



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». © (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός
Ηλεκτρικά Πεδία



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». © (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός
Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρικά Πεδία

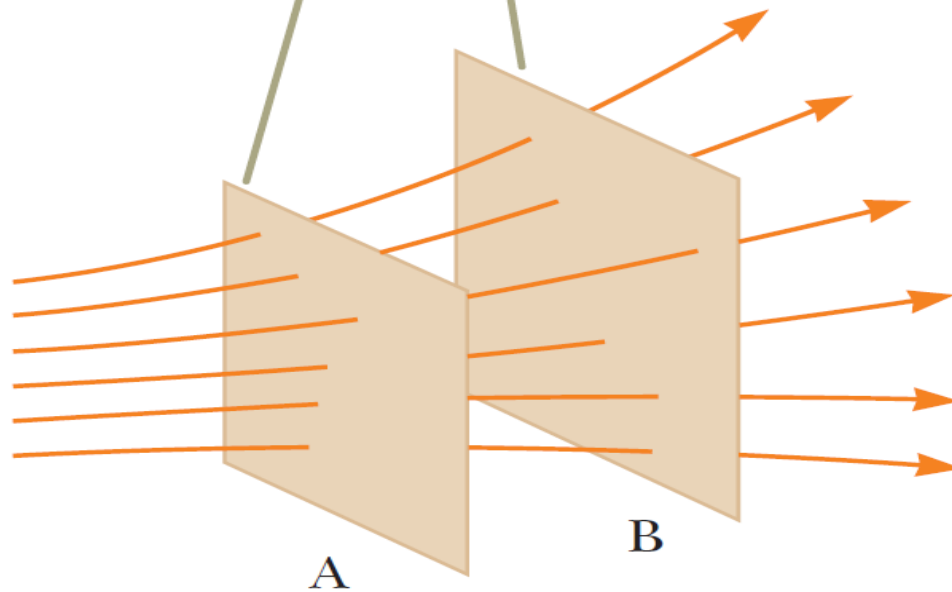
• Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

- Δεν μπορούμε να δούμε ένα ηλεκτρικό πεδίο
- Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης είναι οι **δυναμικές γραμμές** ηλεκτρικού πεδίου
 - Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} είναι εφαπτόμενο σε μια δυναμική γραμμή που διέρχεται από κάθε σημείο
 - Η κατεύθυνση της γραμμής είναι όμοια με της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται στο πεδίο
 - Ο αριθμός των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας διαμέσου μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου
 - Με άλλα λόγια, οι δυναμικές γραμμές είναι πιο πυκνές όπου η ένταση του πεδίου είναι μεγαλύτερη

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη στην επιφάνεια A από ότι στην επιφάνεια B.



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

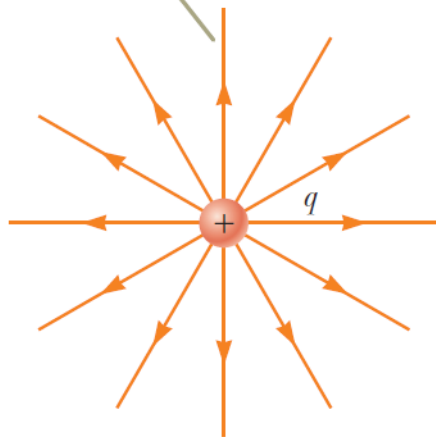
◉ Πώς τις σχεδιάζουμε;

- ◉ Οι γραμμές πρέπει να ξεκινούν από θετικό φορτίο και να καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο. Αν υπάρχει πλεόνασμα κάποιου φορτίου, τότε οι δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν ή θα τελειώνουν απειροστά μακριά.
- ◉ Ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή πλησιάζουν ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογη του μέτρου του φορτίου.
- ◉ Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται.

Ηλεκτρικά Πεδία

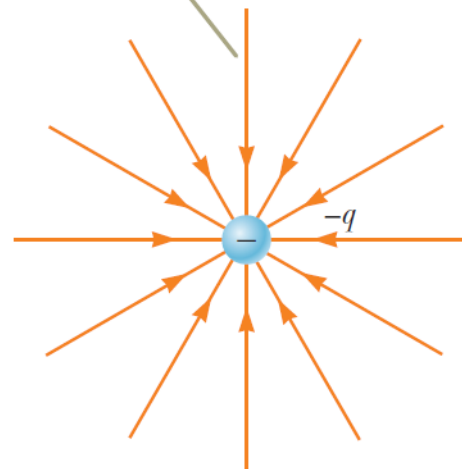
ο Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Για ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα έξω.



a

Για ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα μέσα.

