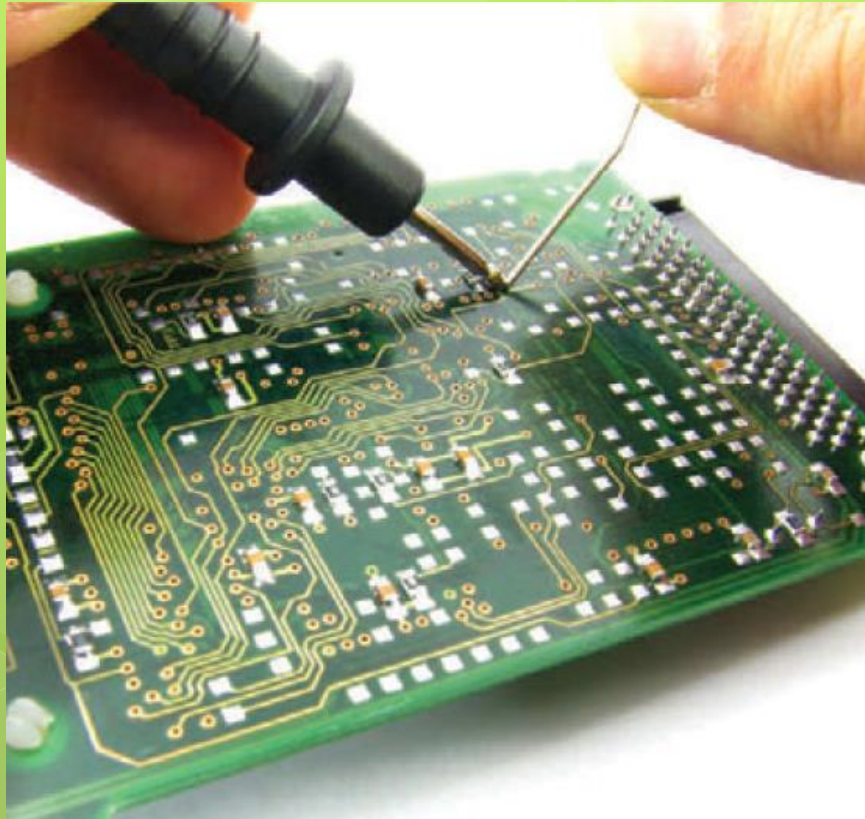
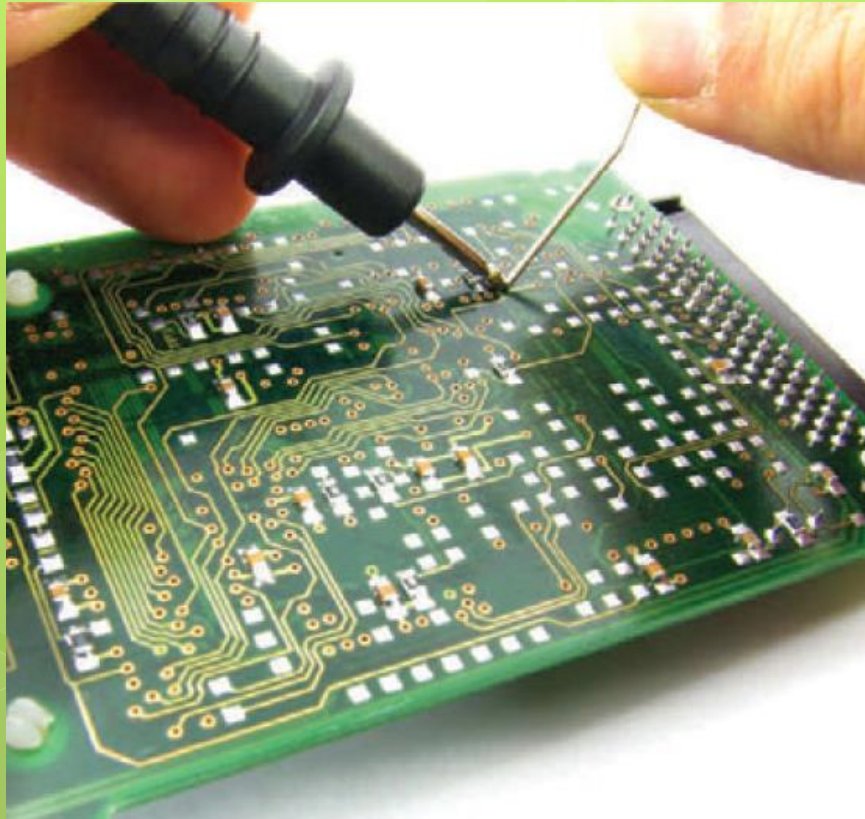




Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- ◉ Επανάληψη...
 - ◉ Δομικοί λίθοι:
 - ◉ Αντιστάσεις, Πυκνωτές, Μπαταρίες (πηγές ΗΕΔ)

- ◉ Αντιστάσεις σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- ◉ Αντιστάσεις σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα

- A) Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση
- B) Ποιο το ρεύμα σε κάθε αντιστάτη αν διατηρούμε μια διαφορά δυναμικού 42 V ανάμεσα στα a, c;

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{42}{14} = 3 \text{ A}$$

$$b: I = I_1 + I_2 = 3 \text{ A} \quad (1)$$

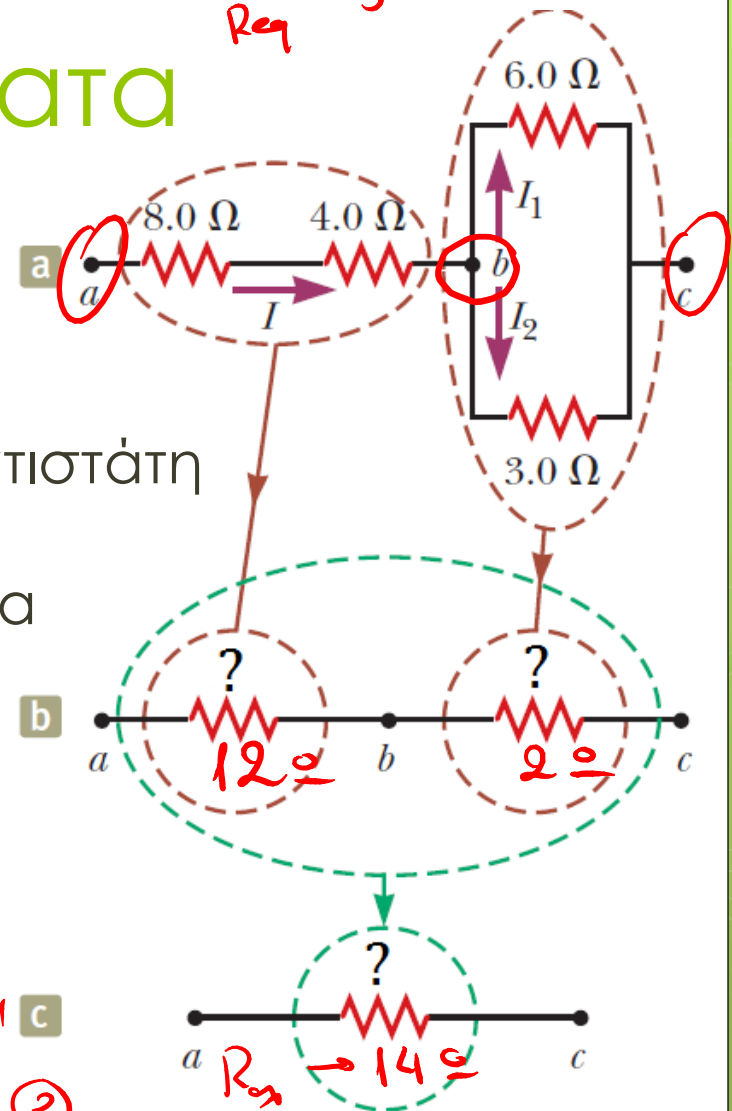
$$\Delta V_1 = I_1 R_1, \Delta V_2 = I_2 R_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V = I_1 R_1 + I_2 R_2 \quad (2)$$

Από τα (1), (2):

$$I_1 = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = 2 \text{ A}$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Οι Κανόνες του Kirchhoff

- Για πιο περίπλοκα κυκλώματα, ακολουθούμε κάποιους κανόνες, του λεγόμενου **κανόνες του Kirchhoff**

- 1. **Κανόνας κόμβου:** σε οποιονδήποτε κόμβο, το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{\text{κόμβος}} I = 0$$

- Τα ρεύματα που μπαίνουν στον κόμβο έχουν θετικό πρόσημο, ενώ αυτά που βγαίνουν, αρνητικό.
- 2. **Κανόνας βρόχου:** το άθροισμα των διαφορών δυναμικού σε ένα βρόχο πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Οι Κανόνες του Kirchhoff

