



Εικόνα: Το Σέλας συμβαίνει όταν υψηλής ενέργειας, φορτισμένα σωματίδια από τον Ήλιο ταξιδεύουν στην άνω ατμόσφαιρα της Γης λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού της πεδίου.

Φυσική για Μηχανικούς

Μαγνητισμός
Μαγνητικά Πεδία



Εικόνα: Το Σέλας συμβαίνει όταν υψηλής ενέργειας, φορτισμένα σωματίδια από τον Ήλιο ταξιδεύουν στην άνω ατμόσφαιρα της Γης λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού της πεδίου.

Φυσική για Μηχανικούς

Μαγνητισμός
Μαγνητικά Πεδία

Μαγνητικά Πεδία

- ◉ **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**

- ◉ Ως τώρα θεωρήσαμε ότι το μαγνητικό πεδίο «υπήρξε με κάποιον τρόπο»
- ◉ Στη συνέχεια θα δείξουμε την προέλευση του μαγνητικού πεδίου: τα κινούμενα φορτία (!)
- ◉ Πολλοί σημαντικοί νόμοι:
 - ◉ Νόμος των Biot-Savart
 - ◉ Νόμος του Ampere
 - ◉ Νόμος του Gauss για το μαγνητισμό
- ◉ Θα αξιοποιήσουμε ξανά τις συμμετρίες των προβλημάτων

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**

- Jean-Baptiste Biot – Felix Savart : περιέγραψαν τη δύναμη που εγείρεται από ηλεκτρικό ρεύμα κοντά σε ένα μαγνήτη
- Τα πειράματά τους κατέληξαν σε μια μαθηματική έκφραση που δίνει το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου με όρους του ρεύματος, το οποίο παράγει το πεδίο (!)
- Ξεκίνησαν από ένα απειροστά μικρό τμήμα ds καλωδίου σταθερού ρεύματος που παράγει μαγνητικό πεδίο dB σε ένα σημείο P
 - Έχουμε ακολουθήσει τη μέθοδό τους πολλές φορές ☺

Μαγνητικά Πεδία

- Πηγές Μαγνητικού Πεδίου

- Επιγραμματικά, έδειξαν ότι:

1. Το διάνυσμα $d\vec{B}$ είναι κάθετο τόσο στο $d\vec{s}$ (που δείχνει στην κατεύθυνση του ρεύματος) όσο και στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{r}$ που κατευθύνεται από το $d\vec{s}$ στο σημείο P
2. Το μέτρο του $d\vec{B}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο του r^2 , με r την απόσταση από το $d\vec{s}$ στο P
3. Το μέτρο του $d\vec{B}$ είναι ανάλογο του ρεύματος I και του μέτρου ds του τμήματος μήκους $d\vec{s}$
4. Το μέτρο του $d\vec{B}$ είναι ανάλογο του $\sin(\theta)$, με θ τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $d\vec{s}$ και $\vec{r}$

Μαγνητικά Πεδία

- Πηγές Μαγνητικού Πεδίου
- Όλα αυτά γράφονται ως

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

- Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο **νόμος των Biot-Savart**
- Το μ_0 ονομάζεται διαπερατότητα του ελεύθερου χώρου και έχει τιμή $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Tm/A}$
- Γενικεύοντας την παραπάνω σχέση για την εύρεση του συνολικού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ σε ένα σημείο του χώρου από ένα ρεύμα πεπερασμένου μεγέθους, πρέπει να αθροίσουμε όλα τα $d\vec{B}$.

