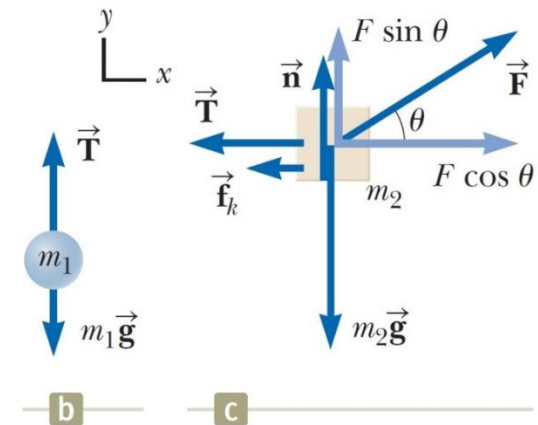
$$\textcircled{1} \textcircled{3} \left. \begin{aligned} F \cos \theta - m_1 a - m_1 g - f_k &= m_2 a \\ f_k &= \mu_k \cdot n \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cos \theta - m_1 a - m_1 g - \mu_k \cdot n = m_2 a \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$\textcircled{2} \quad n = m_2 g - F \sin \theta$$

$$\Rightarrow F \cos \theta - m_1 g - \mu_k m_2 g + \mu_k F \sin \theta = (m_1 + m_2) a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = (F \cos \theta - m_1 g - \mu_k m_2 g + \mu_k F \sin \theta) / (m_1 + m_2).$$





Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος

- Με όσα έχουμε δει ως τώρα
 - Θέση
 - Ταχύτητα
 - Επιτάχυνση
 - Δύναμη
- και με αρχές όπως ο 2^{ος} νόμος του Newton, μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα...
- Στην πράξη, πολλές φορές αντιμετωπίζουμε δυσκολίες...
- Χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση...

Ενέργεια Συστήματος

- Οι έννοιες που θα συζητήσουμε ίσως σας ξενίσουν...
- Κάποιες άλλες ίσως σας φανούν οικείες, αλλά στη Φυσική απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια...
- Ας ξεκινήσουμε με την έννοια της **ενέργειας**.
 - Ιδέες που έχουμε από την καθημερινότητά μας για την ενέργεια
 - Βενζίνη + πετρέλαιο για μεταφορές και θέρμανση
 - Ηλεκτρισμός για φωτισμό και συσκευές
 - Φαγητό για κατανάλωση

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
 - Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

Kinetic energy K



Kinetic energy is the energy of motion. All moving objects have kinetic energy. The more massive an object or the faster it moves, the larger its kinetic energy.

Potential energy U



Potential energy is stored energy associated with an object's position. The roller coaster's gravitational potential energy depends on its height above the ground.

Thermal energy E_{th}



Thermal energy is the sum of the microscopic kinetic and potential energies of all the atoms and bonds that make up the object. An object has more thermal energy when hot than when cold.

Ενέργεια Συστήματος

- Τα παραπάνω δεν αποτελούν ακριβή ορισμό της ενέργειας.
 - Γενικότερα, είναι δύσκολο να οριστεί με ακρίβεια
 - Είναι περισσότερο... «αφηρημένη» έννοια
- Ξεκινάμε τη συζήτηση θεωρώντας ένα νέο μοντέλο, το **σύστημα**
 - Αργότερα, θα μιλήσουμε για μοντέλα ανάλυσης ενός συστήματος
- Προς το παρόν, ας δούμε τι είναι ένα σύστημα και πώς σχετίζεται με την ενέργεια

Ενέργεια Συστήματος

- Όταν συζητάμε για ένα σύστημα, αγνοούμε τι συμβαίνει εκτός συστήματος
- Πρώτο βήμα είναι η **αναγνώριση** του συστήματος
- Συστήματα μπορεί να είναι:
 - Ένα απλό σώμα ή αντικείμενο
 - Πολλά σώματα ή αντικείμενα
 - Μια περιοχή του χώρου
 - Κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος

Ενέργεια Συστήματος

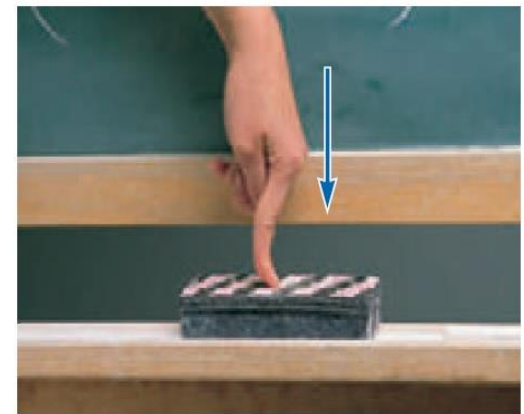
- Ένα σύστημα μπορεί να επηρεαστεί από το περιβάλλον του, με πολλούς τρόπους
- Ο πρώτος που θα δούμε είναι το **έργο (work)**
- Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα



a

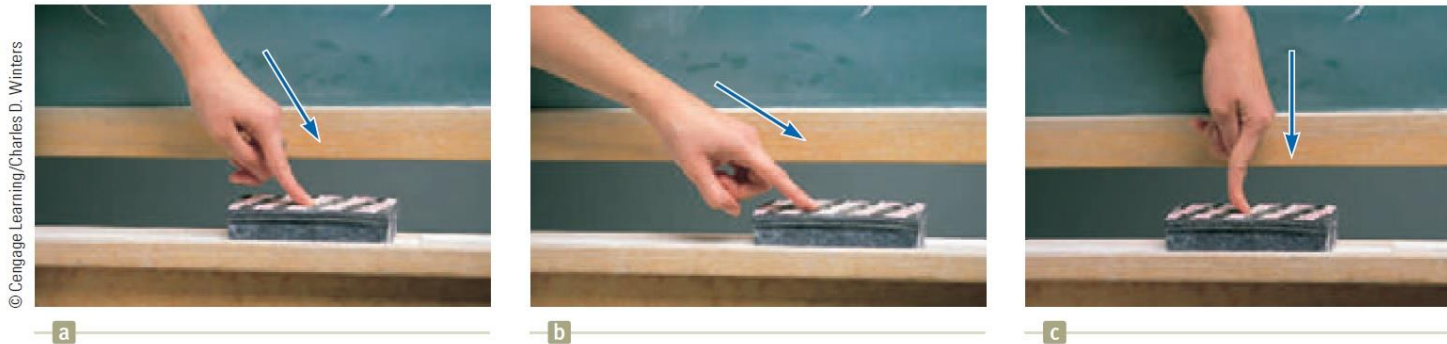


b



c

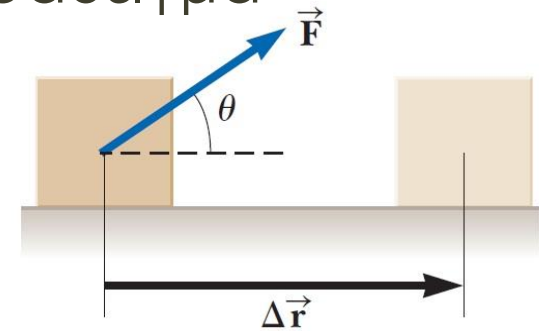
Ενέργεια Συστήματος



- Αναγνωρίζουμε το σύστημα = σπόγγος
- Ερώτημα: **πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με τη δύναμη που βάζουμε (όμοια σε όλες τις περιπτώσεις) στο να κινήσουμε το σπόγγο;**
- Σε ποια περίπτωση τα καταφέρνουμε καλύτερα;

Ενέργεια Συστήματος

- Ας θεωρήσουμε ένα απλό παράδειγμα
 - Ένα σώμα (σύστημα) που μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια σταθερή δύναμη που του ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο
- Το **έργο W** που παράγεται στο σύστημα από τη δύναμη που ασκείται στο σύστημα ορίζεται ως
 - το γινόμενο του μέτρου της σταθερής **δύναμης F** , του μέτρου της **μετατόπισης Δr** του σημείου εφαρμογής της δύναμης, και του **συνημιτόνου** της **γωνίας θ** ανάμεσα στα δυο προηγούμενα:



$$W \equiv F \Delta r \cos(\theta)$$

Ενέργεια Συστήματος

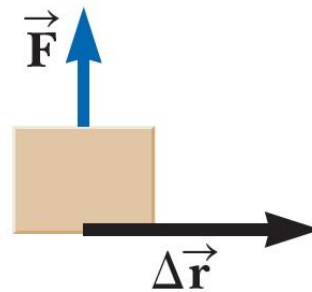
- Διακρίνετε τη διαφορά με την «κοινή» αίσθησή σας για το έργο;
 - Κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων για 2'
 - Στο τέλος, θα έχετε κουραστεί και θα θεωρείτε ότι «παράξατε αρκετό έργο» επάνω στην μπάλα
 - Η αλήθεια είναι ότι ο ορισμός που μόλις είδαμε θα σας πει ότι $W = 0$!
 - Γιατί απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε
- Επίσης, δείτε ξανά την (c) εικόνα με το σπόγγο.

Ενέργεια Συστήματος

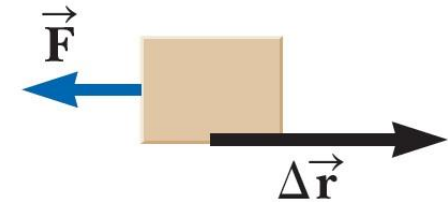
- Quiz: Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις σε αύξουσα τιμή έργου

c
a
d
b

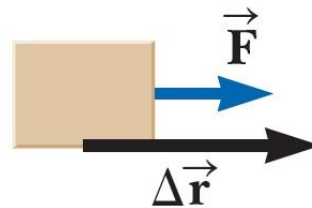
↑ w



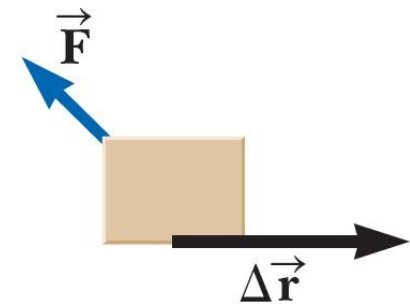
a



b



c



d

Ενέργεια Συστήματος

- Μονάδα μέτρησης έργου

$$N \cdot m = J \text{ (Joule)}$$

- Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

έργο == μεταφορά ενέργειας

- Αν W είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε
 - **Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας προς το σύστημα
 - **Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας από το σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

- Η μαθηματική έκφραση

$$W \equiv F \Delta r \cos(\theta)$$

μοιάζει περιέργη...

- Προκύπτει από το μαθηματικό εργαλείο που λέγεται **εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων**
- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ισούται με

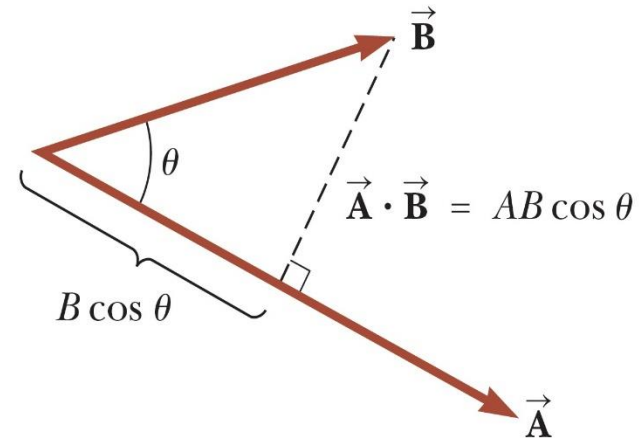
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\theta)$$

- Άρα το έργο W μπορεί να γραφεί ως $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$!

Ενέργεια Συστήματος

- Ας πούμε λίγα για το εσωτερικό γινόμενο

- Προσέξτε ότι $B \cos(\theta)$ είναι το μέτρο της προβολής του $\vec{B}$ στο $\vec{A}$!



- Άρα το εσωτερικό γινόμενο ισούται με το μέτρο του $\vec{A}$ επί την προβολή του $\vec{B}$ στο $\vec{A}$!