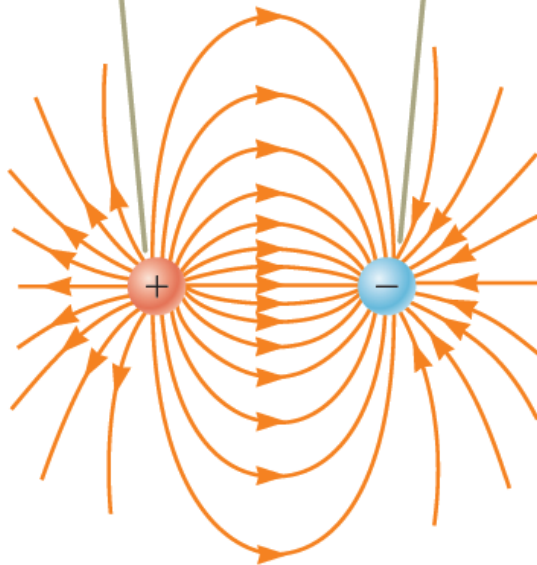


b

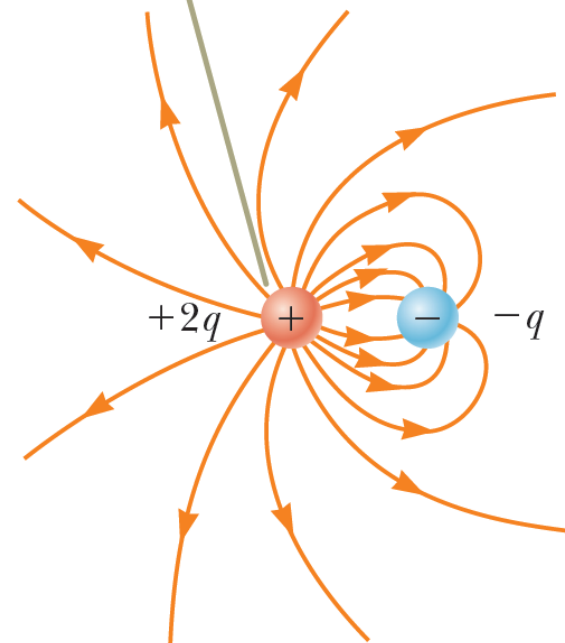
Ηλεκτρικά Πεδία

• Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν από το θετικό φορτίο ισούται με τον αριθμό γραμμών που φθάνουν στο αρνητικό φορτίο.



Δυο δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το $+2q$ για κάθε μια που τερματίζει στο $-q$.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Κίνηση σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο**

- Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q

- Ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}

- Επιταχυνόμενη κίνηση λόγω ηλεκτρικής δύναμης

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = ma \rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

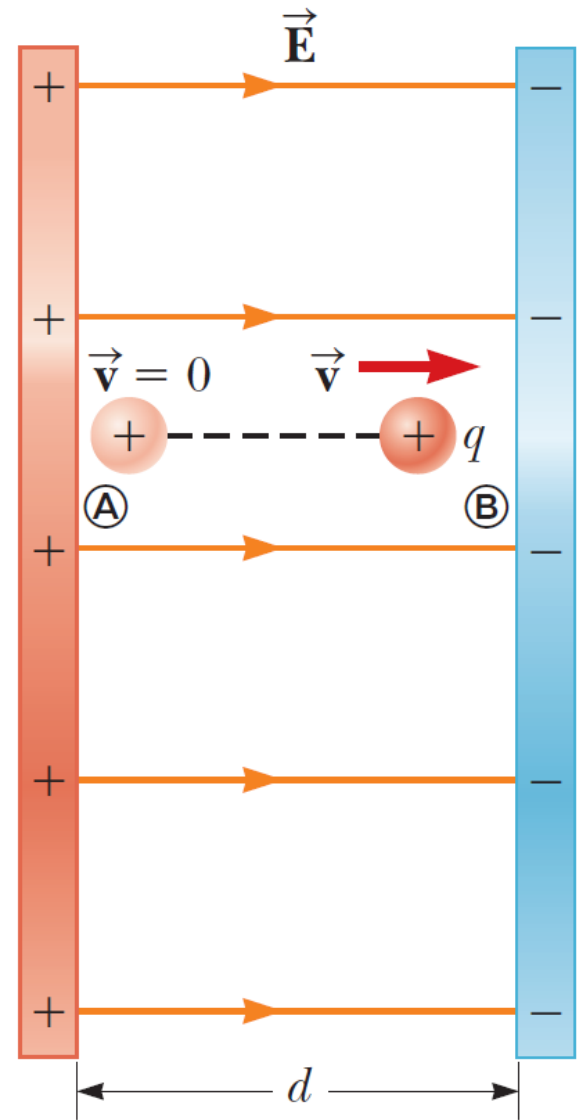
- Αν το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο, η κίνησή του είναι προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου

- Αλλιώς, η κίνηση είναι αντίθετη της κατεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου

Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} με κατεύθυνση επάνω στο x -άξονα ανάμεσα σε δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες που απέχουν απόσταση d , όπως στο σχήμα. Σωματίδιο φορτίου $+q$ μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.
A) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση B.
B) Υπολογίστε το A) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Σωματίδιο φορτίου $+q$ μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.

A) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση B.

Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στο x -άξονα.