- 1. Κανόνας κόμβου:

$$\sum_{\text{κόμβος}} I = 0$$

- Προέρχεται από την αρχή διατήρησης του φορτίου

- 2. Κανόνας βρόχου:

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

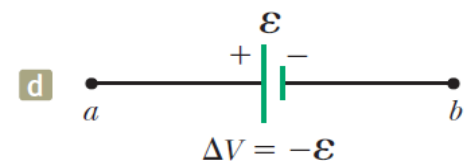
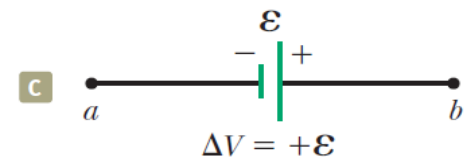
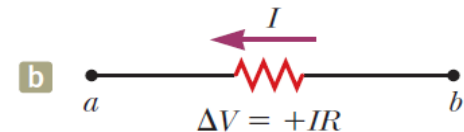
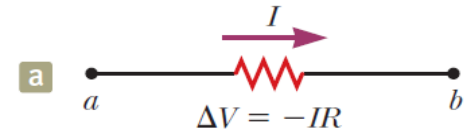
- Προέρχεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Κανόνες προσήμου

- A. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά τη φορά του ρεύματος είναι $-IR$
- B. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά την αντίθετη φορά του ρεύματος είναι $+IR$
- C. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι $+\mathcal{E}$ αν τη διατρέχουμε από τα αρνητικά προς τα θετικά
- D. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι $-\mathcal{E}$ αν τη διατρέχουμε από τα θετικά προς τα αρνητικά

Σε κάθε διάγραμμα, $\Delta V = V_b - V_a$ και το στοιχείο κυκλώματος διατρέχεται από το a στο b, αριστερά προς δεξιά.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα:

- Ένα κύκλωμα απλού βρόχου περιέχει δυο αντιστάτες και δυο πηγές όπως στο σχήμα. Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Από το 2^ο Κανόνα Kirchhoff:

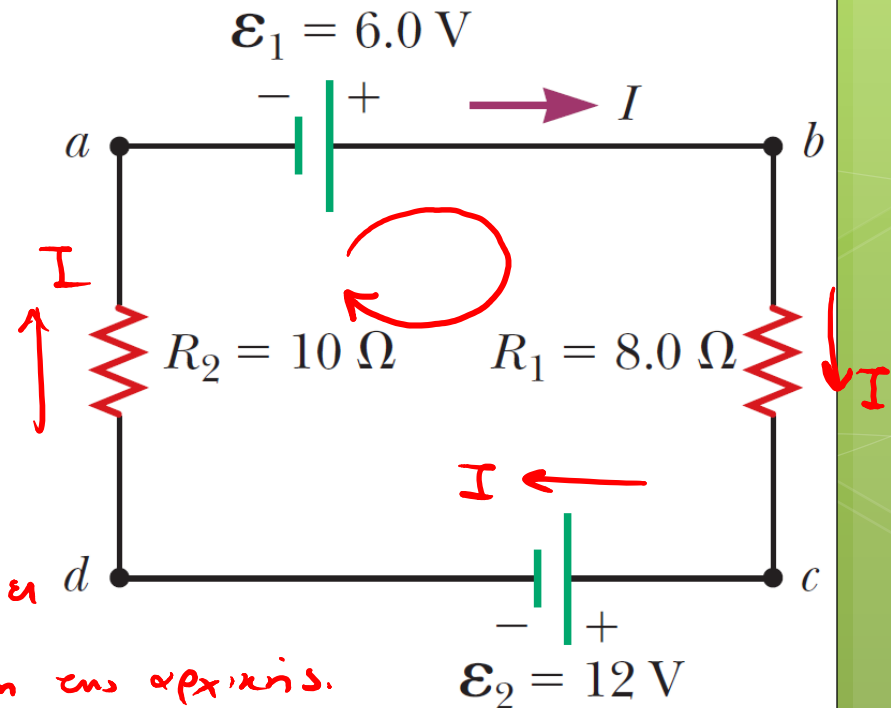
$$\sum_{\text{abcd}} \Delta V = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

$$\Rightarrow 6 - I \cdot 8 - 12 - 10I = 0$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{3} \text{ A} , \text{ το "μείον" μας λέει}$$