Ενέργεια Συστήματος

- Αντιμεταθετικότητα

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

- Επιμεριστικότητα

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

- Ειδικές περιπτώσεις

- $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

- $\vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$

- $\vec{A} \uparrow\downarrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}||\vec{B}|$

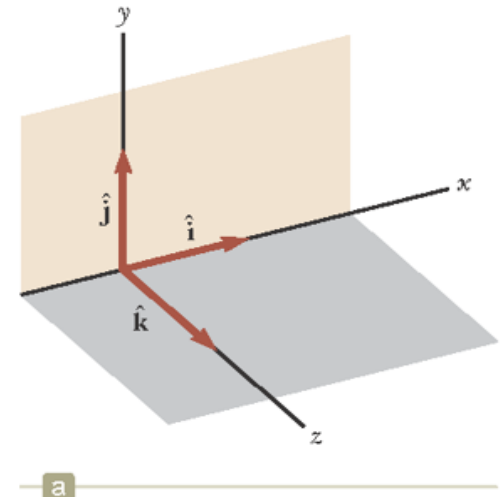
Ενέργεια Συστήματος

- Μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$
 - Ορίζουν ένα 3Δ σύστημα συντεταγμένων
- Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0\end{aligned}$$

- Για $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$, $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$,
έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



Ενέργεια Συστήματος

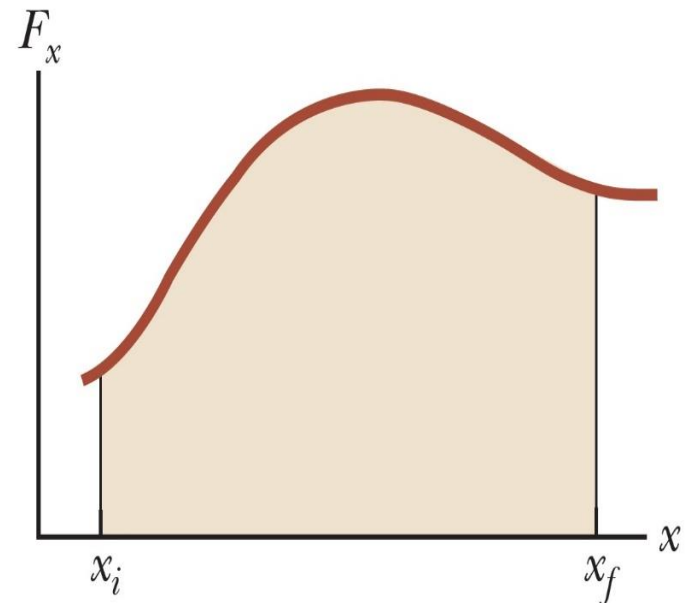
◉ Παράδειγμα

- ◉ Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{r} = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$ m λόγω μιας σταθερής δύναμης $\vec{F} = 5.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$ N που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο.

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (5.0\vec{i} + 2.0\vec{j}) \cdot (2.0\vec{i} + 3.0\vec{j}) \\ &= 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16 \text{ J} \end{aligned}$$

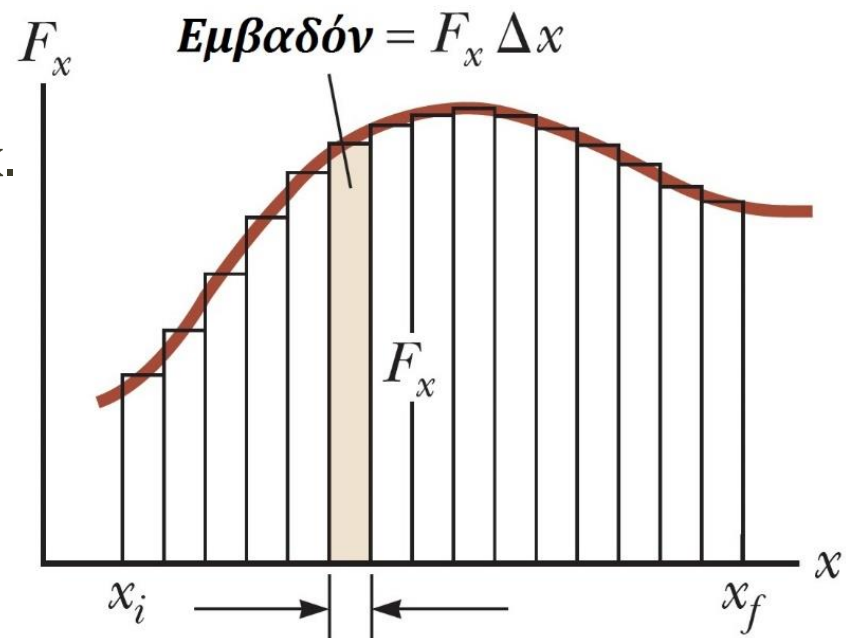
Ενέργεια Συστήματος

- Συζητάμε τόση ώρα για έργο υπό σταθερή δύναμη
 - Τι γίνεται όταν η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη αλλά η κίνηση εξακολουθεί να είναι ευθύγραμμη;
 - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που είδαμε!
- Παράδειγμα:
 - Η x -συνιστώσα της δύναμης μεταβάλλεται κατά την κίνηση



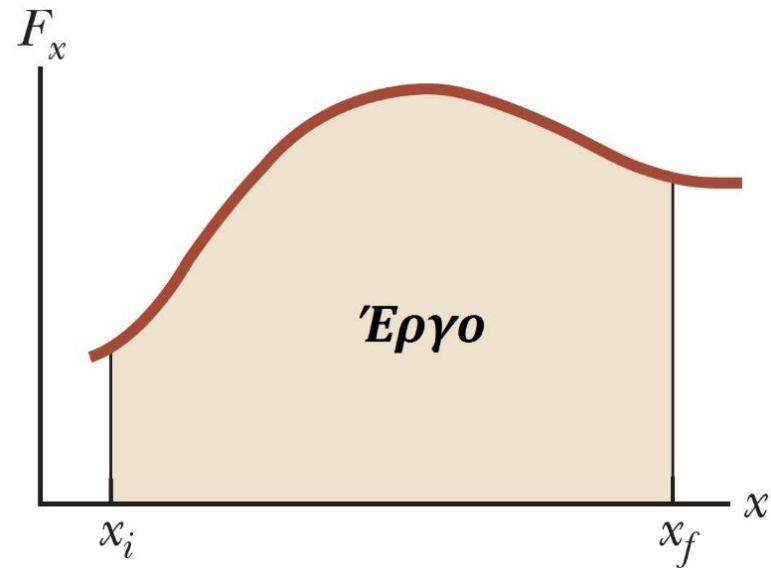
Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για απειροστά μικρά διαστήματα Δx) σταθερή!
- Παράδειγμα:
 - Χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα Δx .
 - Σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε έργο W_j , που ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παραλληλογράμμου.



Ενέργεια Συστήματος

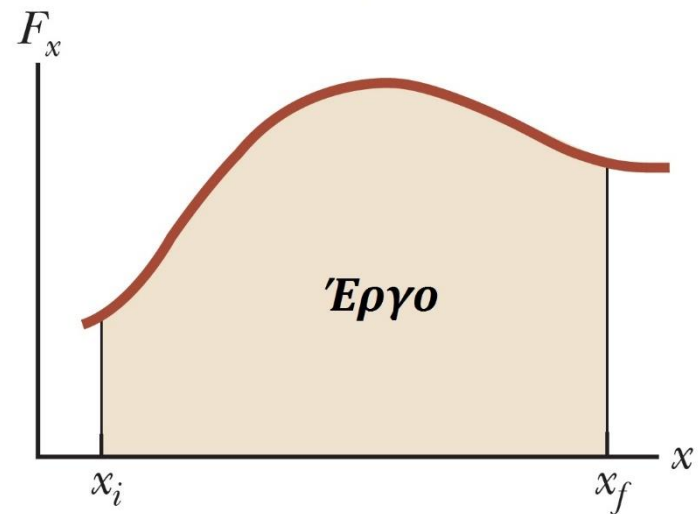
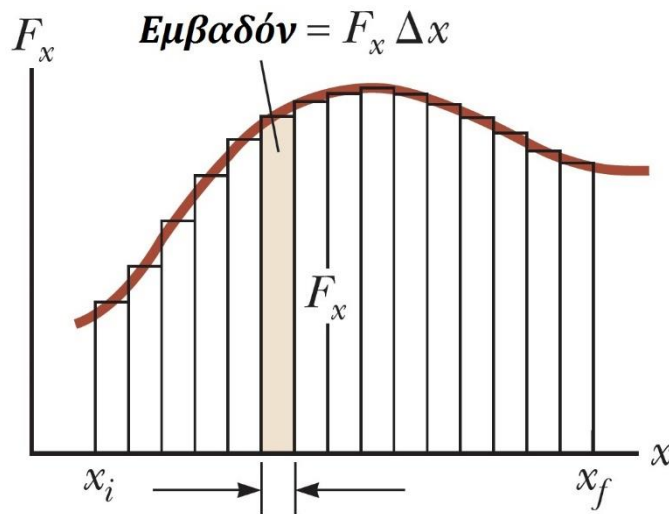
- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για απειροστά μικρά διαστήματα Δx) σταθερή!
- Παράδειγμα:
 - Το συνολικό έργο είναι $\sum_j W_j$
 - Όταν τα διαστήματα γίνονται απειροστά μικρά ($\Delta x \rightarrow 0$), τότε το συνολικό έργο ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη!



Ενέργεια Συστήματος

- Με μαθηματικά,

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

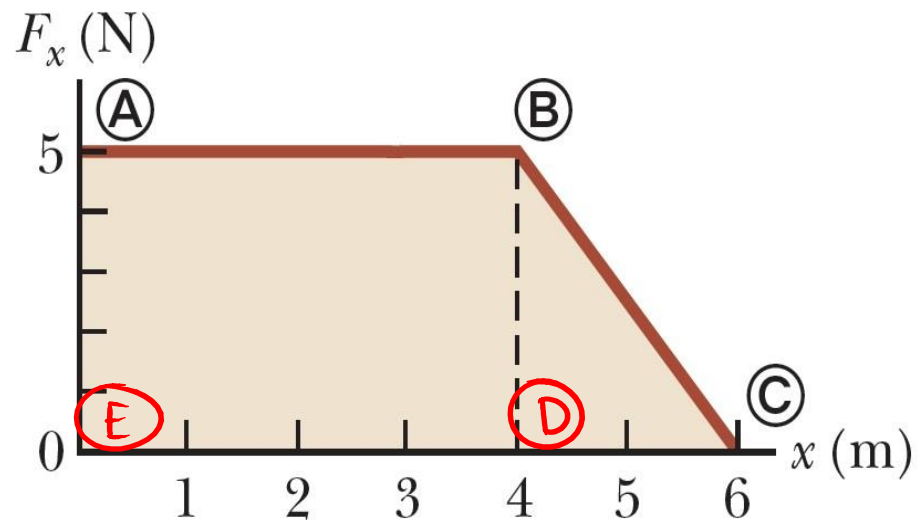


Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα

- ◉ Μια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση, όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό κινείται από $x=0$ ως $x=6$ cm.

$$\begin{aligned} W &= E_{ABDE} + E_{BDC} \\ &= 4 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 5}{2} \\ &= 20 + 5 \\ &= 25 \text{ J} \end{aligned}$$



Ενέργεια Συστήματος

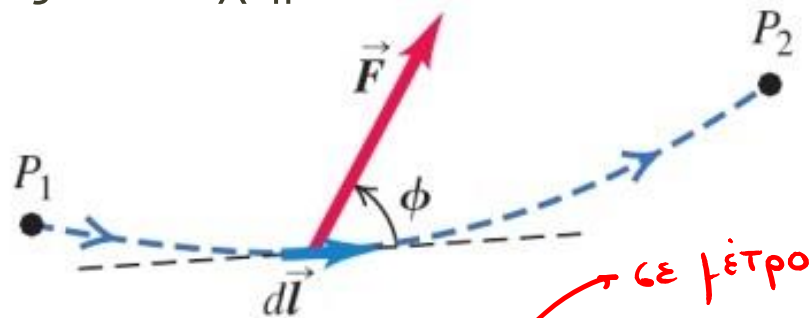
- Για τη γενική περίπτωση όπου η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μεταβλητή σε μέτρο ή/και κατεύθυνση, και η μετατόπιση δεν ακολουθεί ευθεία γραμμή, χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$W_{ολ} = \sum dW = \int \left(\sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r}$$

Με άλλα λόγια, θροίβαμε όλα τα έργα που παράγονται κατά ανεροστά μικρά μετατοπίσεις $d\vec{r}$.

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα σωματίδιο που κινείται σε μη ευθύγραμμο μονοπάτι, όπως στο Σχήμα.



- Έστω ότι η δύναμη είναι σταθερή. Ορίζουμε μια απειροστά μικρή μετατόπιση $d\vec{l}$. Εφαρμόζουμε τον τύπο που είδαμε πριν:

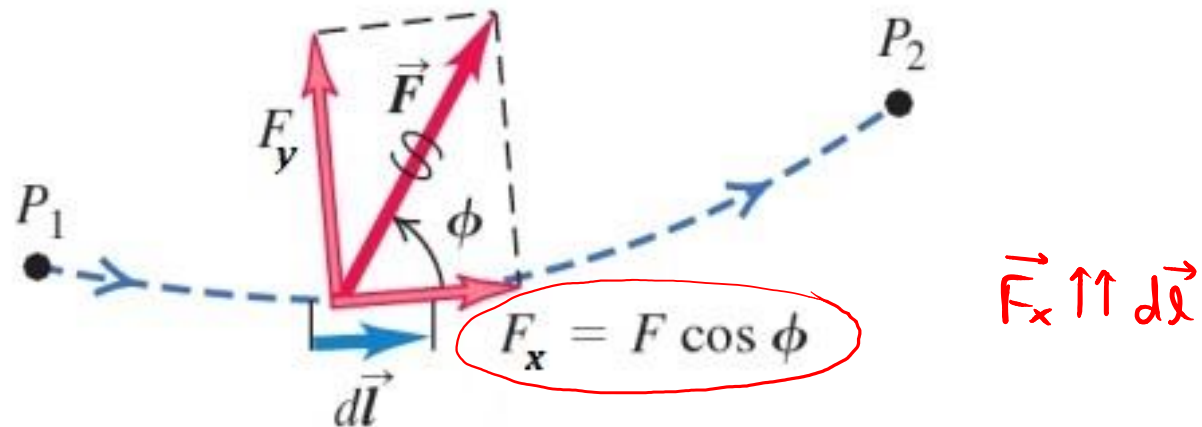
$$W_{ολ} = \sum dW = \int \left(\sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

A red arrow points to the $\vec{F}$ term in the equation with the text " $\vec{F}$ (μόνο για υπάρχει)".