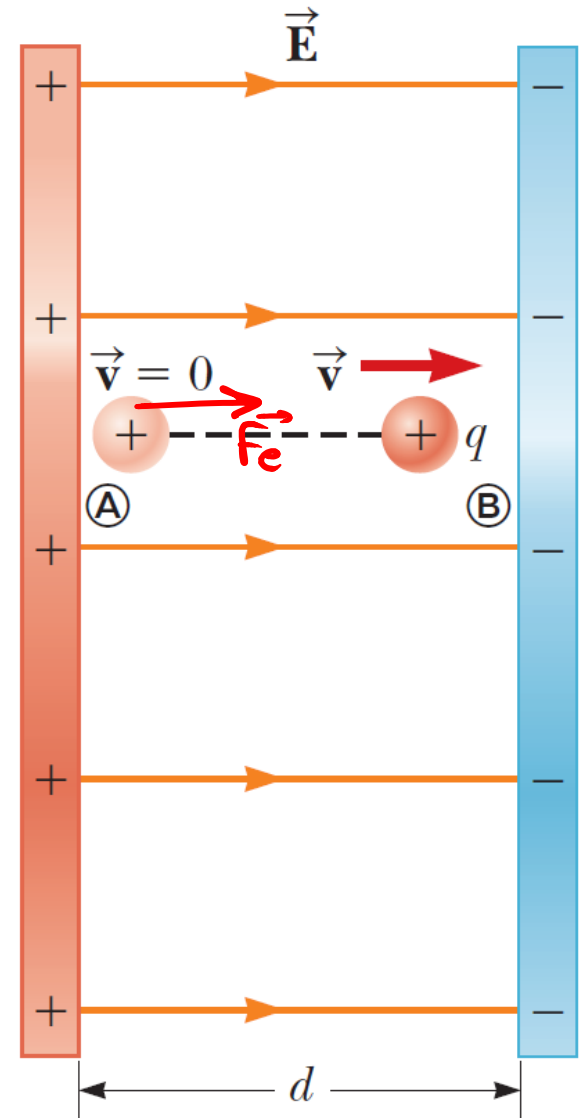
Άρα

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a\Delta x = 0 + 2ad$$
$$= 2ad$$

$$u_B = \sqrt{2ad}$$

$$\text{Όμως } \Sigma \vec{F}_x = m\vec{a} \Rightarrow F_e = ma \Leftrightarrow qE = ma \quad \left. \vphantom{\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα - Λύση:

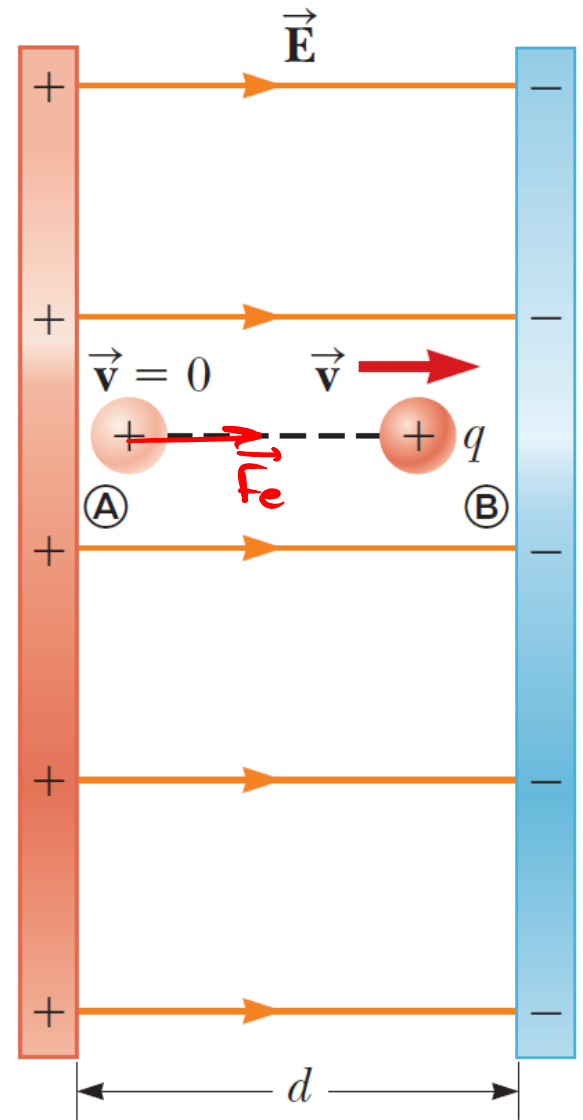
- ◉ Σωματίδιο φορτίου $+q$ μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.
- B) Υπολογίστε το A) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.

Σύστημα: σωματίδιο, \vec{F}_e εξωτερική δύναμη

$$\text{ΘΜΚΕ: } \Delta K_{A \rightarrow B} = W_{F_e} \Rightarrow K_B - K_A = W_{F_e} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_B = F_e \cdot d \Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = q E d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_B^2 = \frac{2qEd}{m} \Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα:

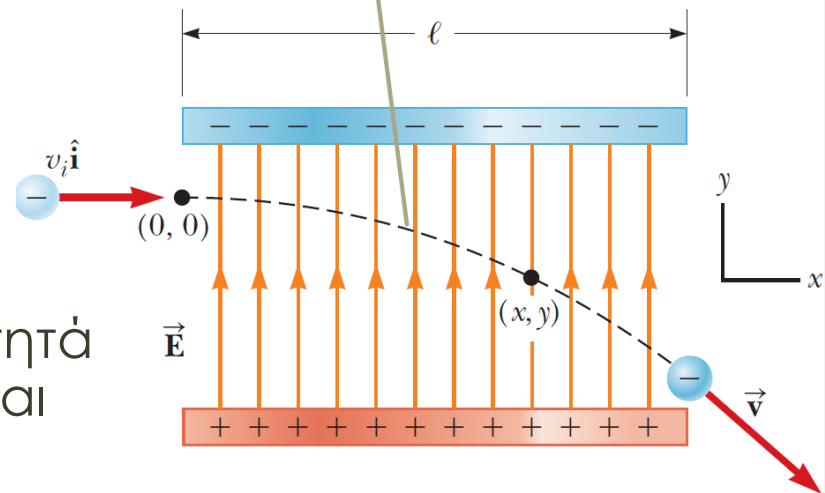
- ◉ Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο σχήμα. Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.

A) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

B) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

Γ) Υποθέτοντας ότι η y -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα - Λύση:

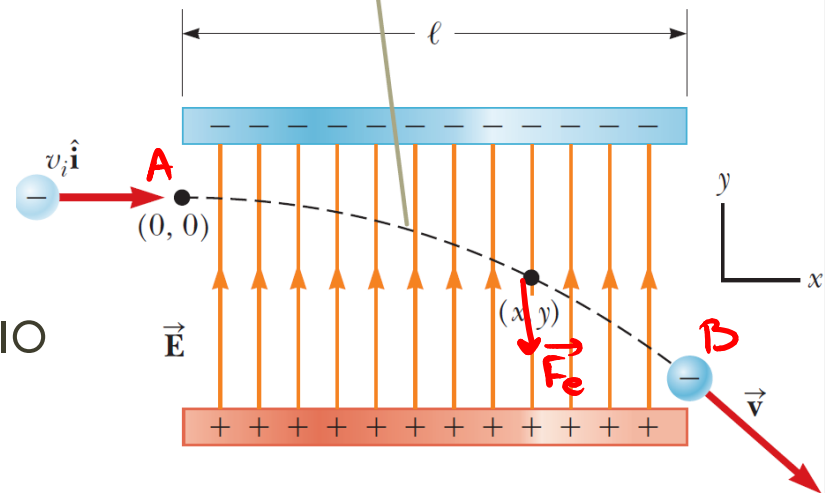
- ◉ Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.

A) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

Το σωματίδιο εκτελεί ελεύθερη ομαλά επιταχ. κίνηση στον y -άξονα.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \sum \vec{F}_y = m \vec{a}_y &\Rightarrow -F_e = m a_y \Rightarrow a_y = -\frac{F_e}{m} = -\frac{qE}{m} \\ &= -\frac{eE}{m} = -3.5 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα - Λύση:

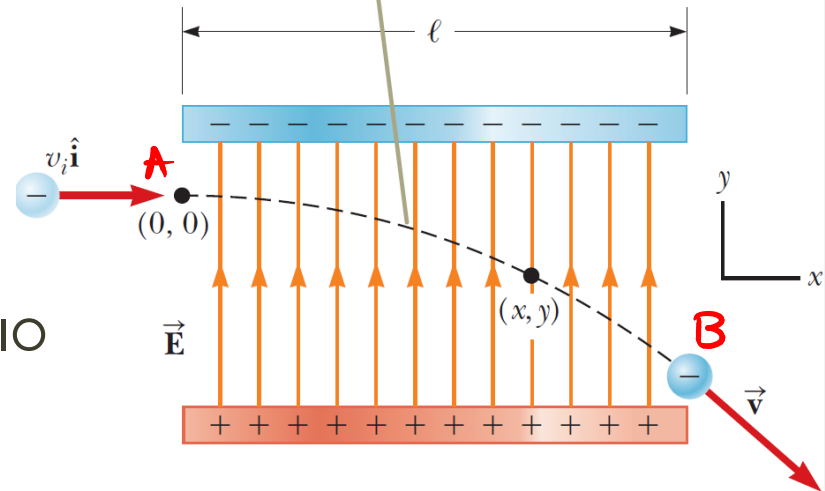
- ◉ Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.

Β) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

Στο x -άξονα, το σωματίδιο εκτελεί ευθ. ομαλή κίνηση:

$$\text{Άρα } x_B = x_A + u_x t \Rightarrow t = \frac{\Delta x}{u_x} = \frac{l}{u_x} = 3.3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα - Λύση:

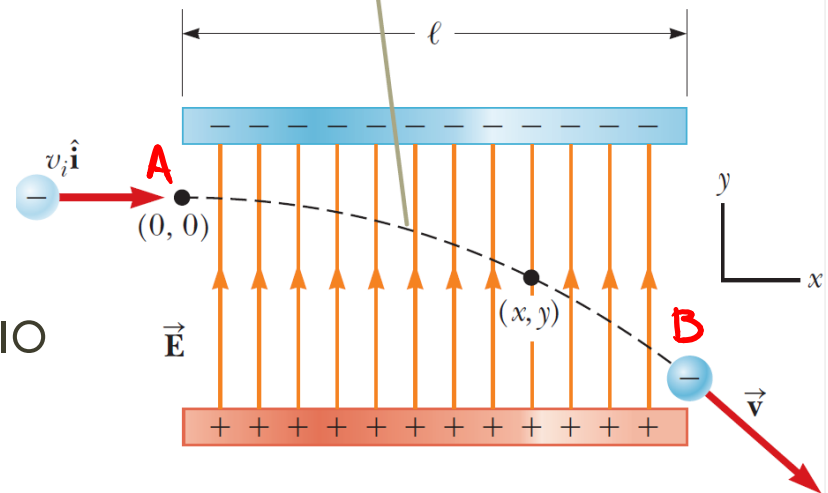
- ◉ Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.

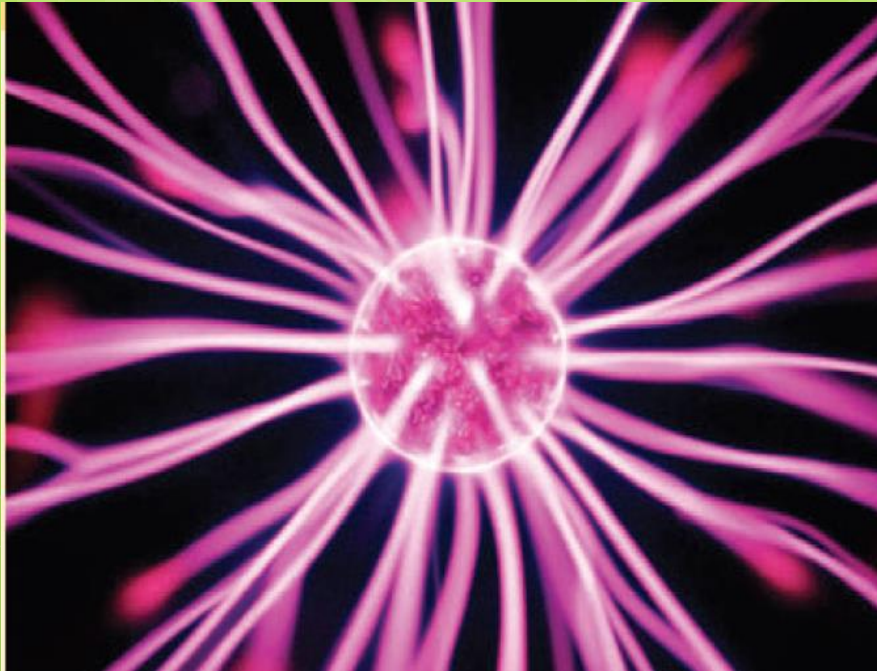
Γ) Υποθέτοντας ότι η y -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Στον y -άξονα, το σωματίδιο εκτελεί εω.εφω. επιταχ. κίνηση.