ότι η φορά του I είναι αντιστροφή της αρχικής.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα:

- Βρείτε τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 του διπλανού κυκλώματος

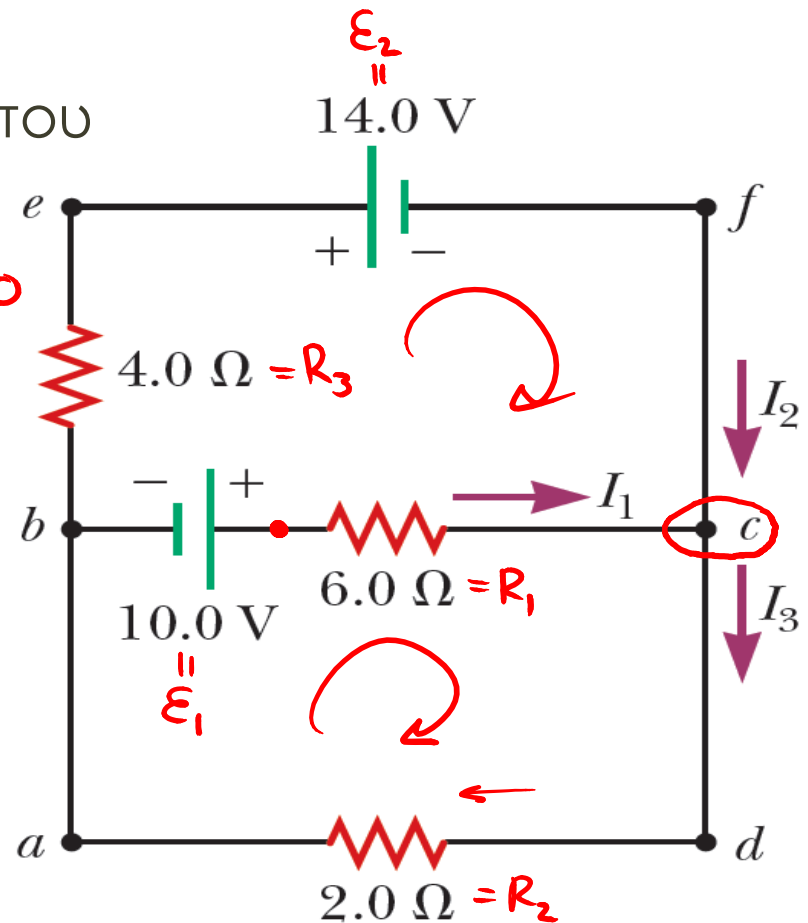
Κόμβος c: $\sum I = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{I_1 + I_2 = I_3} \quad (1)$

Πρόχει αbcda: $\sum_{ab c d a} \Delta V = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_3 R_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{10 - I_1 \cdot 6 - I_3 \cdot 2 = 0} \quad (2)$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα - Λύση:

Στο βρόχο befc: $\sum \Delta V = 0 \Rightarrow$

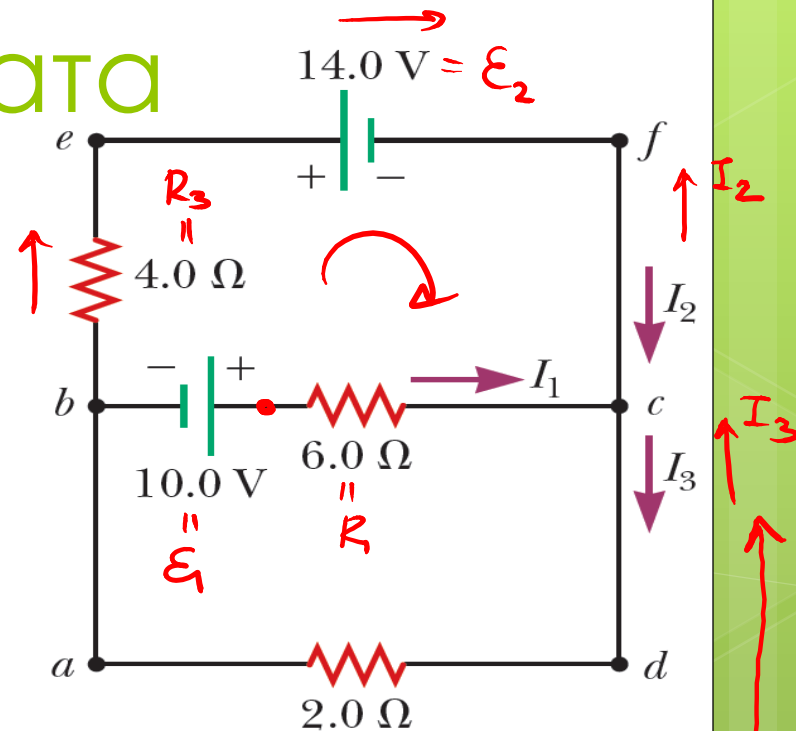
$$\Rightarrow -I_2 \cdot R_3 - \mathcal{E}_2 + I_1 \cdot R_1 - \mathcal{E}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4I_2 - 14 + 6I_1 - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4I_2 + 6I_1 - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-2I_2 + 3I_1 = 12} \quad (3)$$