Μαγνητικά Πεδία

- Πηγές Μαγνητικού Πεδίου
- Ολοκληρώνοντας λοιπόν, έχουμε

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^2}$$

με το ολοκλήρωμα να λαμβάνεται σε όλη την κατανομή ρεύματος

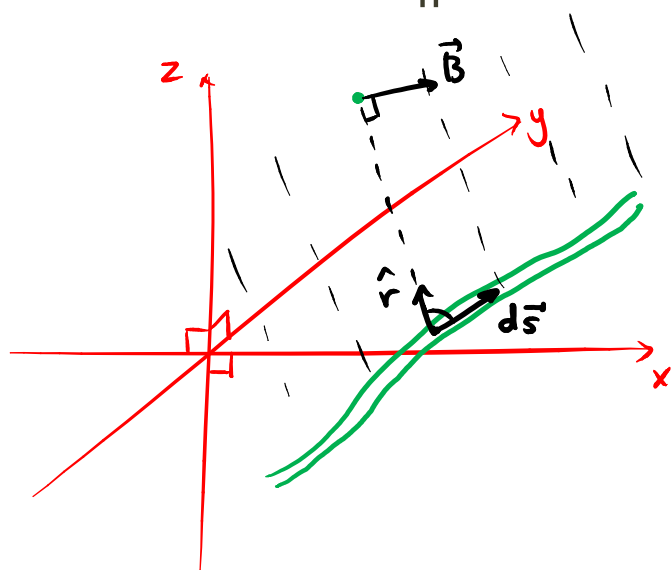
- Ολοκλήρωμα με εξωτερικό γινόμενο! ☺ Προσοχή!
 - Έχουμε ήδη δει - και θα ξαναδούμε - πως το χειριζόμαστε

Μαγνητικά Πεδία

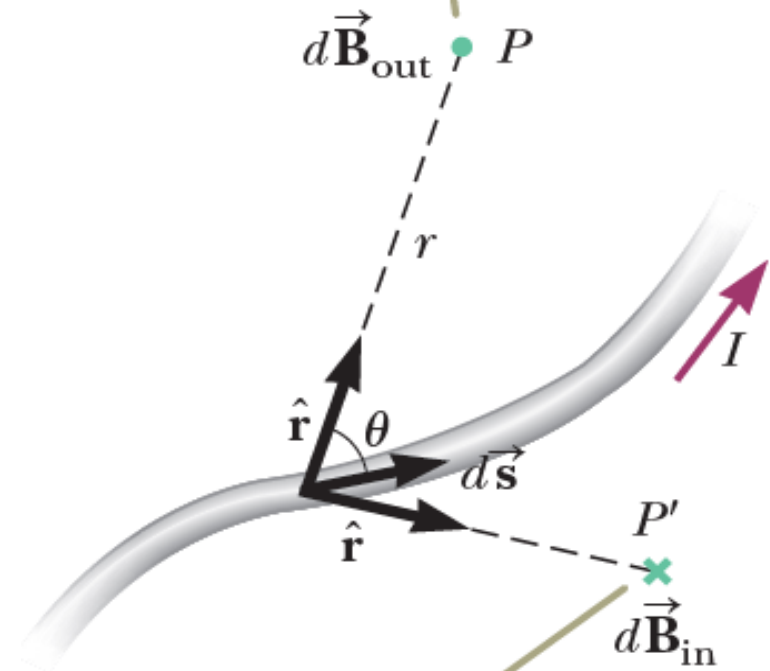
- Ας περιγράψουμε τις (ενδιαφέρουσες) ομοιότητες και διαφορές μεταξύ μαγνητικού πεδίου «σημειακού ρεύματος» και ηλεκτρικού πεδίου σημειακού φορτίου
 1. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο P είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης r από αυτό. Το ίδιο συνέβαινε και στο ηλεκτρικό πεδίο.
 2. Οι κατευθύνσεις των πεδίων είναι πολύ διαφορετικές:
 - a) Ηλεκτρικό πεδίο: ακτινική διεύθυνση
 - b) Μαγνητικό πεδίο: κάθετο στο «σημειακό ρεύμα» και στο $\vec{r}$
 3. Ένα «σημειακό ρεύμα» δεν έχει τόσο νόημα όσο ένα σημειακό φορτίο
 - Απαιτείται κύκλωμα για να υπάρχει ρεύμα

Μαγνητικά Πεδία

- Βρείτε το διάνυσμα $d\vec{s} \times \vec{r}$ στα δυο σημεία!