- Ας δούμε πως εφαρμόζεται η παραπάνω σχέση.

Ενέργεια Συστήματος

- Αναλύουμε σε συνιστώσες τη δύναμη $\vec{F}$



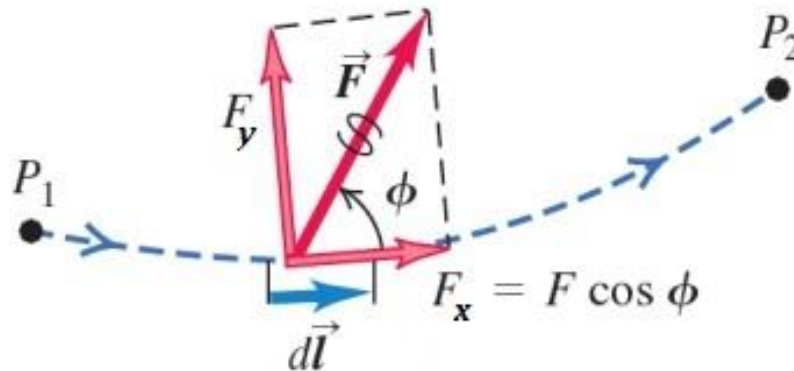
- Μόνο η συνιστώσα παράλληλη με τη μετατόπιση $d\vec{l}$ συνεισφέρει στο έργο της $\vec{F}$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \overbrace{F \cos \phi}^{F_x} dl$$

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} F \cos \varphi dl$$

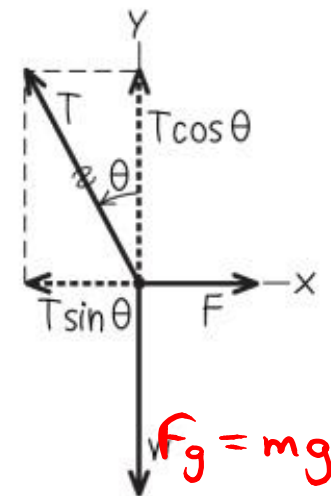
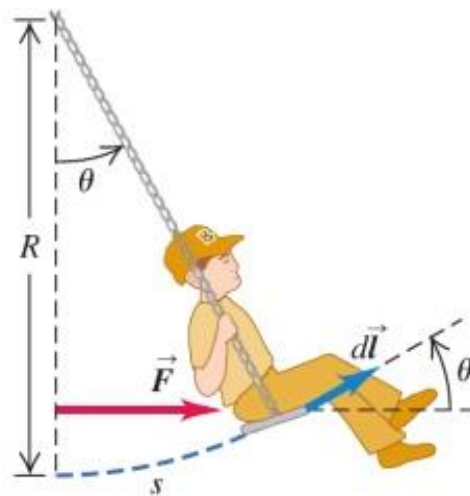


- Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, πρέπει να γνωρίζουμε μια λεπτομερή περιγραφή της διαδρομής P_1 - P_2 ή/και τον τρόπο με τον οποίο η F μεταβάλλεται (αν συμβαίνει αυτό)
- Συχνά εκφράζουμε τη μετατόπιση dl συναρτήσει άλλων ποσοτήτων, πιο εύκολα υπολογίσιμων

Ενέργεια Συστήματος

ο Παράδειγμα (μεταβαλλόμενη δύναμη και διαδρομή):

Ένα αγόρι μάζας m χρησιμοποιεί κούνια μήκους R , και φτάνει σε ανώτατη γωνία θ_c όταν υποστεί **μεταβαλλόμενη** δύναμη F , η οποία είναι αρχικά μηδενική. Θεωρήστε ότι η κίνηση γίνεται πολύ αργά ώστε να θεωρείται ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία κάθε στιγμή. Θεωρήστε ότι το σχοινί και η κούνια έχουν αμελητέο βάρος. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη F .



Ενέργεια Συστήματος

Παράδειγμα - Λύση

μάζα m , κούνια μήκους R , ανώτατη γωνία θ_c , δύναμη F , η οποία είναι αρχικά μηδενική. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη F .

μήκος κυκλικού τόξου:

$$s = R \cdot \theta \quad (\theta: \text{rad})$$

(2)

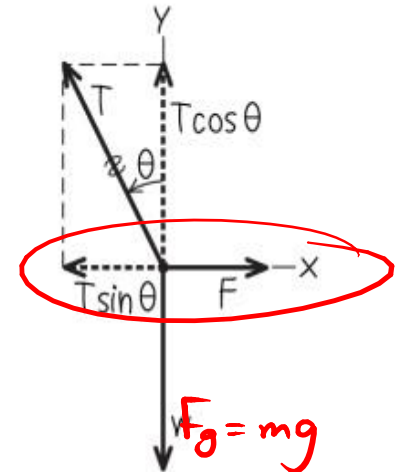
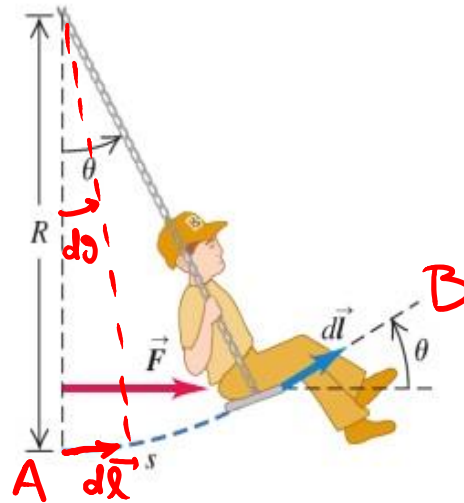
Το σύστημα ισορροπεί σε κάθε σημείο της "ερχιάς" του:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F = T \sin \theta \quad (3)$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_g = T \cos \theta$$

Ξέρουμε ότι

mg



$$W_F = \sum dW_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F \cos \theta dl \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (3) \\ \Rightarrow \end{array} \right.$$

Από (2) $\Rightarrow dl = R \cdot d\theta$

Ενέργεια Συστήματος

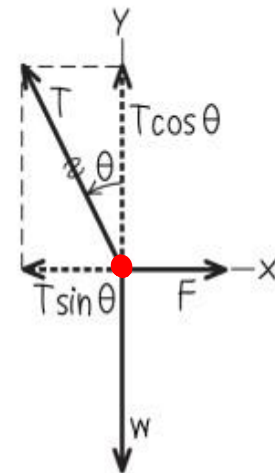
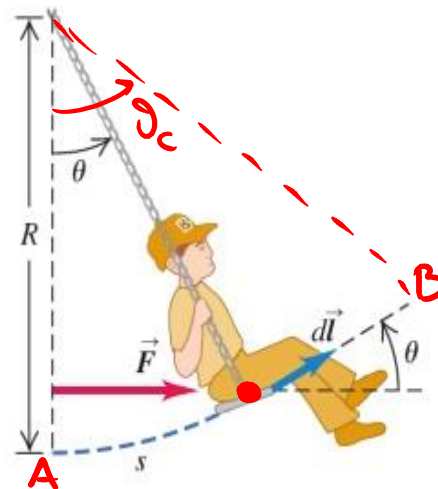
• Παράδειγμα - Λύση

μάζα m , κούνια μήκους R , ανώτατη γωνία θ_c , δύναμη F , η οποία είναι αρχικά μηδενική. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη F .

$$\Rightarrow W_F = \int_A^B F \cos \theta \, dl$$
$$= \int_0^{\theta_c} F \cos \theta \, R \, d\theta.$$

$$W_F \stackrel{(3)}{=} \int_0^{\theta_c} T R \cos \theta \sin \theta \, d\theta$$
$$\stackrel{(3)}{=} \int_0^{\theta_c} R \frac{mg}{\cos \theta} \cos \theta \cdot \sin \theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_c} R mg \sin \theta \, d\theta = R mg \int_0^{\theta_c} \sin \theta \, d\theta = R mg (-\cos \theta)_0^{\theta_c} = R mg (1 - \cos \theta_c)$$



Τριγωνμετρία

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

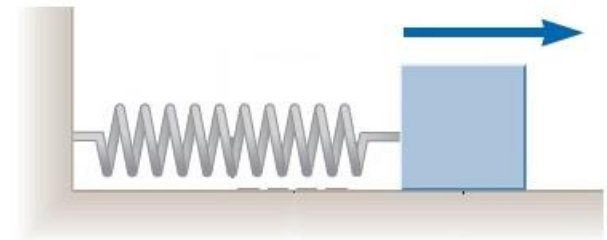
Ενέργεια Συστήματος

- ◉ **Έργο ελατηρίου** (σύστημα = σώμα)
 - ◉ Σύστημα όπου η δύναμη μεταβάλλεται με τη θέση
 - ◉ Μέτρο δύναμης ελατηρίου στο σώμα (Νόμος του Hooke)

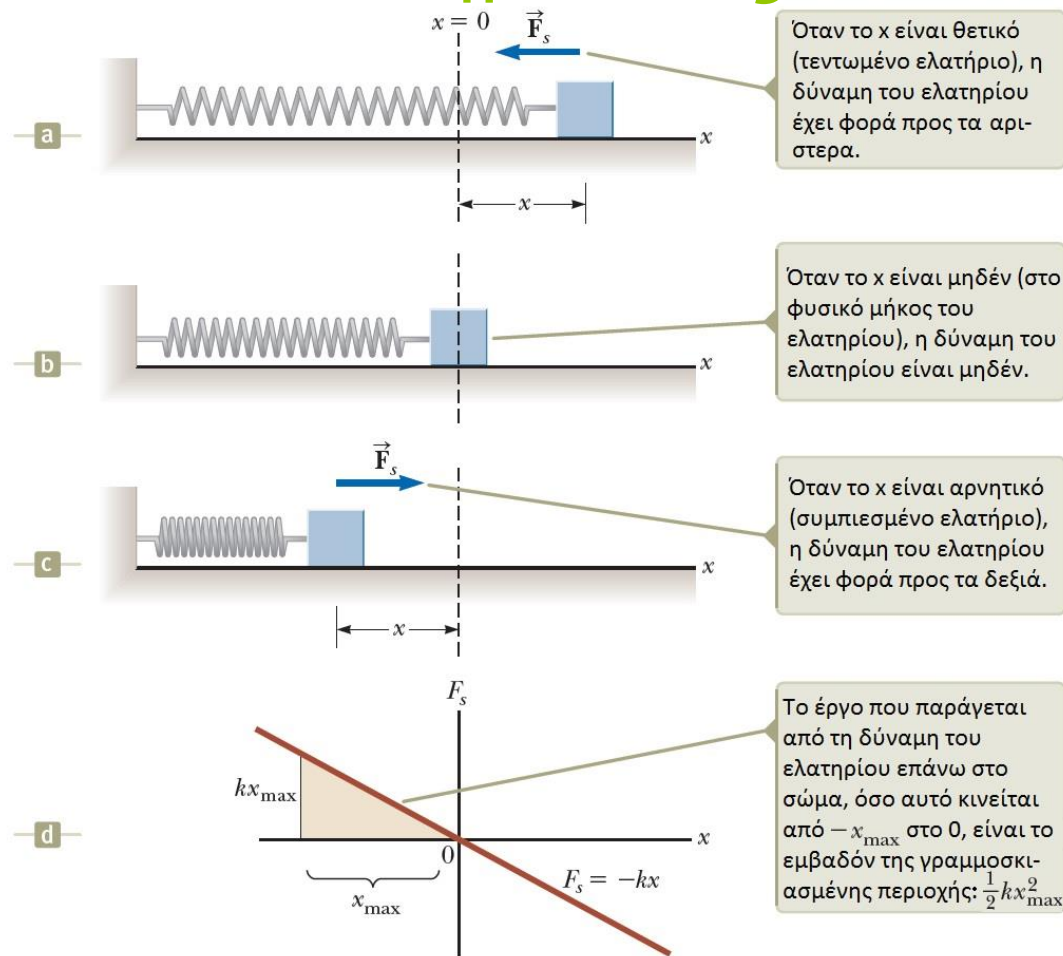
$$F_s = -kx$$

- ◉ Η τιμή του k είναι μια ένδειξη της σκληρότητας του ελατηρίου
 - ◉ Μεγάλο $k \rightarrow$ σκληρό ελατήριο
 - ◉ Μικρό $k \rightarrow$ μαλακό ελατήριο
- ◉ Μονάδες της σταθεράς k είναι N/m
- ◉ Διανυσματική μορφή

$$\vec{F}_s = F_s \vec{l} = -kx \vec{l}$$



Ενέργεια Συστήματος



Ενέργεια Συστήματος

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται στη μέγιστη τιμή (θέση $x_i = -x_{max}$) και αφήνεται ελεύθερο.
- Έστω η τελική θέση $x_f = 0$
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$\begin{aligned} W_s &= \int \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_{-x_{max}}^0 (-kx)dx \\ &= \frac{1}{2} kx_{max}^2 \end{aligned}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του (θέση $x_i = 0$)
- Έστω η τελική θέση $x_f = x_{max}$
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$\begin{aligned} W_s &= \int \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_0^{x_{max}} (-kx)dx \\ &= -\frac{1}{2}kx_{max}^2 \end{aligned}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα το συνολικό έργο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα **για μετατόπιση από $-x_{max}$ ως x_{max}** είναι μηδέν!!
- Για μια οποιαδήποτε μετατόπιση:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω μια εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα

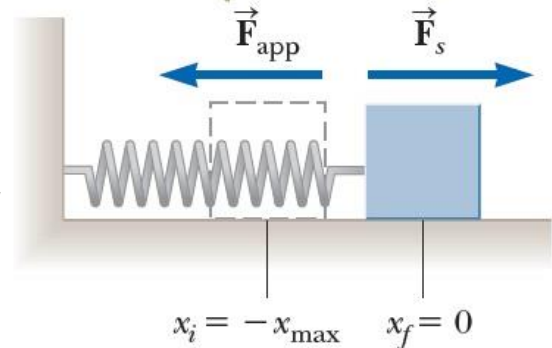
- Κίνηση από το $-x_{max}$ στο 0

- $$W_{ext} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{x_i}^{x_f} (kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i})$$
$$= \int_{-x_{max}}^0 kx dx = -\frac{1}{2} kx_{max}^2$$

- Για οποιαδήποτε μετατόπιση

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

Αν η διαδικασία της κίνησης του σώματος γίνεται ΠΟΛΥ αργά, τότε η $\vec{F}_{app}$ είναι ίση σε μέτρο και αντίθετης φοράς με την $\vec{F}_s$, για κάθε χρονική στιγμή.

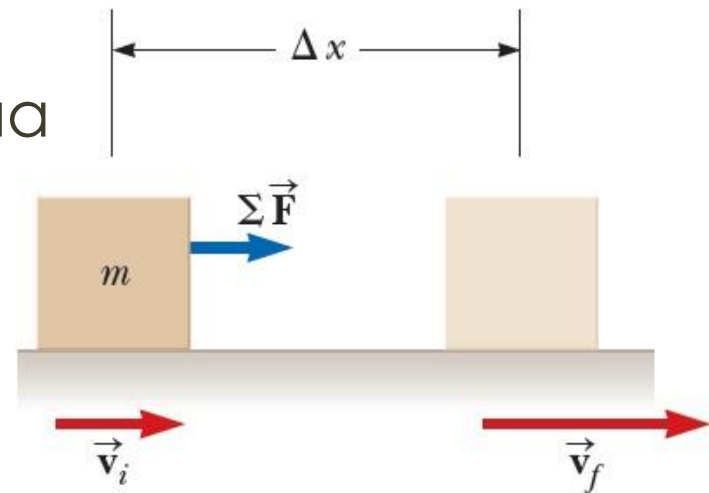


Ενέργεια Συστήματος

- Έργο → Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας
 - Τι γίνεται αυτή η ενέργεια;
 - Πιθανότατα αλλάζει την ταχύτητα ενός σώματος
- 1^{ος} Τύπος Ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα: **Κινητική Ενέργεια**

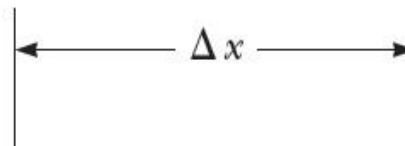
- Έστω το διπλανό παράδειγμα

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$



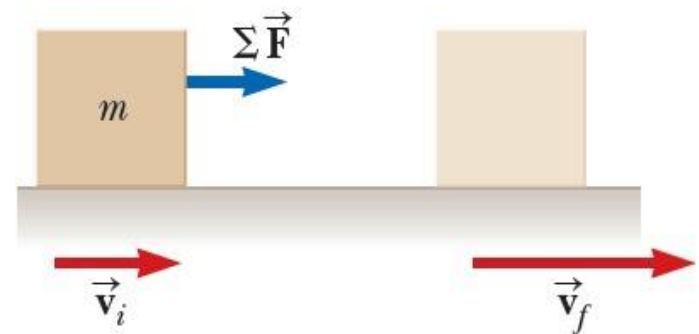
Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε την συνισταμένη των $\vec{F}$ σταθερή
- Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση
- Άρα

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \leftrightarrow a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x}$$


- Από 2^ο νόμο Newton, είναι

$$\Sigma F = ma$$



Ενέργεια Συστήματος

• Άρα

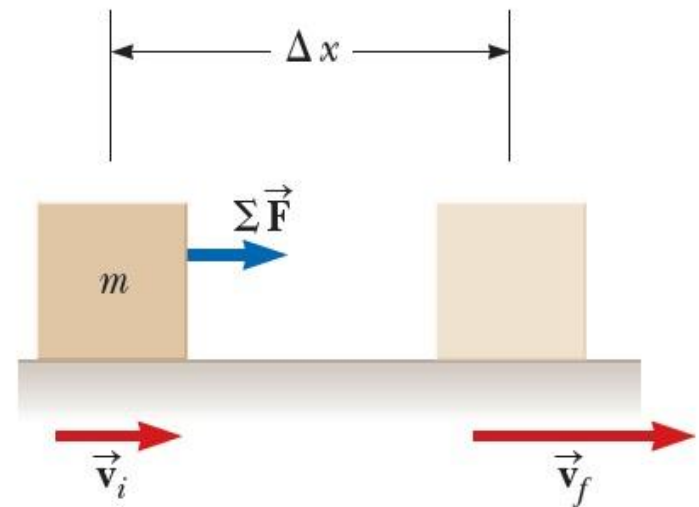
$$\sum F = m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \leftrightarrow \sum F \Delta x = \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2$$

• Το 1^ο μέλος είναι ο ορισμός του έργου σταθερής δύναμης

• Άρα

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2 \\ &= K_f - K_i \end{aligned}$$

όπου K_x η **κινητική ενέργεια**



Ενέργεια Συστήματος

- Η κινητική ενέργεια αναπαριστά την ενέργεια που σχετίζεται με την **κίνηση** ενός σώματος
 - Μονάδα μέτρησης: 1 Joule (J)
- Μια άλλη οπτική:

$$W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K \Leftrightarrow K_f = K_i + W_{ext}$$

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**
 - Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων, και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά την ταχύτητά του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος

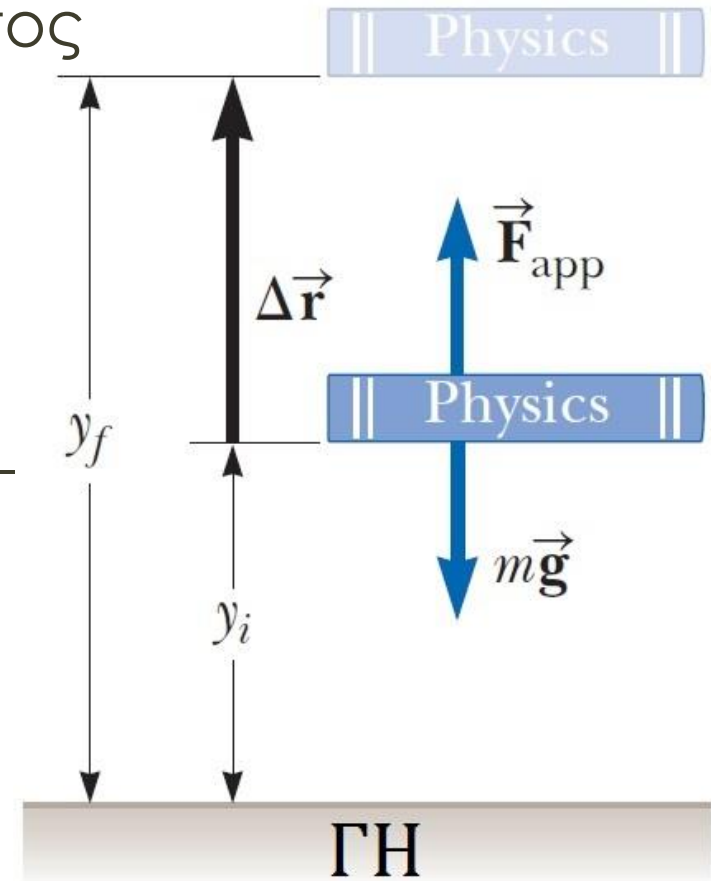
Ενέργεια Συστήματος

- Ως τώρα, είδαμε την επίδραση **εξωτερικών** δυνάμεων σε ένα σύστημα ενός μόνο σώματος
- Ας δούμε συστήματα από δυο ή περισσότερα σωματίδια με δυνάμεις **εσωτερικές** στο σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

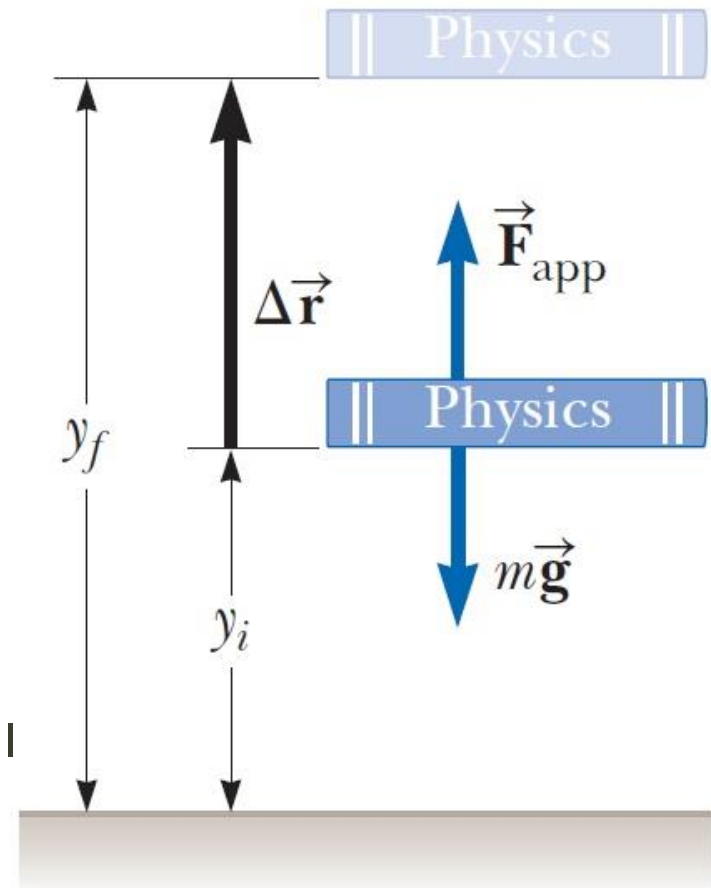
Σύστημα Βιβλίο-Γη

- Αύξηση ενέργειας συστήματος λόγω έργου της $\vec{F}_{app}$
- Καμιά αλλαγή στην κινητική ενέργεια του συστήματος
 - Άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Κινητικής Ενέργειας – Έργου
- Η ενέργεια πρέπει να έχει αποθηκευτεί με άλλη μορφή



Ενέργεια Συστήματος

- Αν αφήσουμε το βιβλίο, θα πέσει στο ύψος y_i
- Τώρα, το βιβλίο (και το σύστημα) έχει κινητική ενέργεια
 - Προέρχεται από το έργο κατά την ανύψωση του νωρίτερα
- Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο βιβλίο πριν αυτό αφεθεί να πέσει λέγεται **δυναμική ενέργεια**

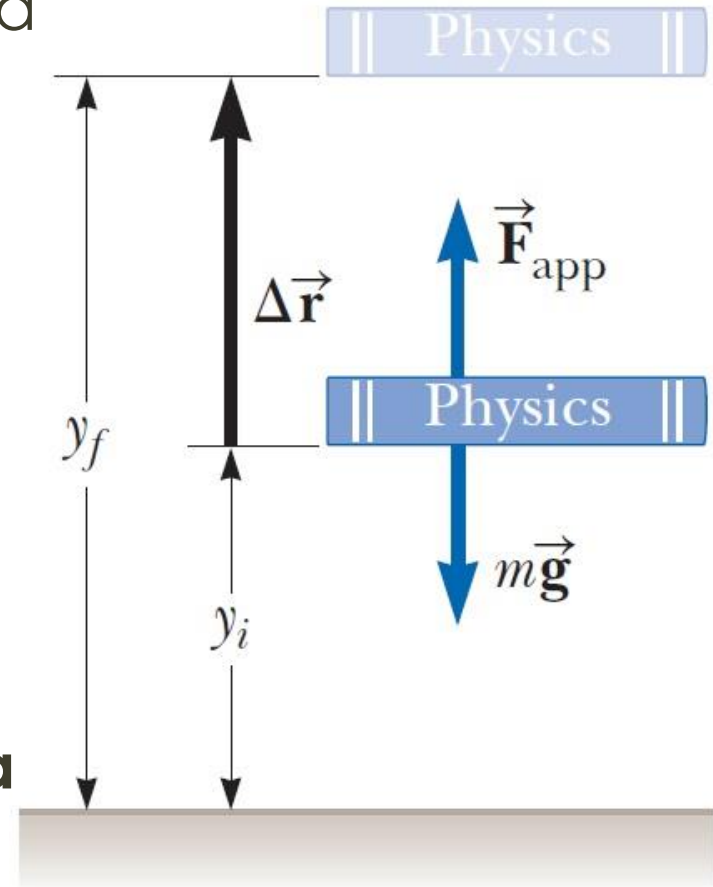


Ενέργεια Συστήματος

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να ανυψώσουμε το βιβλίο με σταθερή (πολύ αργή) ταχύτητα (έτσι ώστε $\vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$\begin{aligned} W_{ext} &= \vec{F}_{app} \cdot \Delta\vec{r} \\ &= mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} \\ &= mgy_f - mgy_i \\ &= \Delta U_g \end{aligned}$$

- Βαρυτική Δυναμική ενέργεια**
$$U_g = mgy$$



Ενέργεια Συστήματος

- **Θυμηθείτε:**

- Είδαμε ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα μπορεί να ισοδυναμεί με μεταβολή της κινητικής του ενέργειας, που μεταφράζεται σε **κίνηση** των μελών του συστήματος.
- Στην προηγούμενη περίπτωση, είδαμε ότι το έργο που παράγεται εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια στο σύστημα, που αναπαριστά αλλαγή στη

διάταξη/ διαμόρφωση/σύνθεση

των μελών του συστήματος.