Από τα (1), (2), (3) έχουμε:

$$I_1 = 2 \text{ A}$$
$$I_2 = -3 \text{ A}$$
$$I_3 = -1 \text{ A}$$


Τα αρνητικά πρόσημα
δηλώνουν ότι η φορά
είναι αντίθετη από αυτή
που υποθέσαμε αρχικά.

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

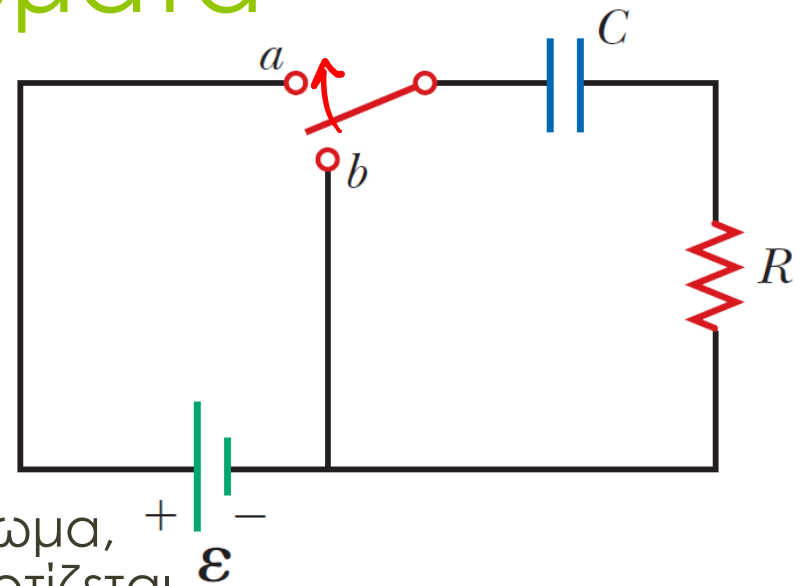
○ Κυκλώματα RC

- Ως τώρα αναλύσαμε κυκλώματα όπου το ρεύμα είναι σταθερό.
- Αν όμως αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε πυκνωτές στα κυκλώματά μας, το ρεύμα εξακολουθεί να έχει την ίδια κατεύθυνση αλλά το μέτρο του μπορεί να αλλάζει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές
- Ένα κύκλωμα που αποτελείται από συνδυασμούς αντιστάσεων και πυκνωτών ονομάζεται **RC-κύκλωμα**

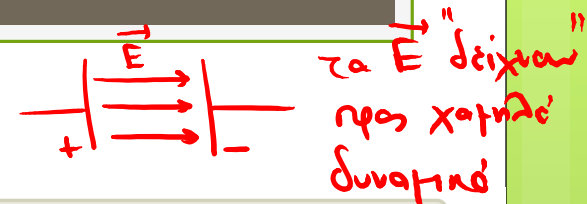
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή

- Ας θεωρήσουμε ένα απλό RC κύκλωμα με αφόρτιστο αρχικά πυκνωτή
- Όταν ο διακόπτης κλείσει τη χρονική στιγμή $t = 0$, ξεκινά να υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα, κι ο πυκνωτής ξεκινά να φορτίζεται
- Όσο φορτίζεται, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αυξάνεται
- Όταν επιτευχθεί το μέγιστο φορτίο, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μηδενίζεται! Γιατί;
 - Γιατί δεν υπάρχει πια διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα!
 - Ο πυκνωτής έχει $\Delta V = -\epsilon$!