Γιατί η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P είναι προς τα έξω;

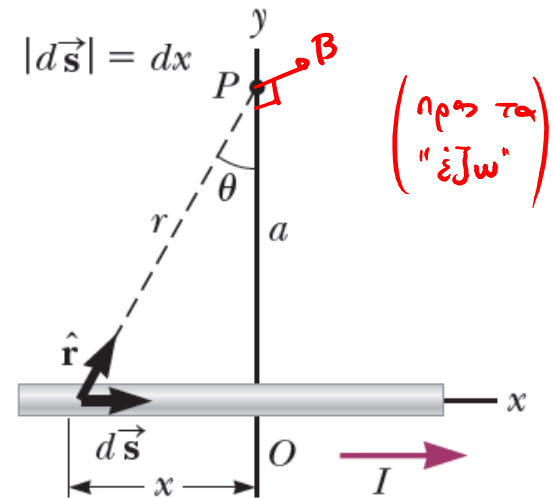
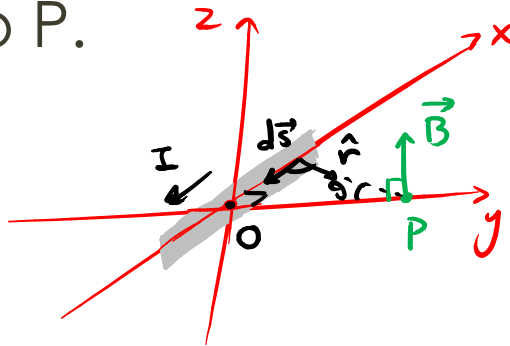


Γιατί η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P' είναι προς τα μέσα;

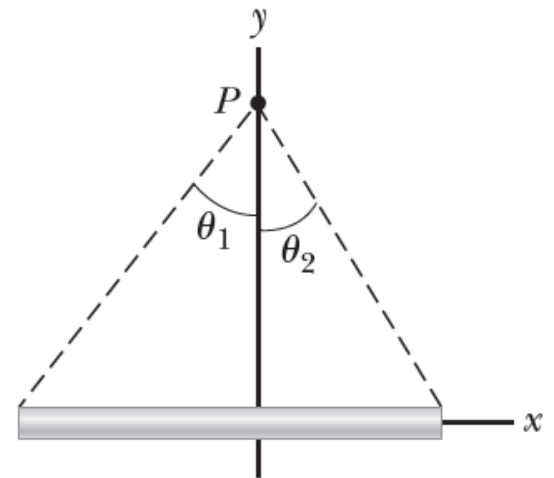
Μαγνητικά Πεδία

- Παράδειγμα:

- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x -άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P .