Ενέργεια Συστήματος

- Σε προβλήματα, πρέπει να επιλέγουμε μια διάταξη των μελών του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική.
- Για παράδειγμα, η επιφάνεια της Γης.
- Μερικές φορές, το πρόβλημα «οδηγεί» στην κατάλληλη επιλογή της διάταξης

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε μια άλλης μορφής δυναμική ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Σύστημα ελατήριο-σώμα (όχι μόνο σώμα!)
- Είδαμε νωρίτερα ότι

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

- Το έργο που παράγεται στο σύστημα εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση
 - Είναι κι αυτό μια **διάταξη** των μελών του συστήματος!

Ενέργεια Συστήματος

• Άρα

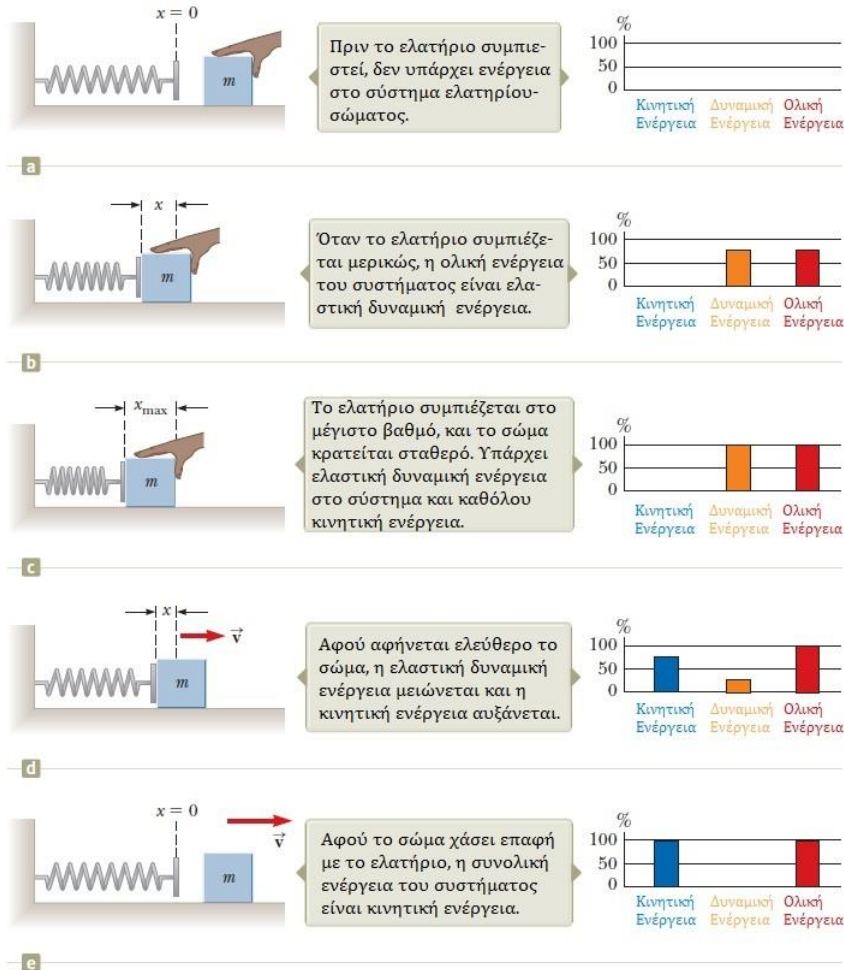
$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_{x_i}^{x_f} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 \\ &= U_s^f - U_s^i \\ &= \Delta U_s \end{aligned}$$

όπου

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$

η **ελαστική δυναμική ενέργεια** που σχετίζεται με το σύστημα σώματος-ελατηρίου

Ενέργεια Συστήματος



Παράγεται έργο από το χέρι επάνω στο σύστημα ελατηρίου-σώματος, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.

Δεν παράγεται κανένα έργο στο σύστημα ελατηρίου-σώματος από εξωτερική δύναμη, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε και μια ακόμη μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα

- Σύστημα = επιφάνεια

- Τριβή ολίσθησης

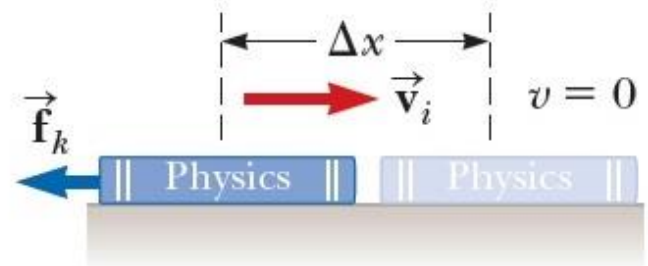
- Παράγει έργο στην επιφάνεια

- Θετικό έργο παράγεται στην επιφάνεια

- Καμιά μεταβολή στην κινητική κατάσταση της!

- Καμιά μεταβολή σε δυναμική ενέργεια

- Πού πήγε η ενέργεια??

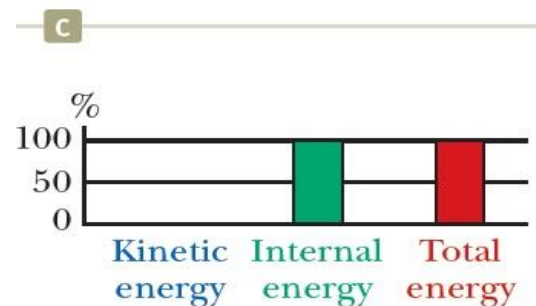
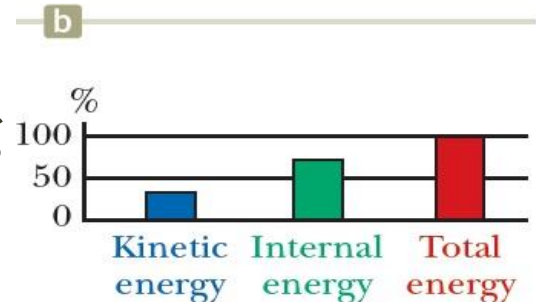
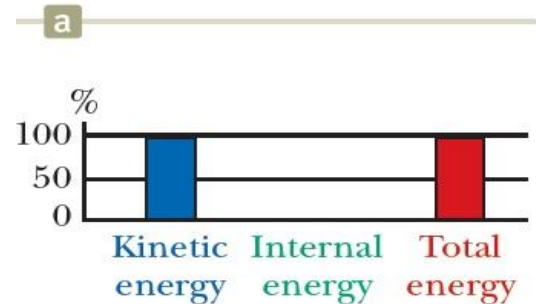
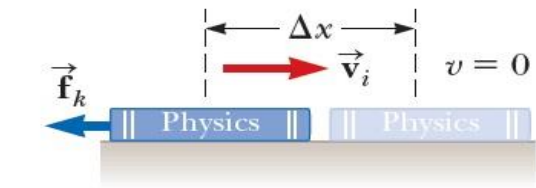


a

Ενέργεια Συστήματος

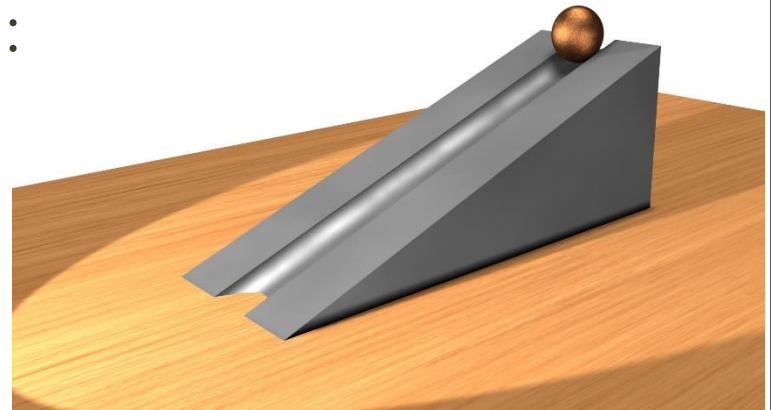
- Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε σε **εσωτερική ή θερμική ενέργεια** του συστήματος
 - Η επιφάνεια θερμάνθηκε!
- Θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως **εσωτερική ή θερμική ενέργεια**, και θα τη συμβολίζουμε με

$$E_{int}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε το διπλανό σχήμα:
Η απόσταση που μια μπάλα ολισθαίνει σε μια επικλινή επιφάνεια με τριβές, έχει μεγάλη σημασία για το πόση δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε εσωτερική
- Μεγαλύτερη απόσταση, μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε εσωτερική (και κινητική ασφαλώς)
- Υπάρχει εξάρτηση από το «μονοπάτι»
- Αντίθετα, το έργο της δύναμης της βαρυτικής έλξης δεν εξαρτάται από το «μονοπάτι» που ακολουθεί το σώμα!



Ενέργεια Συστήματος

- Αυτή η εξάρτηση από τη διαδρομή («μονοπάτι») που ακολουθεί το σώμα ορίζει δυο κατηγορίες δυνάμεων:
 - **Συντηρητικές (conservative)**
 - Ανεξάρτητη από τη διαδρομή, π.χ. βαρυτική έλξη
 - **Μη συντηρητικές (nonconservative)**
 - Εξάρτηση από τη διαδρομή, π.χ. τριβή ολίσθησης
- **Συντηρητικές δυνάμεις - Ιδιότητες:**
 1. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δυο σημεία είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ανάμεσα σε αυτά.
 2. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

Ενέργεια Συστήματος

- Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων

- Δύναμη Βαρυτικής έλξης

- $W_g = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = mgy_i - mgy_f$
- Εξάρτηση μόνο από τα y_i, y_f
- $W_g = 0$, σε κλειστή διαδρομή ($y_i = y_f$)

- Δύναμη ελατηρίου

- $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
- Εξάρτηση μόνο από τα x_i, x_f
- $W_s = 0$, σε κλειστή διαδρομή ($x_i = x_f$)

Ενέργεια Συστήματος

- Το έργο W_{int} που παράγεται από μια **συντηρητική δύναμη σε ένα σώμα που είναι μέλος ενός συστήματος**, όταν αυτό αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη, ισούται με την αρχική τιμή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος μείον την τελική τιμή αυτής:

$$W_{int} = U_i - U_f = -\Delta U$$

- **Προσοχή!** Το έργο αυτό παράγεται από ένα σώμα του συστήματος σε ένα άλλο!