$$\begin{aligned} \text{-Άρα} \quad y_0 &= y_A + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_{y_i} t^2 = 0 + 0 - \frac{1}{2} \left(-\frac{eE}{m} \right) \left(\frac{\Delta x}{u_x} \right)^2 \\ &= -0.0195 \text{ m} \end{aligned}$$

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

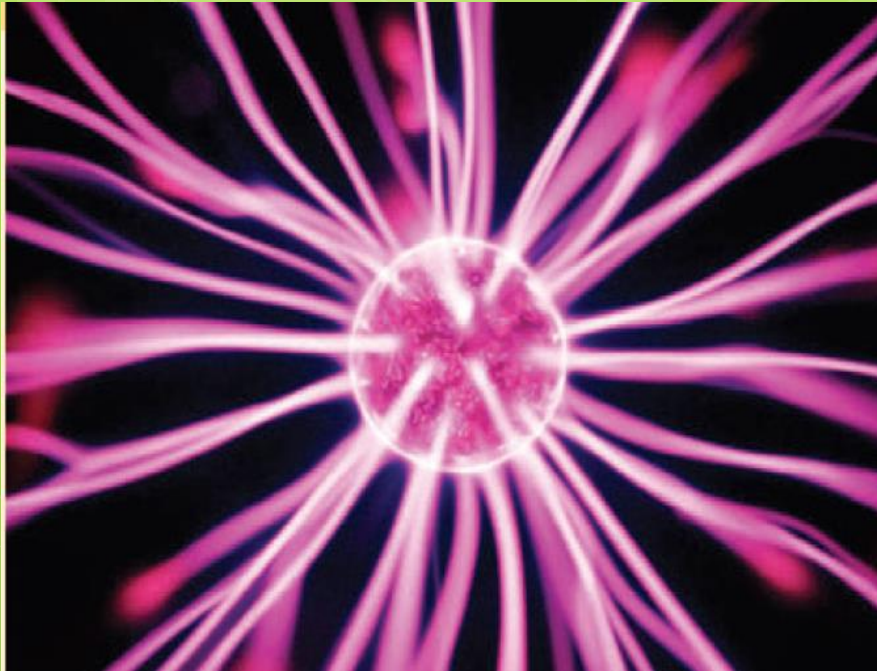




Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss



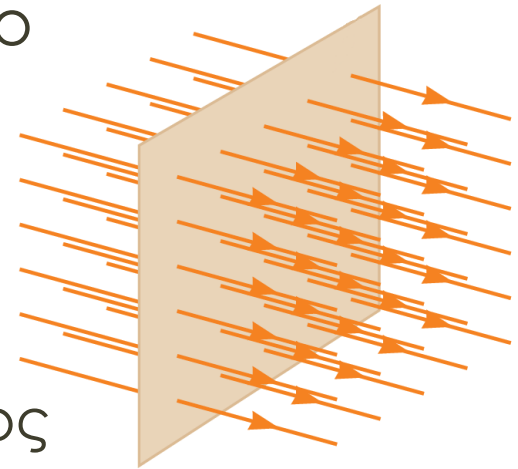
Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

- Ως τώρα, θεωρήσαμε το φαινόμενο των δυναμικών γραμμών ποιοτικά
- Τώρα, θα το μελετήσουμε πιο «ποσοτικά»
- Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
 - Οι δυναμικές γραμμές περνούν κάθετα την επιφάνεια εμβαδού A
 - θυμηθείτε: πυκνότητα γραμμών ανάλογη του μέτρου του πεδίου
 - Ο αριθμός γραμμών είναι ανάλογος του γινομένου EA
 - Αυτό το γινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ροή** Φ_E



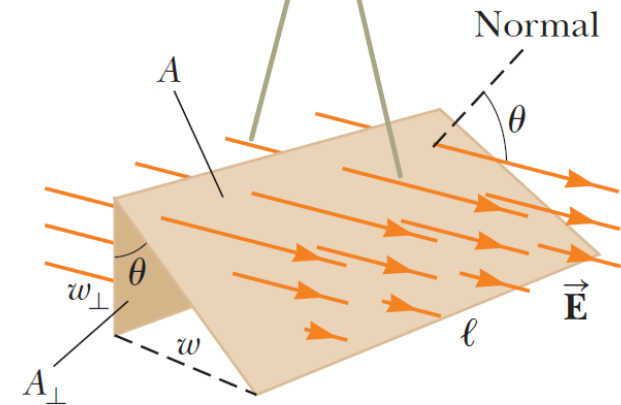
Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Αν η επιφάνεια δεν είναι κάθετη τότε η ηλεκτρική ροή δίνεται ως
$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos(\theta)$$

- Επίσης, το πεδίο μπορεί να μην είναι ομογενές.
 - Μπορεί να μεταβάλλεται με την απόσταση ή με την επιφάνεια
- Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα για μικρές επιφάνειες με σταθερό ηλεκτρικό πεδίο

Ο αριθμός των γραμμών που περνούν από την επιφάνεια A_{\perp} είναι ο ίδιος με τον αριθμό των γραμμών που περνούν από την επιφάνεια A .



Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

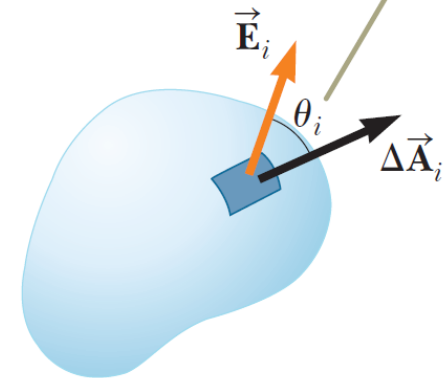
- Μια γενική επιφάνεια μπορεί να χωριστεί σε πολύ μικρά στοιχεία επιφάνειας καθένα με εμβαδό ΔA

- Ας ορίσουμε το διάνυσμα $\Delta \vec{A}_i$ του οποίου το μέτρο ισούται με το εμβαδόν του i -οστού στοιχείου

- Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο στοιχείο εμβαδού ΔA_i της επιφάνειας

- Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι \vec{E}_i στη θέση αυτή και σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta \vec{A}_i$

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta \vec{A}_i$, που ορίζεται ως κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας.



Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια αυτή είναι

$$\Phi_{E_i} = E_i \Delta A_i \cos(\theta_i)$$

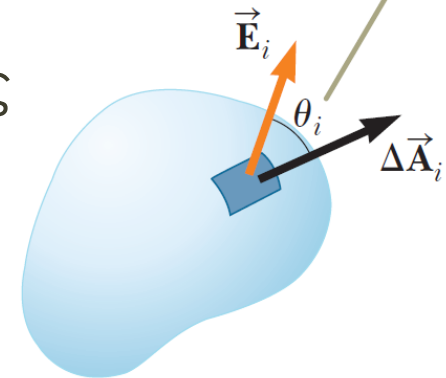
- Το παραπάνω μπορεί να γραφεί ως

$$\Phi_{E_i} = \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

- που είναι το γνωστό μας εσωτερικό γινόμενο
- Αθροίζοντας την ηλεκτρική ροή για κάθε μικρό στοιχείο

$$\Phi_E = \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta \vec{A}_i$, που ορίζεται ως κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας.