a



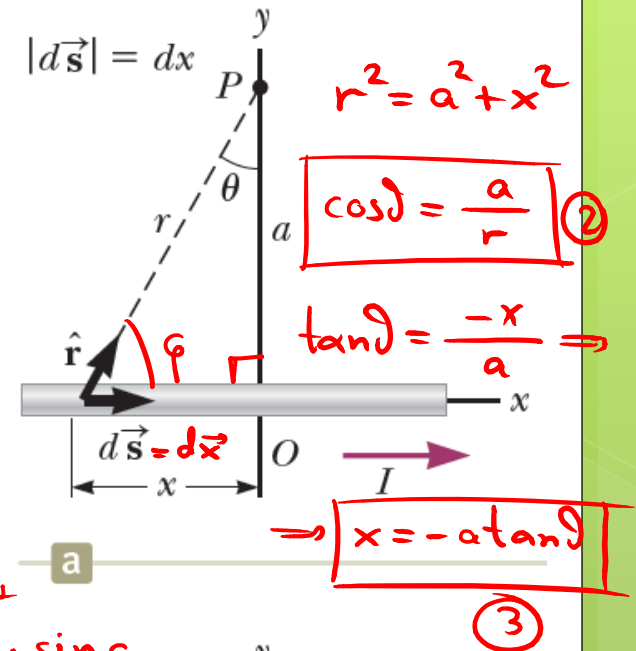
b

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

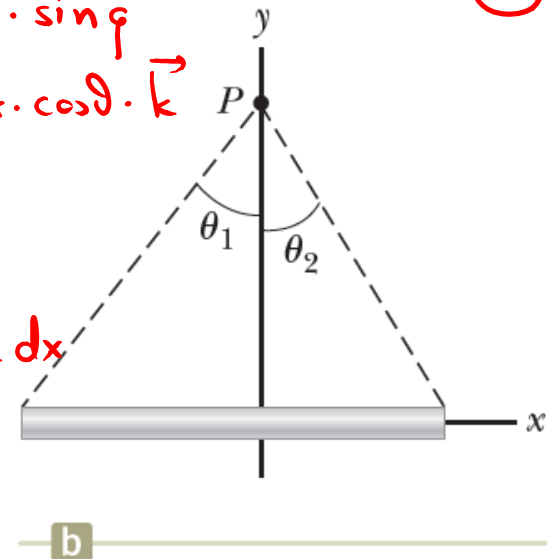
- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x -άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P .



Είναι $d\vec{s} \times \vec{r} = d\vec{x} \times \vec{r} \Rightarrow |d\vec{x} \times \vec{r}| = dx \cdot I \cdot \sin\phi$
 $= dx \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dx \cdot \cos\theta$, οπότε $d\vec{x} \times \vec{r} = dx \cdot \cos\theta \cdot \vec{k}$

Άρα $B_P = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx \cdot \cos\theta}{r^2}$ ①

Η ① ② $B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx \cos\theta}{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\cos^3\theta}{a^2} dx$

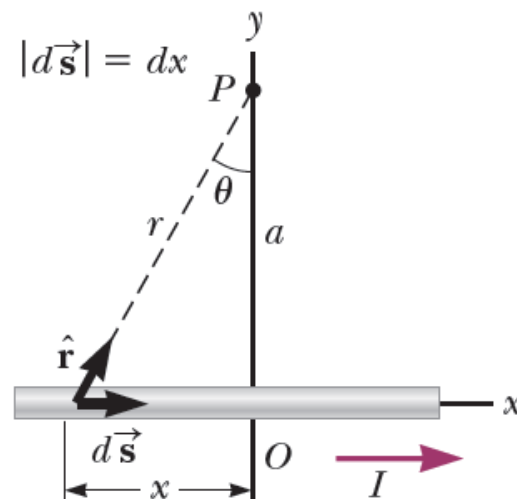


$$* \frac{d}{d\vartheta} \tan \vartheta = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$$

Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x -άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P .



a

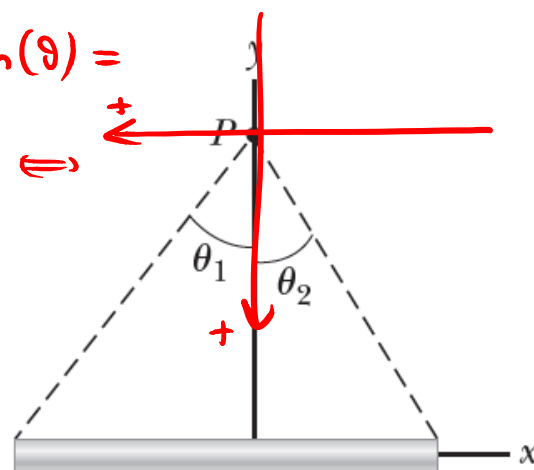
$$\text{Η } \textcircled{3} \Rightarrow x(\vartheta) = -a \tan(\vartheta) \Rightarrow \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta} = -a \frac{d}{d\vartheta} \tan(\vartheta) =$$

$$= -a \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\frac{a}{\cos^2 \vartheta} \Rightarrow \boxed{dx = -\frac{a}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta} \quad \textcircled{4}$$

$$\propto B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\cos^3 \vartheta}{a^2} \left(-\frac{a}{\cos^2 \vartheta} \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left(-\frac{\cos \vartheta}{a} \right) d\vartheta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2).$$