$\Delta V_{\text{πικ}} = -\frac{q}{C}$ γιατί διατρέχαμε
τον πυκνωτή από θετική προς αρνητική πλάκα $\Rightarrow$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

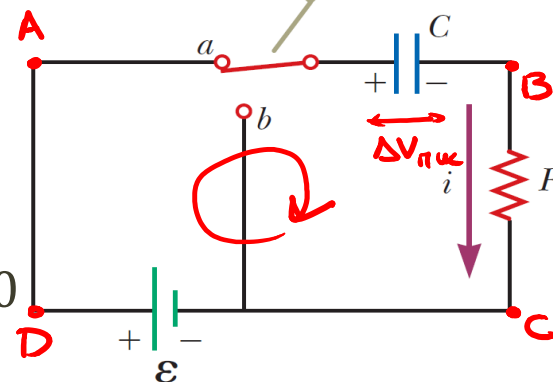
Φόρτιση πυκνωτή

- Ας αναλύσουμε τη διαδικασία ποσοτικά
- Σύμφωνα με το 2^ο κανόνα του Kirchhoff:

$$\sum_{\text{ABCD}} \Delta V = 0 \Leftrightarrow \varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0$$

$\Delta V_{\text{πικ.}}$

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση α, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται.



- με i, q το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t > 0$
 - Αποτελούν δηλαδή **στιγμιαίες** τιμές
- Αρχικά, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R}, \quad t = 0$$

- ...γιατί το φορτίο του πυκνωτή είναι αρχικά μηδέν
- Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα της αντίστασης

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

• Φόρτιση πυκνωτή

- Στο τέλος, όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος στη μέγιστη τιμή του, τα φορτία παύουν να κινούνται και το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν
 - Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα του πυκνωτή
 - Το φορτίο του πυκνωτή είναι
$$Q = C\Delta V = C\varepsilon \Rightarrow \text{δεν υπάρχει } r \text{ στην μπαταρία}$$

εσωτερική αντίσταση
- Θα ήταν επιθυμητό να γνωρίζουμε αναλυτικά τις τιμές του φορτίου και του ρεύματος για κάθε χρονική στιγμή t , και όχι μόνο τι συμβαίνει στις δυο ακραίες καταστάσεις που περιγράψαμε
- Ας το δούμε...

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή

- Ξέρουμε ότι $i = \frac{dq}{dt}$ και άρα

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0 \leftrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\varepsilon}{RC}$$

- Πολλαπλασιάζοντας με dt και αναδιατάσσοντας

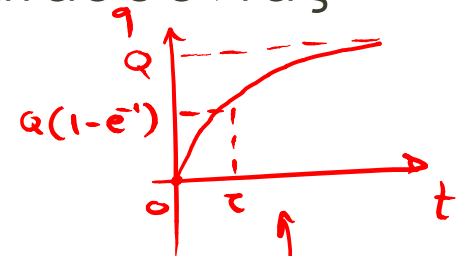
$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Ολοκληρώνοντας

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \leftrightarrow \ln \left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} \right) = -\frac{t}{RC}$$

- Άρα

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC})$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

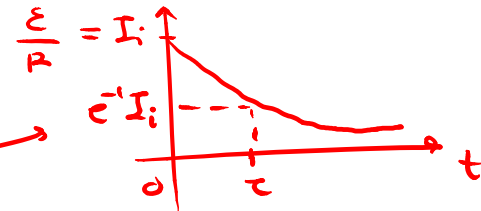
- Φόρτιση πυκνωτή

- Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC})$$

ως προς το χρόνο έχουμε ότι

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$



- Η ποσότητα RC ονομάζεται **χρονική σταθερά τ**
 $\tau = RC$

- Εκφράζει το χρονικό διάστημα όπου το ρεύμα φθίνει στο $1/e$ της αρχική του τιμής ($0.368I_i$), δηλ. $t = RC$
- Αντίστοιχα, το χρονικό διάστημα όπου το φορτίο αυξάνει από $q = 0$ στην τιμή $q = 0.632C\varepsilon$, δηλ. $t = RC$

$$\begin{aligned} Q &= C\varepsilon \\ &= C\Delta V \\ \varepsilon &= \frac{Q}{C} \end{aligned}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Εκφόρτιση πυκνωτή