Ενέργεια Συστήματος

- Μια δύναμη λέγεται **μη συντηρητική** αν δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες 1 και 2 που είδαμε πριν
 - Παράδειγμα: τριβή ολίσθησης
- Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα
- Ορίζουμε το άθροισμα της κινητικής K και της δυναμικής ενέργειας U ενός συστήματος ως τη **μηχανική ενέργεια** του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Συσχετίσαμε το έργο μιας **συντηρητικής** δύναμης που δρα **εντός** του συστήματος με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας:

$$W_{int} = U_i - U_f = -\Delta U$$

- Έστω λοιπόν ένα σύστημα από σώματα στο οποίο δρα μια εσωτερική συντηρητική δύναμη
- Έστω ότι αυτή η δύναμη προκαλεί αλλαγή της διάταξης του συστήματος λόγω της κίνησης ενός από τα σώματα επάνω στο x άξονα
- Το έργο της δύναμης αυτής θα είναι

$$W_{int} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Εναλλακτικά,

$$\Delta U = -W_{int} = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

- Άρα η ΔU είναι αρνητική όταν η F_x και η μετατόπιση είναι στην ίδια κατεύθυνση
 - Όταν ένα σώμα χαμηλώνει σε ένα βαρυτικό πεδίο
 - Όταν ένα ελατήριο σπρώχνει ένα σώμα προς τη θέση ισορροπίας του

Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρώντας μια θέση αναφοράς x_i όπου μετράμε όλες τις μεταβολές της δυναμικής ενέργειας ως προς αυτή, ορίζουμε τη **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας**:

$$U_f(x) = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i$$

- Θεωρώντας ότι η μετατόπιση είναι απειροστά μικρή, μπορούμε να πούμε ότι

$$F_x = - \frac{dU}{dx}$$

- Η θέση όπου $F_x = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας**

Ενέργεια Συστήματος

- **Σταθερή ισορροπία (stable equilibrium)**

- Ένα σύστημα λέγεται σταθερής ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια μια δύναμη που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του
 - Παραδείγματα:
 - Σύστημα σώματος-ελατηρίου
 - Σύστημα μπίλιας-κυρτού μπάλ

- **Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)**

- Ένα σύστημα λέγεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια μια δύναμη που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του
 - Παραδείγματα:
 - Σύστημα μολυβιού που ισορροπεί στη μύτη μιας επιφάνειας

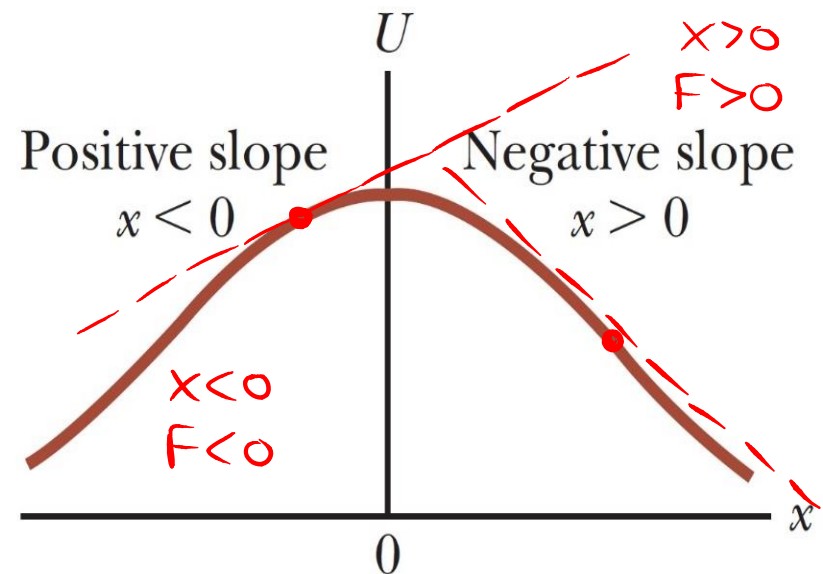
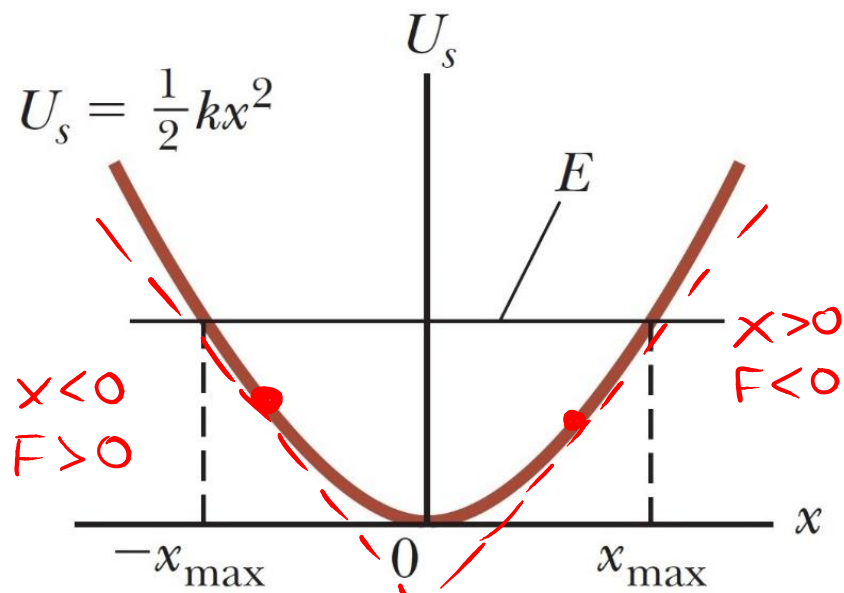
- **Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)**

Ενέργεια Συστήματος

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Η κλίση της συνάρτησης $U(x)$ μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός συστήματος

- Παραδείγματα:



Τι πρέπει να θυμόμαστε;...

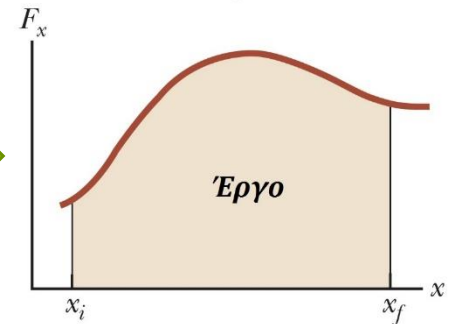
- Το **έργο W** που παράγεται σε σύστημα από δύναμη που ασκείται σε αυτό ορίζεται ως

$$W \equiv F \Delta r \cos(\theta) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

- Έργο δύναμης μεταβ/νου μέτρου σε ευθεία γραμμή

- Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης:

$$W_{o\lambda} = \sum W = \int \left(\sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r}$$



- Έργο δύναμης ελατηρίου:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

- Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**

- Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά την ταχύτητά του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος:

$$K_f = K_i + W_{ext}$$

Τι πρέπει να θυμόμαστε;...

- Βαρυτική Δυναμική ενέργεια

$$U_g = mgy$$

- Ελαστική Δυναμική ενέργεια

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

- Εσωτερική ή θερμική ενέργεια

$$E_{int}$$

- Συντηρητικές δυνάμεις:

1. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.
2. Το έργο που παράγεται σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

- Το έργο W_{int} που παράγεται από μια **συντηρητική δύναμη** σε ένα σώμα που είναι μέλος ενός συστήματος:

$$W_{int} = U_i - U_f = -\Delta U$$

Τι πρέπει να θυμόμαστε;...

- Άθροισμα της κινητικής K και της δυναμικής ενέργειας U ενός συστήματος = **μηχανική ενέργεια** του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U$$

- **Συνάρτηση δυναμικής ενέργειας:**

$$U_f(x) = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i, \quad F_x = - \frac{dU}{dx}$$

- **Σταθερή ισορροπία (stable equilibrium)**

- Οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια μια δύναμη που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του

- **Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)**

- Οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια μια δύναμη που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του

- **Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)**



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίσαμε τρεις μεθόδους αποθήκευσης ενέργειας σε ένα σύστημα
 - **Κινητική ενέργεια**
 - Σχετίζεται με την κίνηση των μελών του συστήματος
 - **Δυναμική ενέργεια**
 - Σχετίζεται με τη διάταξη του συστήματος
 - **Εσωτερική ενέργεια**
 - Σχετίζεται με τη θερμοκρασία του συστήματος

Διατήρηση της Ενέργειας

- Θα αναλύσουμε προβλήματα με χρήση της έννοιας της ενέργειας για δυο διαφορετικά είδη συστημάτων
 - **Απομονωμένα (κλειστά) – isolated**
 - Δε μεταφέρεται ενέργεια από/προς το σύστημα
 - Σταθερή συνολική ενέργεια
 - **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας - ΑΔΜΕ**
 - ...αν δρουν ΜΟΝΟ συντηρητικές δυνάμεις στο σύστημα
 - **Μη απομονωμένα – non-isolated**
 - Ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί έξω από το σύστημα
 - Αλλαγή στη συνολική ενέργεια του συστήματος
 - **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας - ΑΔΕ**

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Μη απομονωμένα συστήματα**

- Σύστημα βρίσκεται σε «επικοινωνία» με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
- Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου
 - Εξωτερική δύναμη αλλάζει μέσω έργου την κινητική ενέργεια ενός σώματος
- Προς το παρόν, έχουμε δει μόνο το έργο ως μέσο μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα
- Φυσικά, υπάρχουν κι άλλοι τρόποι...

Διατήρηση της Ενέργειας

Ενέργεια μεταφέρεται
στο σώμα μέσω
έργου.

© Cengage Learning/George Sample



a

Ενέργεια μεταφέρεται
εκτός του ραδιοφώνου
από το μεγάφωνο ως
μηχανικά κύματα.

© Cengage Learning/George Sample



b

Ενέργεια μεταφέρεται
στη λαβή του
κουταλιού μέσω
θερμότητας.

© Cengage Learning/George Sample



c

Ενέργεια εισάγεται
στο ρεζερβουάρ του
αυτοκινήτου μέσω
μεταφοράς ύλης.

Cocoon/Photodisc/Getty Images



d

Ενέργεια εισάγεται
στο σεσουάρ μέσω
ηλεκτρισμού.

© Cengage Learning/George Sample



e

Ενέργεια εξάγεται από
τη λάμπα με τη μορφή
ηλεκτρομαγνητικής
ακτινοβολίας.

© Cengage Learning/George Sample



f

Διατήρηση της Ενέργειας

- Αν η συνολική ενέργεια σε ένα σύστημα αλλάζει, αυτό συμβαίνει **ΜΟΝΟΝ** αν η ενέργεια έχει μεταφερθεί στο περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον από τους προαναφερθέντες μηχανισμούς.

- Διατήρηση της Ενέργειας

$$\Delta E_{system} = \sum T$$

- όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και T είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται εκτός συστήματος με κάποιο μηχανισμό

Διατήρηση της Ενέργειας

- Συμβολίζοντας κάθε είδους μηχανισμό

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$$

$$= W + Q + T_{Μηχ.Κυμ.} + T_{Μετ.Υλης} + T_{Ηλ.Μετ.} + T_{Ηλ/Μη.Ακτ.}$$

- Αν

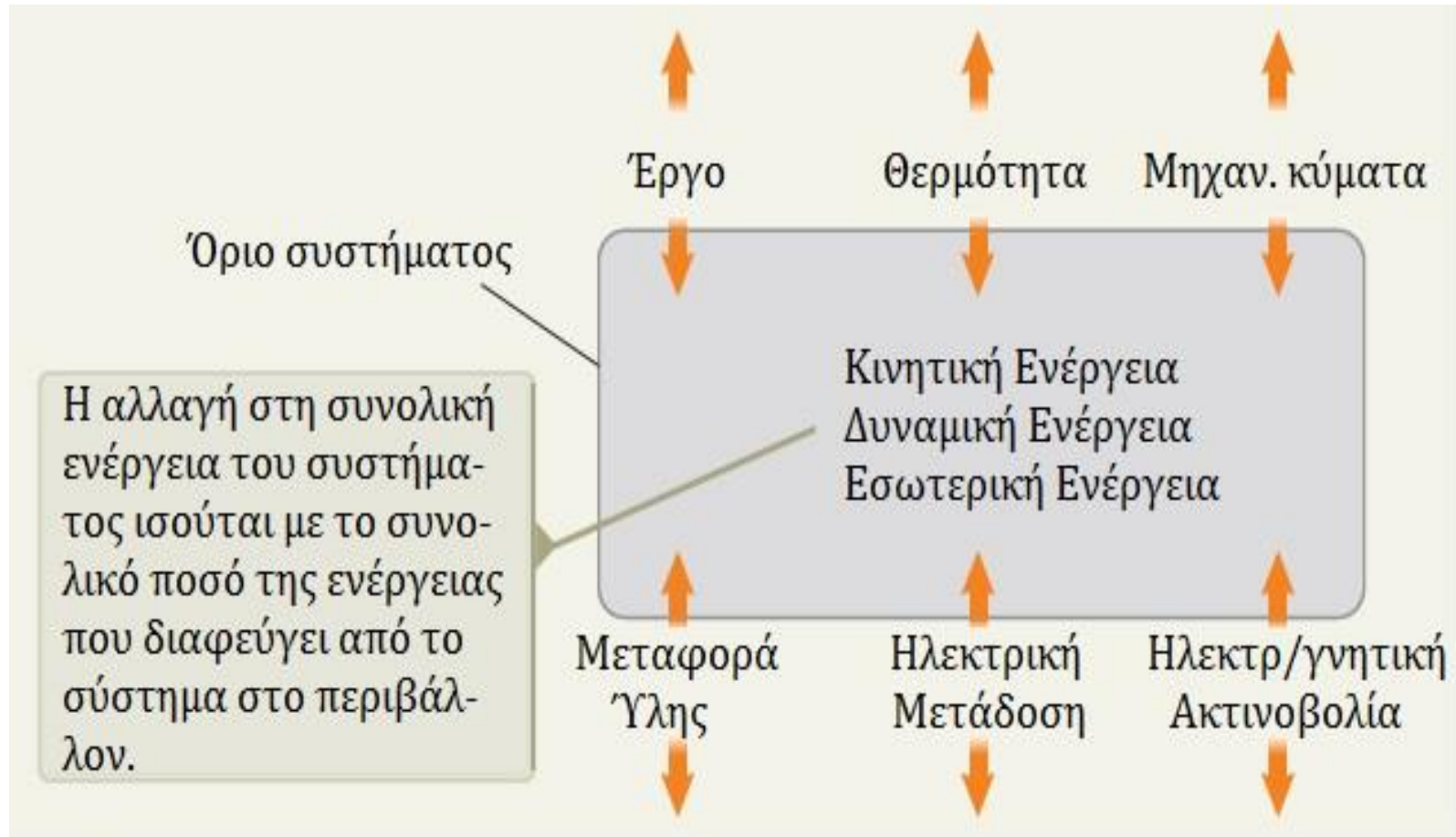
$$W = Q = T_{Μηχ.Κυμ.} = T_{Μετ.Υλης} = T_{Ηλ.Μετ.} = T_{ΗλΜη.Ακτ.} = 0$$

τότε το σύστημα είναι απομονωμένο

- Περισσότερα γι' αυτό, λίγο αργότερα...
- Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας-Έργου

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta E_{int} = Q = T_{Μηχ.Κυμ.} = T_{Μετ.Υλης} = T_{Ηλ.Μετ.} \\ &= T_{Ηλ/Μη.Ακτ.} = 0\end{aligned}$$

Διατήρηση της Ενέργειας



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα**

- Δεν υπάρχει «διαφυγή» ενέργειας με κανένα τρόπο
- **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ**

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

μόνον όταν ασκούνται συντηρητικές δυνάμεις!