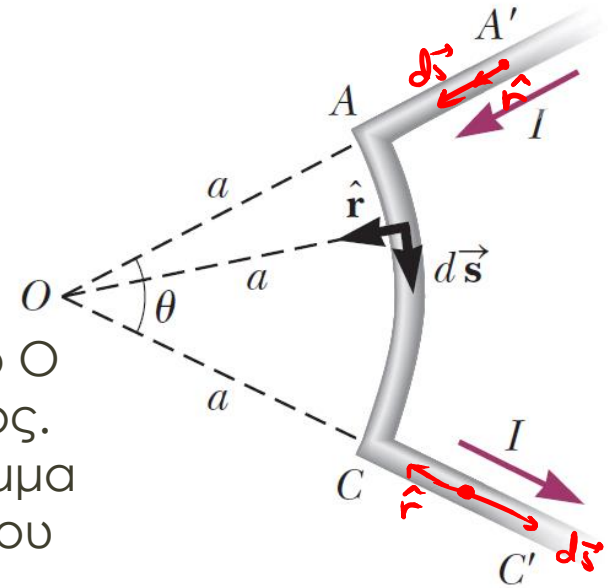
b

$$|d\vec{s} \times \vec{r}| = |d\vec{s}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\phi$$

Μαγνητικά Πεδία

● Παράδειγμα:

- Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O για το ρευματοφόρο καλώδιο του Σχήματος. Το καλώδιο αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα και ένα κυκλικό τόξο ακτίνας a , που σχηματίζει γωνία θ .



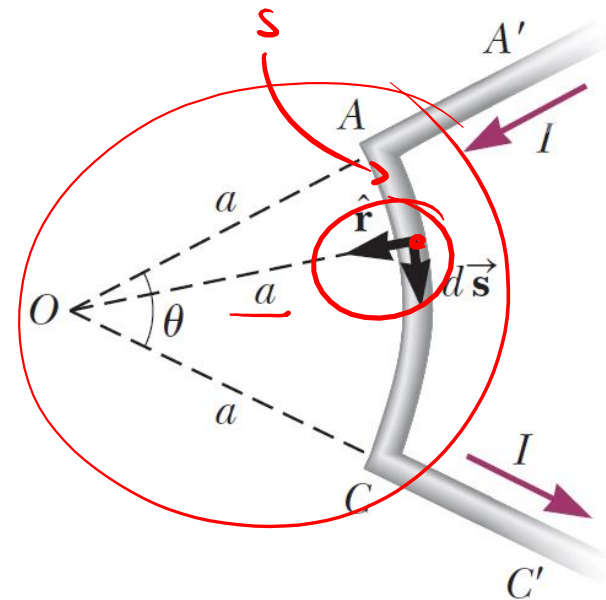
Οι αψευδί AA' , CC' δε συνεσφέρων μαγν. πεδίο στο σημείο O γιατί η γωνία ϕ των διανυσμάτων $\vec{r}$, $d\vec{s}$ είναι 0 ή π , οπότε το μέτρο του $d\vec{s} \times \vec{r}$ είναι $|d\vec{s}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\phi = 0$, επειδή $\sin 0 = \sin \pi = 0$. Άρα η όπια συνεσφορά μαγνητικά πεδίου στο σημείο O θα σφείλεται στο τμήμα ρευματοφόρου αψευδί AC .