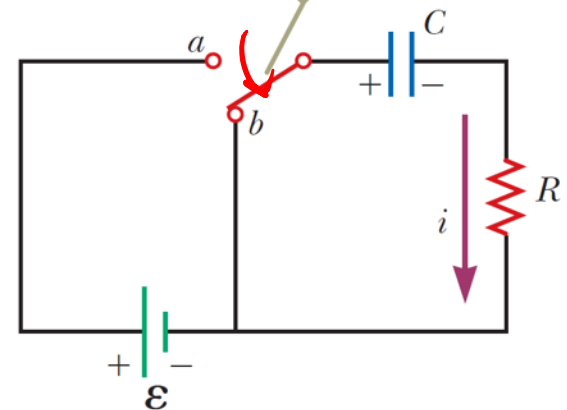
- Έστω ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος
- Στα άκρα του θα έχει μια διαφορά δυναμικού

$$\Delta V = Q_i / C$$

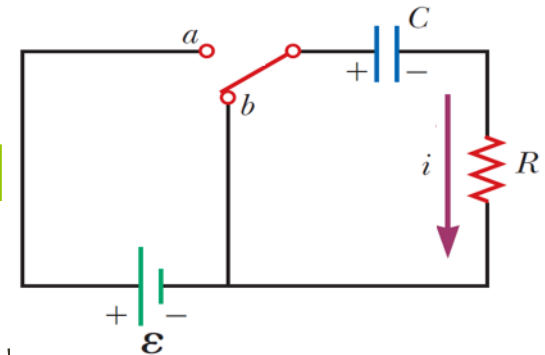
- Ο αντιστάτης έχει μηδενική διαφορά δυναμικού, αφού δεν υπάρχει πλέον ροή ρεύματος
- Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$, κλείσουμε το διακόπτη στη θέση b, τότε ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί μέσω του αντιστάτη
- Έστω μια χρονική στιγμή t
 - Ο πυκνωτής θα έχει φορτίο q
 - Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι i

$Q_i = \text{αρχικό φορτίο}$

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση b, ο πυκνωτής εκφορτίζεται.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- **Εκφόρτιση πυκνωτή**

- Από το 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα, έχουμε

$$-\frac{q}{C} - iR = 0$$

- Ξανά, θέτοντας $i = \frac{dq}{dt}$, έχουμε

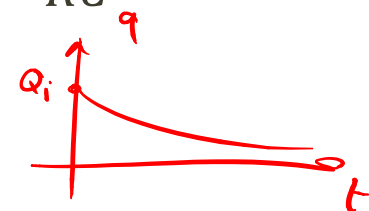
$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{Q_i}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \leftrightarrow \ln\left(\frac{q}{Q_i}\right) = -\frac{t}{RC}$$

- Άρα

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Εκφόρτιση πυκνωτή**

- Παραγωγίζοντας τη σχέση

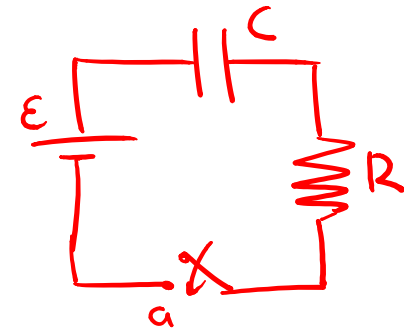
$$q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$

ως προς το χρόνο, έχουμε

$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-t/RC}$$

- Το παραπάνω αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που είχε όταν ο πυκνωτής φορτιζόταν

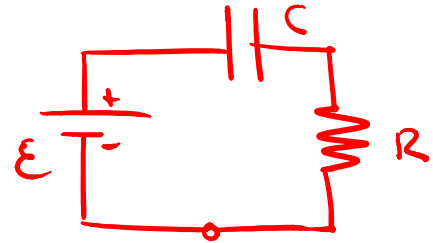
Ηλεκτρικά Κυκλώματα



● Παράδειγμα:

- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\epsilon = 12 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 8 \times 10^5 \Omega$. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ , το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\varepsilon = 12 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 8 \times 10^5 \Omega$. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ , το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

$$\tau = RC = 8 \cdot 10^5 \Omega \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 40 \cdot 10^{-1} \text{ s} = 4 \text{ s}$$

$$Q = C\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 60 \cdot 10^{-6} = 60 \mu\text{C}$$