- **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

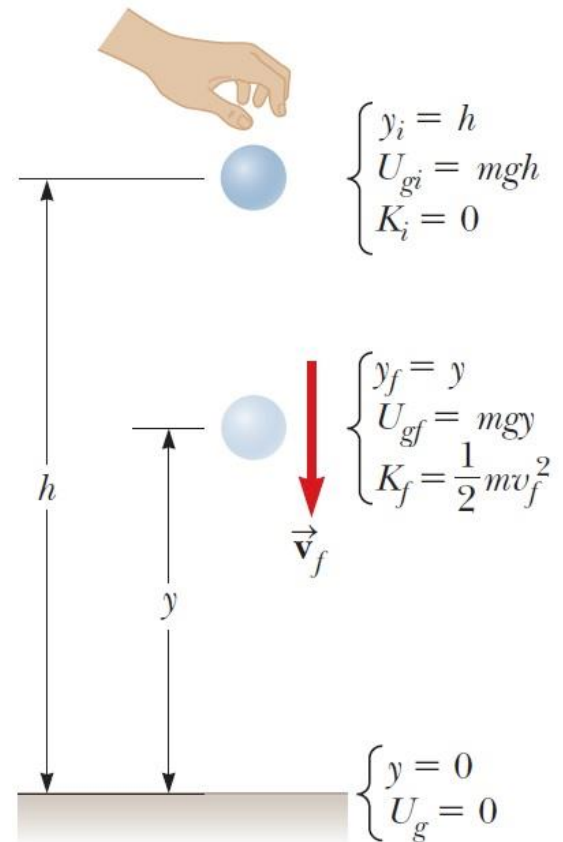
$$\Delta E_{system} = 0$$

αν ασκούνται και μη συντηρητικές δυνάμεις, δηλ. σε κάθε περίπτωση!

Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Μπάλας μάζας m πέφτει από ύψος h .
 - ◉ A) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y . Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.
 - ◉ B) Υπολογίστε ξανά το A) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.



$$* u_B^2 = 2g(h-y) \Rightarrow$$

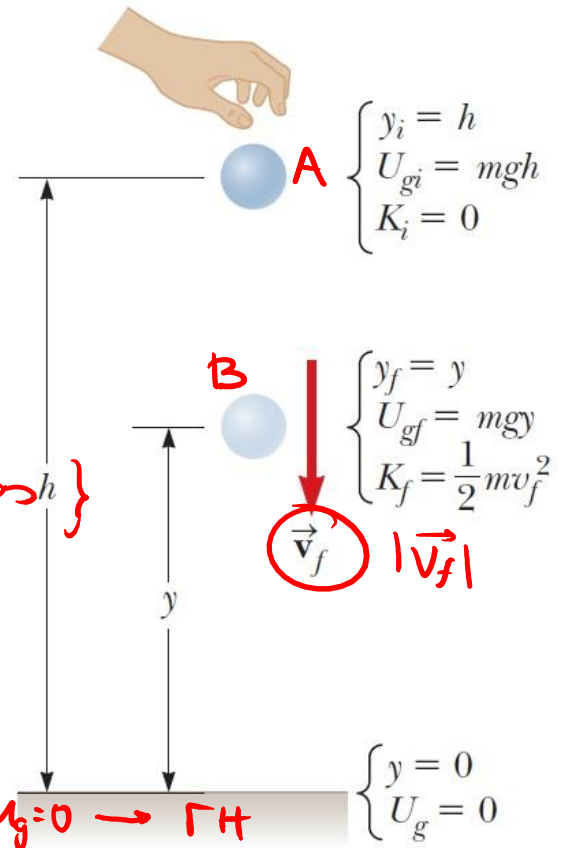
$$\Rightarrow u_B = \pm \sqrt{2g(h-y)} \Rightarrow \text{μέτρο } |u_B| = \sqrt{2g(h-y)}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Μπάλας μάζας m πέφτει από ύψος h .
- Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y . Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

$$\vec{u}_B = -\sqrt{2g(h-y)} \cdot \vec{j}$$



Το σύστημα είναι απομονωμένο!

↓
μάλα + Γη

Υπάρχει μία εσωτερική δύναμη, αυτή του βάρους h }
που είναι και συντηρητική!

$$\underline{\text{ΑΣΜΕ}}: \Delta E_{\text{μηχ}} = 0 \Leftrightarrow \Delta K + \Delta U_g = 0$$

$$\Rightarrow K_B - K_A + U_B - U_A = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + mgy - mgh = 0 *$$

$$u_g = 0 \rightarrow \Gamma\text{Η} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ U_g = 0 \end{array} \right.$$

Διατήρηση της Ενέργειας

ο Παράδειγμα - Λύση:

- Μπάλας μάζας m πέφτει από ύψος h .
- B) Υπολογίστε ξανά το A) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

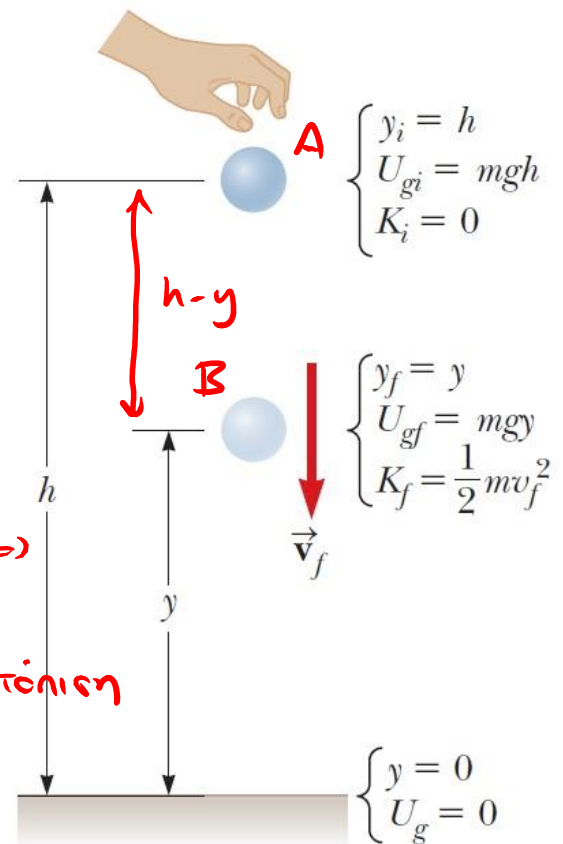
Το σύστημα-μπάλα είναι μη-απορροφητικό, και του ασκείται εξωτερ. δύναμη, αυτή της βαρυτικής έλξης.

$$\text{Από AΔΕ: } \Delta E_{\text{συστ.}} = \sum W = W_g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta K = W_g \Rightarrow K_B - K_A = mgh - mgy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = mg(h-y) \quad \hookrightarrow \text{Δύναμη} \cdot \text{μετατόνιση}$$

$$\Rightarrow u_B = \pm \sqrt{2g(h-y)} \quad \text{ή} \quad \vec{u}_B = -\sqrt{2g(h-y)} \cdot \vec{j}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

- Παρουσία τριβής, αποδεικνύεται ότι για ένα μη απομονωμένο σύστημα

$$\sum W_{other\ forces} - f_k d = \Delta K$$

όπου d η απόσταση της διαδρομής

- **Αλλαγή στην εσωτερική ενέργεια λόγω τριβών εντός συστήματος**

$$\Delta E_{int} = f_k d$$

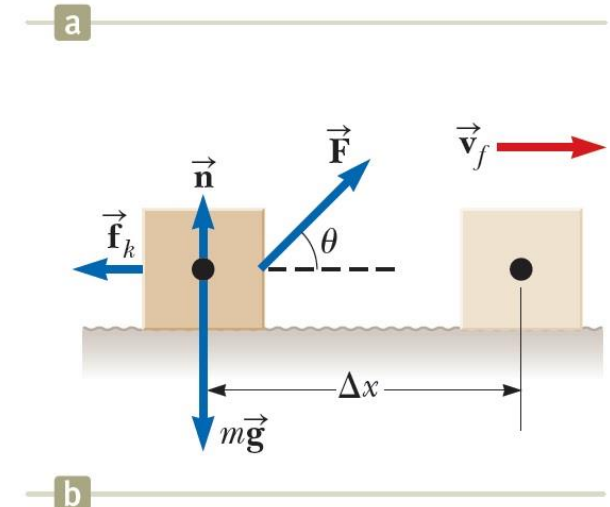
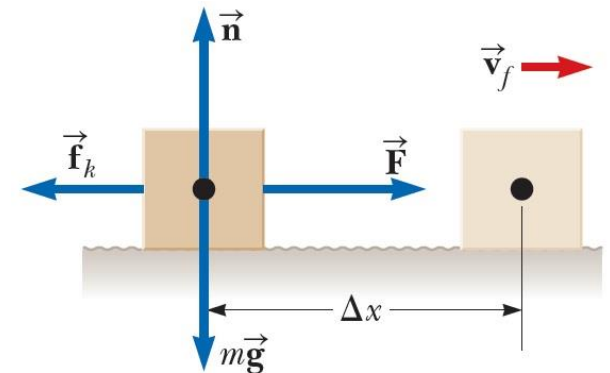
- Άρα

$$\sum W_{other\ forces} = W = \Delta K + \Delta E_{int}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα:

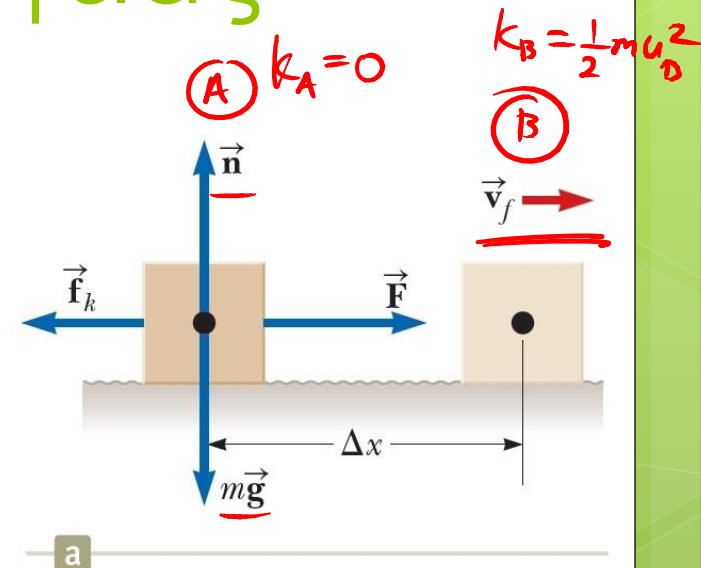
- ◉ Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N .
- ◉ Α) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m , εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15
- ◉ Β) Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ , ποια θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;



Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- ◉ Α) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Αναγνωρίζουμε το σύστημα: σώμα + επιφάνεια → η απομονωμένο

$$ADE: \sum W_{\alpha\beta} = W_F = \Delta K + \Delta E_{int} \quad (1)$$

$$W_F = F \cdot \Delta x = 12 \cdot 3 = 36 \text{ J} \quad (2)$$

$$\Delta E_{int} = +f_k \cdot \Delta x \stackrel{(3)}{=} +\mu_k \cdot mg \cdot \Delta x = +26.46 \text{ J} \quad (4)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow n = mg$$