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Μαγνητικά Πεδία

• Παράδειγμα – Λύση:

- Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο για το ρευματοφόρο καλώδιο του Σχήματος. Το καλώδιο αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα και ένα κυκλικό τόξο ακτίνας a , που σχηματίζει γωνία θ .



$$\text{Στο καλώδιο AC: } |d\vec{s} \times \hat{r}| = ds \cdot |\hat{r}| \cdot \sin 90^\circ = ds \cdot |\hat{r}| = ds$$

$$\text{Οότε } dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} ds \Rightarrow B = \int dB =$$

$$= \int \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int ds \left\{ \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} s = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} a\theta = \right.$$

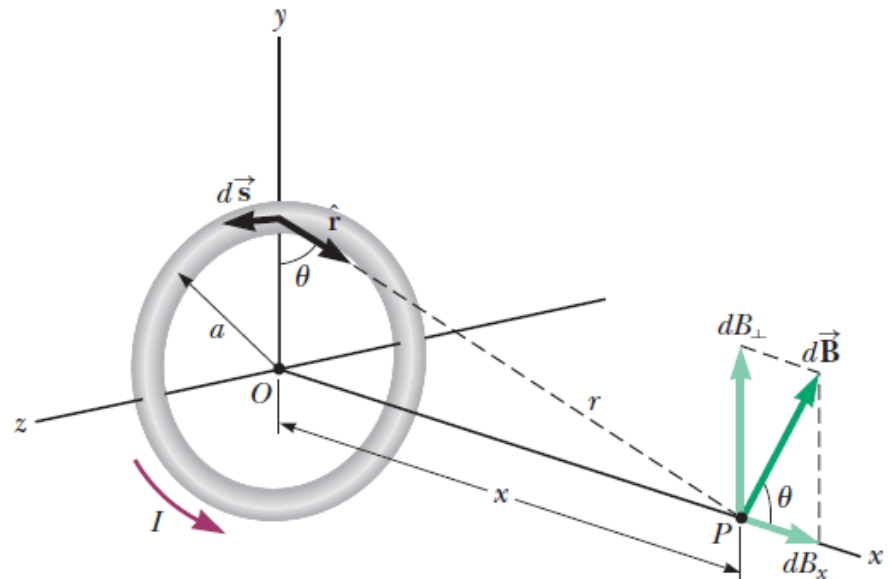
$$\left. s = R\theta = a\theta \right\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta.$$

$$\text{Άρα } \vec{B} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta \cdot \vec{k}$$

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**

- Θεωρήστε το κυκλικό καλώδιο ακτίνας a στο επίπεδο yz . Το καλώδιο φέρει ρεύμα σταθερού μέτρου I όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P του άξονα x που διαπερνά το κέντρο του κυκλικού καλωδίου.