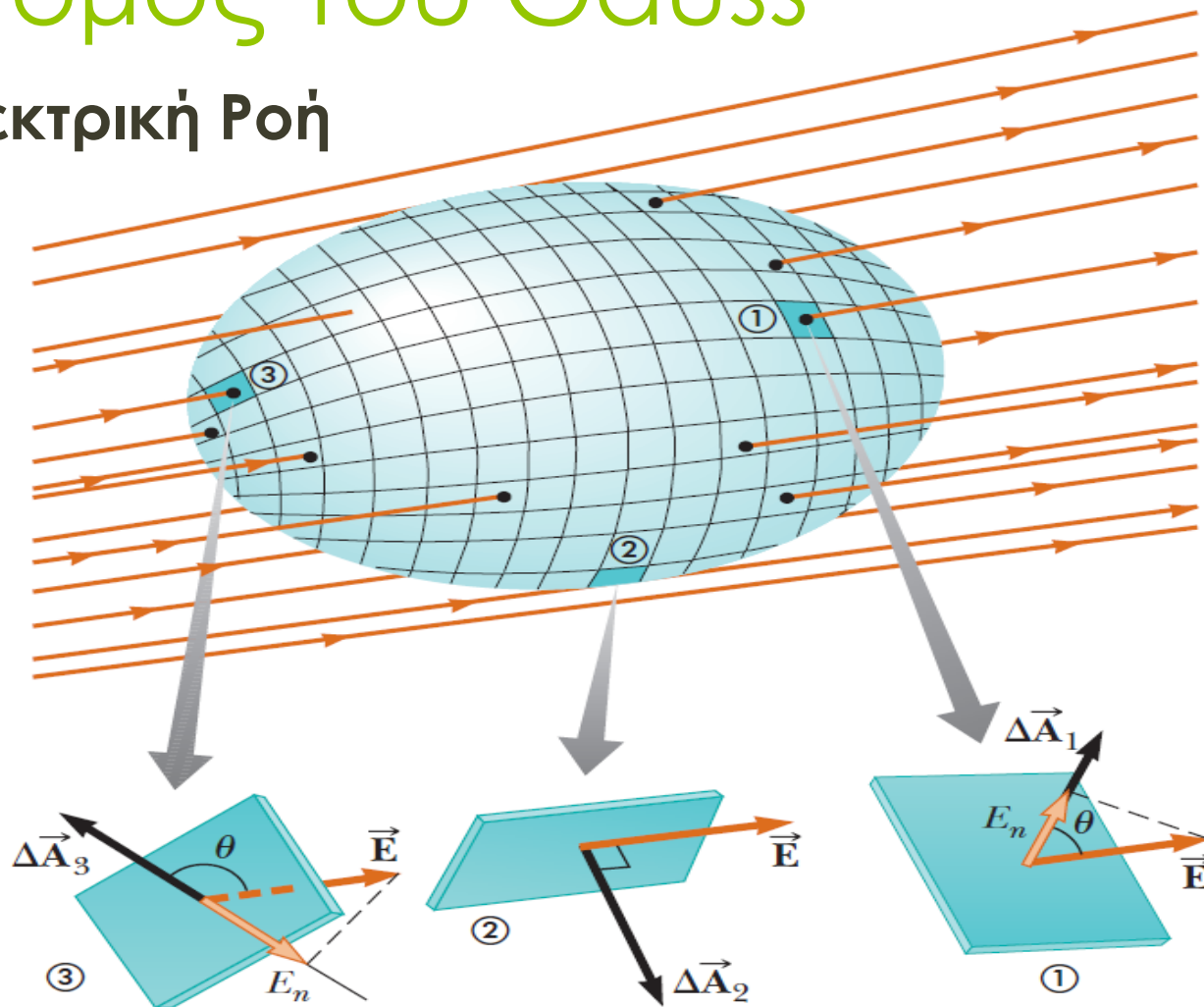
Ο νόμος του Gauss

● Ηλεκτρική Ροή

- Μας ενδιαφέρουν οι κλειστές επιφάνειες για τον υπολογισμό της ροής
- Μια κλειστή επιφάνεια χωρίζει το χώρο σε μια εσωτερική και μια εξωτερική περιοχή, χωρίς να μπορεί κάποιος να κινηθεί από τον ένα χώρο στον άλλο χωρίς να διασχίσει την επιφάνεια του χώρου
 - Π.χ. η επιφάνεια μιας σφαίρας
- Ας δούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις

Ο νόμος του Gauss

- Ηλεκτρική Ροή



Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**

- Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια

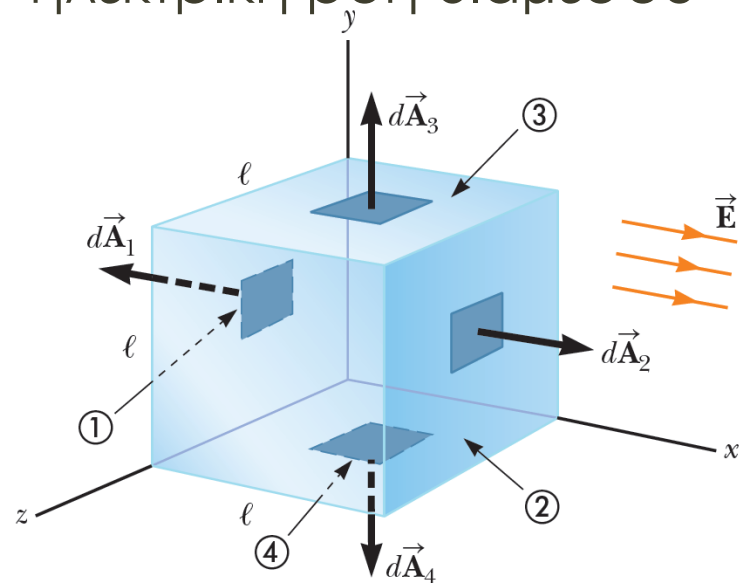
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

με E_n τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια

Ο νόμος του Gauss

- Παράδειγμα:

- Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} με προσανατολισμό στο x-άξονα του χώρου. Ένας κύβος με μήκος ακμής l τοποθετείται στο πεδίο, όπως στο σχήμα. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.