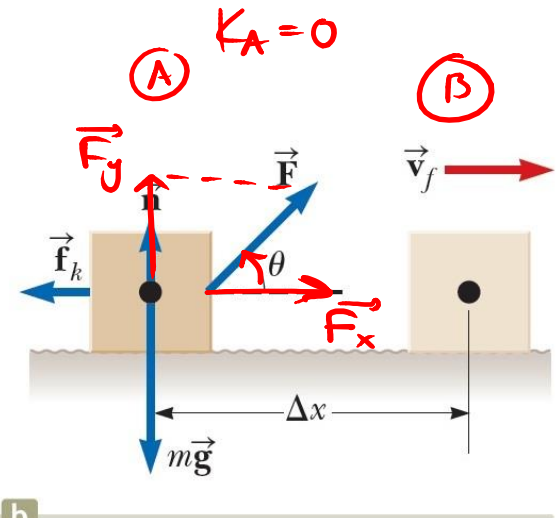
$$f_k = \mu_k \cdot n = \mu_k mg \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\stackrel{(4)}}{=} 36 = \Delta K + \frac{26.46}{27} \Rightarrow \Delta K \approx 9 \text{ J} \Rightarrow v_B = 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3)$$

Διατήρηση της Ενέργειας

Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- B) Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ , ποια θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;



$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} + \vec{F}_y + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow n = mg - F \sin \theta \quad \text{①}$$

δυναμή

$$\text{Ξέραμε ότι } f_k = \mu_k \cdot n \stackrel{\text{①}}{=} \mu_k mg - \mu_k F \sin \theta \quad \text{②}$$

$$\text{ΑΔΕ: } W_F = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} \Leftrightarrow F \cdot \Delta x \cdot \cos \theta = K_B - K_A + f_k \cdot \Delta x \Leftrightarrow$$

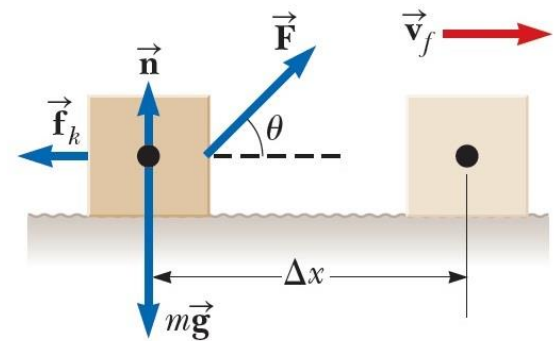
$$\Leftrightarrow K_B - K_A \stackrel{\text{②}}{=} F \cdot \Delta x \cdot \cos \theta - (\mu_k mg - \mu_k F \sin \theta) \cdot \Delta x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_B = F \cdot \Delta x \cdot \cos \theta - \mu_k mg \Delta x + \mu_k F \sin \theta \cdot \Delta x$$

Διατήρηση της Ενέργειας

ο Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- Β) Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ , ποια θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;



Αν θεωρήσουμε $K_B(\theta)$, τότε η Ιντερμедиат γωνία βρίσκεται όταν $\frac{d}{d\theta} K_B(\theta) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\theta} K_B(\theta) = -F \sin \theta \cdot \Delta x + F \cos \theta \cdot \Delta x \cdot \mu_k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{F \sin \theta \cdot \Delta x} = \cancel{F \cos \theta \cdot \Delta x} \cdot \mu_k \Leftrightarrow \mu_k = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\mu_k) = \tan^{-1}(0.15) \approx 8.5^\circ.$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Αν μια μη-συντηρητική δύναμη δρα σε ένα **απομονωμένο σύστημα**, ΤΟΤΕ

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$$

$$\Delta E_{mech} = -\Delta E_{int}$$

- Για ένα **μη-απομονωμένο** σύστημα,

$$\sum W_{other\ forces} = W = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$$

$$* f_k = \mu_k \cdot n = \mu_k \cdot m_1 g$$

Διατήρηση της Ενέργειας

Παράδειγμα:

- Δυο σώματα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και ανελαστικό σχοινί που περνά από τροχαλία χωρίς τριβές. Το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια με τριβές και συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k . Το σύστημα θεωρείται αρχικά σε ηρεμία. Αν το σώμα μάζας m_2 πέφτει κατά απόσταση h πριν έρθει σε ηρεμία, υπολογίστε το συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μάζας m_1 και της επιφάνειας.

Αναγνωρίζουμε το σύστημα: $(m_1, m_2, k, \text{επιφάνεια}, \Gamma_n)$

ΑΔΕ: $\Delta E_{sys} = 0 \Leftrightarrow$

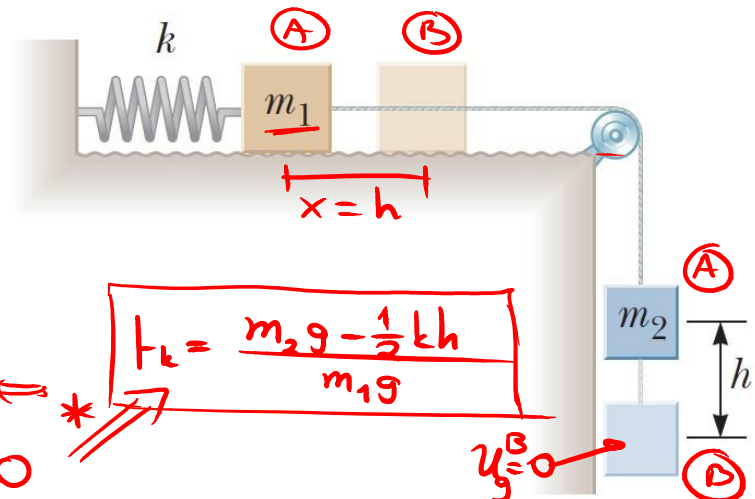
$$\Leftrightarrow \cancel{\Delta K} + \Delta U + \Delta E_{int} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta U + \Delta E_{int} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta U_g + \Delta U_s + \Delta E_{int} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_g^B - U_g^A + U_s^B - U_s^A + \Delta E_{int} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 - m_2 g h + \frac{1}{2} k h^2 - 0 + f_k \cdot h = 0$$



Διατήρηση της Ενέργειας

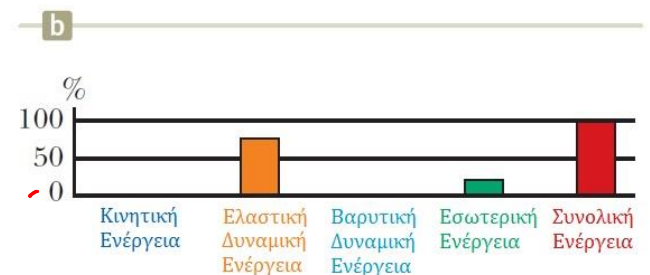
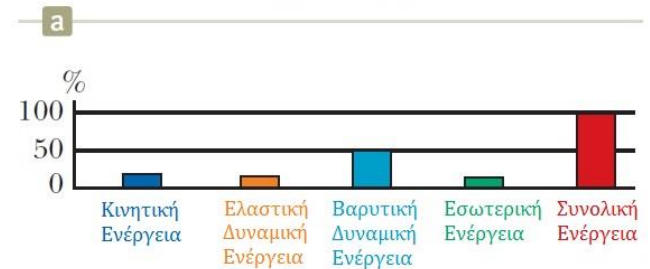
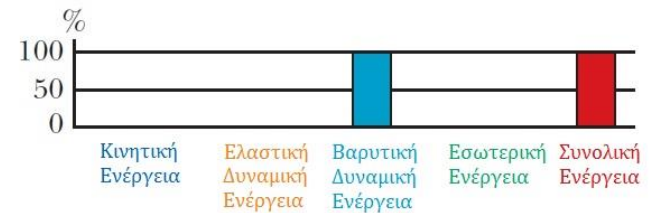
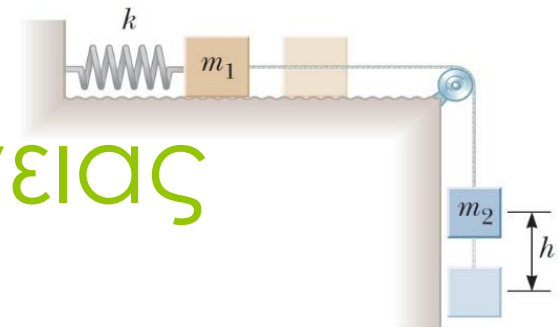
ο Παράδειγμα:

- ο Αναγνωρίστε τη διάταξη του προηγούμενου συστήματος που ανταποκρίνεται σε κάθε γράφημα ενέργειας

(α) Θέση αρχικής ισορροπίας συστήματος

(β) Τυχαία θέση κίνησης των μελών του συστήματος

(γ) Τελική θέση ισορροπίας συστήματος



Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίζουμε ότι **έργο == μεταφορά ενέργειας**
 - Ερώτημα: Πόσο γρήγορα μεταφέρεται η ενέργεια?
 - Αν θέλετε να αγοράσετε έναν κινητήρα για να κινεί ένα ασανσέρ μάζας 1500 kg για 5 ορόφους, έχει μεγάλη σημασία αν ο κινητήρας το κάνει σε 30 s ή σε 30 min! ☺
- Το «πόσο γρήγορα» υποδηλώνει ένα ρυθμό
 - Ρυθμό μεταφοράς ενέργειας == **ισχύς P (Power)**

$$P = \frac{dE}{dt}$$

- Μονάδα μέτρησης: 1 Watt = 1 J/s

Διατήρηση της Ενέργειας

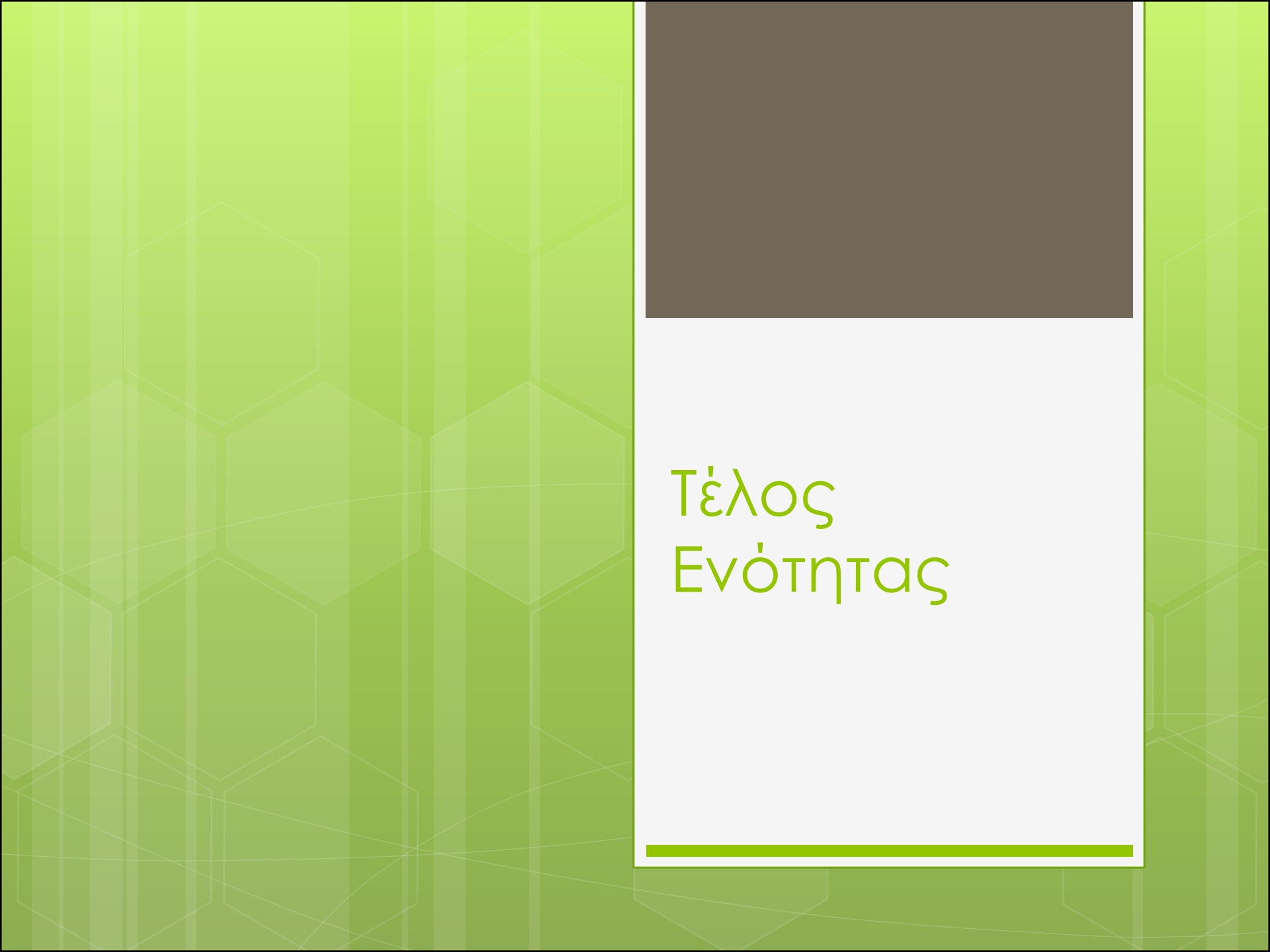
- Εναλλακτικά, η ισχύς μπορεί να ιδωθεί ως ο **ρυθμός παραγωγής έργου**

- **Μέση ισχύς**

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$$

- **Στιγμιαία ισχύς**

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{avg} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



Τέλος
Ενότητας