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12}{8 \cdot 10^5} = \frac{3}{2} \cdot 10^{-5} = 1.5 \cdot 10^{-5} = 15 \mu\text{A}$$

$$q(t) = Q(1 - e^{-t/RC}) = 60(1 - e^{-\frac{t}{4}})$$

$$i(t) = I_i e^{-t/RC} = 15 \cdot e^{-t/4}$$

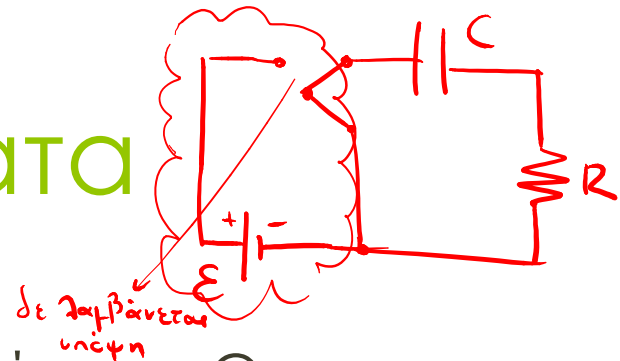
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής;

B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής της τιμής;



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής;

Ξέραμε ότι $q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{RC}}$, για να έχουμε τιμή ίση με το $\frac{1}{4}$

του αρχικά φορτίου (Q_i), θα πρέπει:

$$\frac{1}{4} Q_i = Q_i e^{-t/RC} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-t/RC} \Rightarrow \ln \frac{1}{4} = \ln e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 1 - \ln 4 = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln 4 = \frac{t}{RC} \Rightarrow \ln 4 = \frac{t}{\tau} \Rightarrow \boxed{t = \tau \cdot \ln 4}$$

Άρα σε $\ln 4$ χρονικές σταθερές θα έχουμε $\frac{1}{4}$ αρχικά φορτίου.

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.
B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το $1/4$ της αρχικής της τιμής;

$$\text{Ξέρουμε } U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \left(\frac{1}{2} \frac{Q_i^2}{C} \right) \Rightarrow \text{αρχική ενέργεια}$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2(t) = \frac{1}{2C} (Q_i \cdot e^{-t/RC})^2 = \frac{1}{2C} Q_i^2 e^{-2t/RC}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{Q_i^2}{C} = \frac{1}{2C} \frac{Q_i^2}{C} e^{-2t/RC} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-2t/RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 4 = \frac{2t}{RC} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\tau}{2} \cdot \ln 4}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας $C = 5 \mu\text{F}$ φορτίζεται υπό διαφορά δυναμικού $\Delta V = 800 \text{ V}$ και μετά εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη. Πόση ενέργεια αποδίδεται στον αντιστάτη στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής?

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

$$\Delta V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

• Παράδειγμα – Λύση:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας $C = 5 \mu\text{F}$ φορτίζεται υπό διαφορά δυναμικού $\Delta V = 800 \text{ V}$ και μετά εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη. Πόση ενέργεια αποδίδεται στον αντιστάτη στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής?

Θεωράμε το κυκλώμα ως σύστημα, το οποίο είναι κλειστό.

$$\begin{aligned} \text{ΑΔΕ : } \Delta U + \Delta E_{\text{int}} &= 0 \Leftrightarrow U_T - U_A + E_{\text{int}}^T - E_{\text{int}}^A = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 + E_{\text{int}}^T - 0 &\Rightarrow E_{\text{int}} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \\ &= 1.6 \text{ J} \end{aligned}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

$$\Delta V = \int \epsilon \, dl$$

• Παράδειγμα – Λύση:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας $C = 5 \mu\text{F}$ φορτίζεται υπό διαφορά δυναμικού $\Delta V = 800 \text{ V}$ και μετά εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη. Πόση ενέργεια αποδίδεται στον αντιστάτη στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής?

Ευαγγελικά, παρατηρούμε ότι καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω του αντιστάτη, ο ρυθμός απόδοσης ενέργειας στον αντιστάτη είναι $I^2 R$.

$$\begin{aligned} \text{Όμως ρυθμός απόδοσης ενέργειας} &= \text{ισχύς!} \quad P = \frac{dE}{dt} \Rightarrow E = \int_0^{+\infty} P(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} i^2(t) R dt = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{Q}{RC} e^{-t/RC} \right)^2 R dt = \frac{Q^2}{RC^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \\ &= \frac{\epsilon^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{\epsilon^2}{R} \left(-\frac{RC}{2} \right) e^{-\frac{2t}{RC}} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{\epsilon^2 C}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2} \epsilon^2 C \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με πριν!



Τέλος Διάλεξης