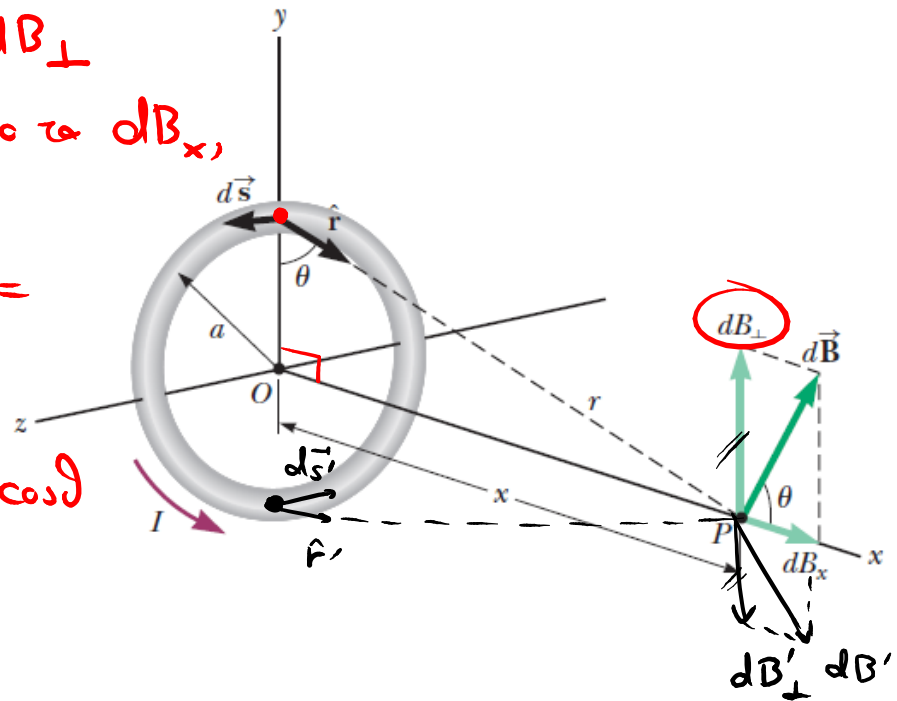
Μαγνητικά Πεδία

• Παράδειγμα – Λύση:

- Θεωρήστε το κυκλικό καλώδιο ακτίνας a στο επίπεδο yz . Το καλώδιο φέρει ρεύμα σταθερού μέτρου I όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P του άξονα x που διαπερνά το κέντρο του κυκλικού καλωδίου.

Λόγω συμμετρίας, οι συνιστώσες $dB_{\perp}$ αλληλοεκαυρώνονται, και μένουν μόνο τα dB_x , οι οποίες αλληλοσθαινούνται.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } |d\vec{s} \times \hat{r}| &= ds \cdot |\hat{r}| \cdot \sin 90^\circ = \\ &= ds. \text{ Άρα } dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r^2} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(a^2 + x^2)}. \text{ Όπως } dB_x = dB \cdot \cos\theta \end{aligned}$$



Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

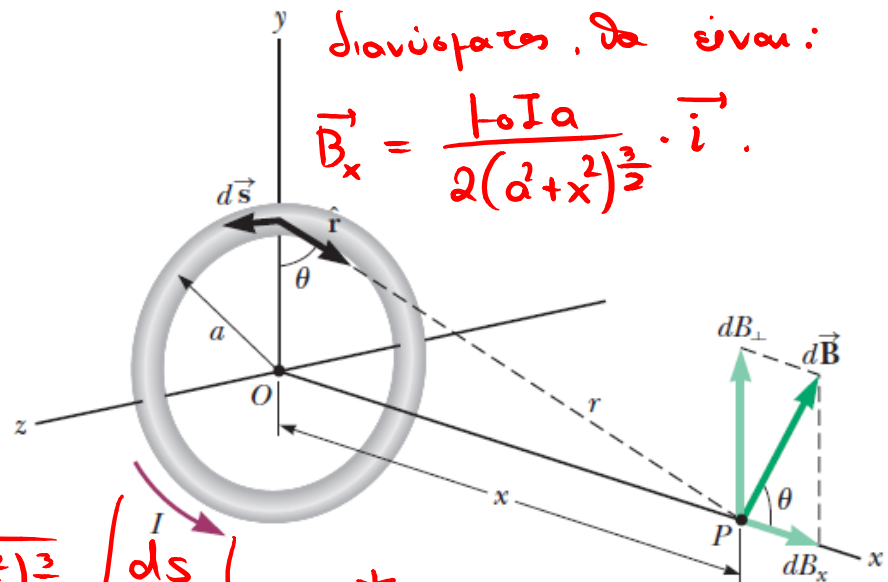
- Θεωρήστε το κυκλικό καλώδιο ακτίνας a στο επίπεδο yz . Το καλώδιο φέρει ρεύμα σταθερού μέτρου I όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P του άξονα x που διαπερνά το κέντρο του κυκλικού καλωδίου.

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\theta \quad \left. \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Τέλος, } B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int ds \quad \left. \begin{array}{l} \int ds = 2\pi a \end{array} \right\} \Rightarrow *$$

$$\begin{aligned} * B_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi a \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Σε τσέρνι} \end{aligned}$$





Τέλος Διάλεξης