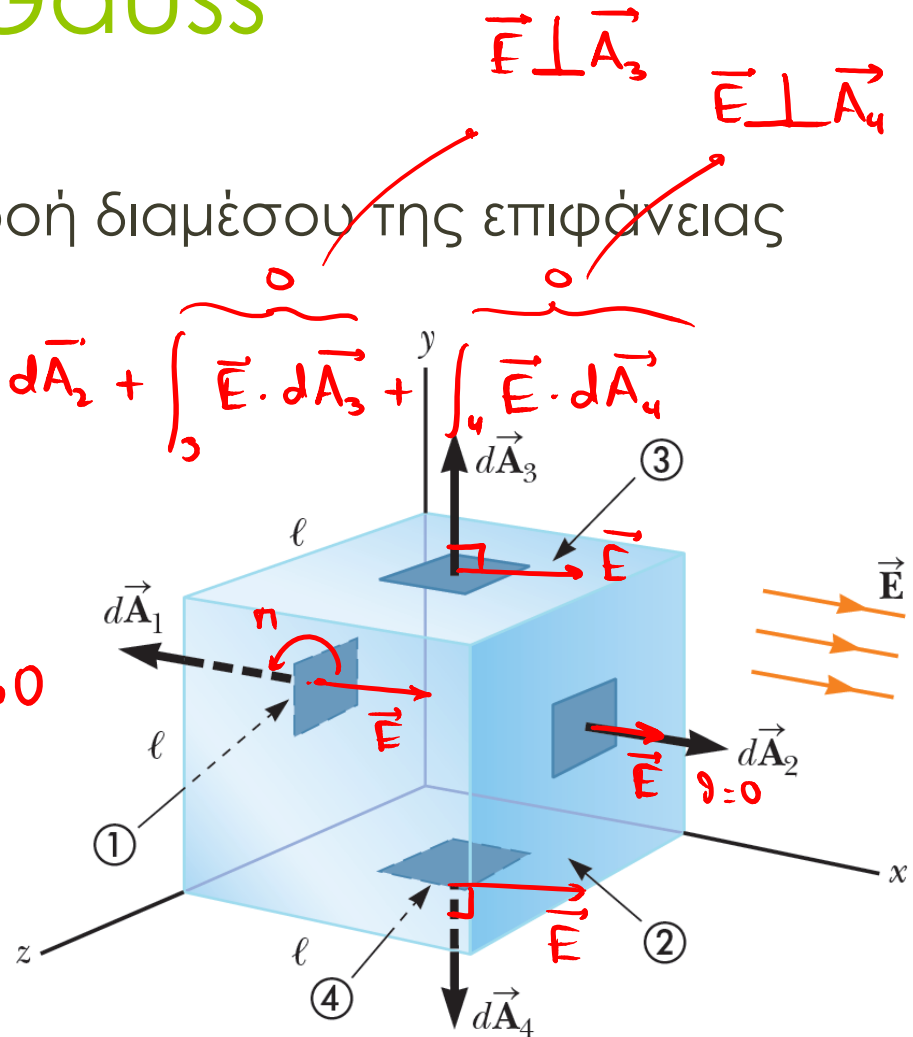


Ο νόμος του Gauss

● Παράδειγμα - Λύση:

- Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 + \int_4 \vec{E} \cdot d\vec{A}_4 \\ &= \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 \\ &= \int_1 E dA_1 \cos(\eta) + \int_2 E dA_2 \cos 0 \\ &= -E \int_1 dA_1 + E \int_2 dA_2 \\ &= -E \cdot \ell^2 + E \ell^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi_E = 0\end{aligned}$$



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**

- Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια και του φορτίου που περικλείεται σε αυτήν;

- Η απάντηση είναι ΝΑΙ, και αυτή η σχέση ονομάζεται **νόμος του Gauss**

- Είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη ηλεκτρικών πεδίων

- Η κλειστή επιφάνεια λέγεται πολλές φορές και γκαουσιανή (Gaussian)

Ο νόμος του Gauss

● Ο νόμος του Gauss

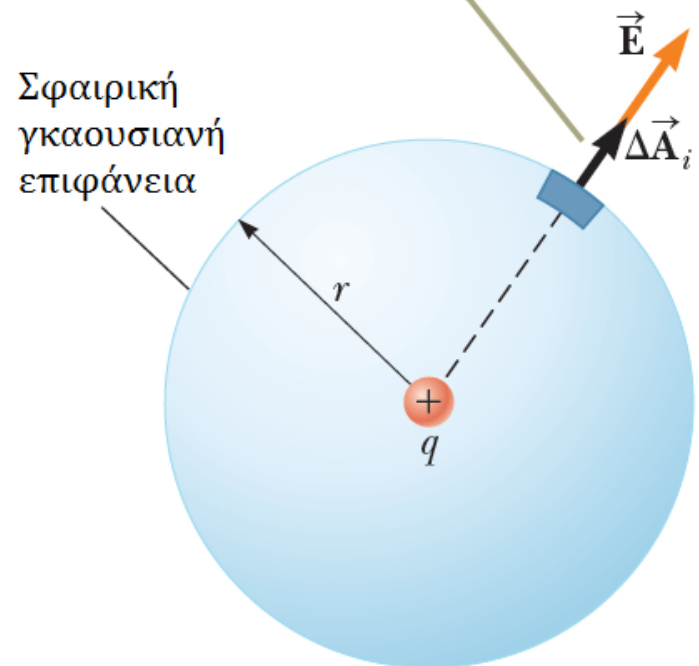
- Έστω ένα θετικό φορτίο q στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r
- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

- Οι δυναμικές γραμμές είναι παντού κάθετες στην επιφάνεια της σφαίρας
 - Άρα το ηλ. πεδίο \vec{E} είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\Delta\vec{A}$
- Άρα η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

Όταν το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια και σταθερό σε μέτρο.



Ο νόμος του Gauss

- Ο νόμος του Gauss

$$\Phi_E = E \oint dA = k_e \frac{q}{r^2} (4\pi r^2)$$

$$= 4\pi k_e q$$

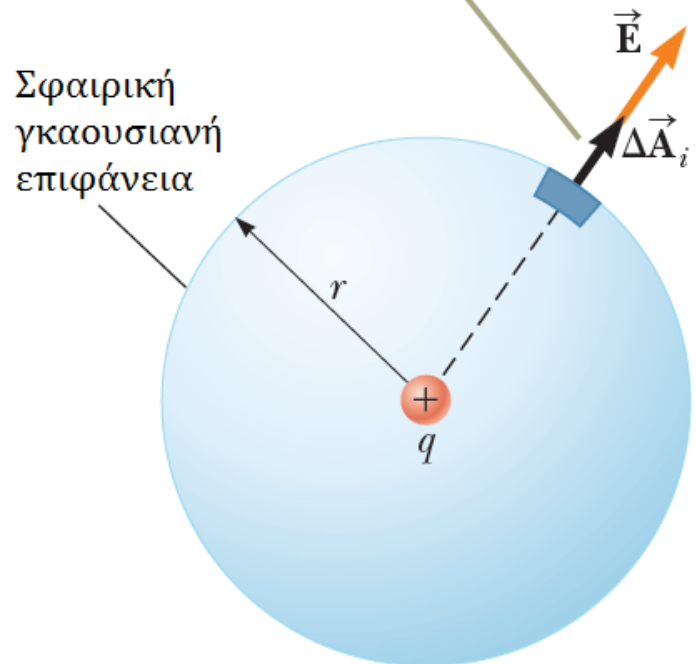
γιατί η επιφάνεια είναι σφαιρική

- Όμως $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$

- Άρα τελικά

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Όταν το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια και σταθερό σε μέτρο.

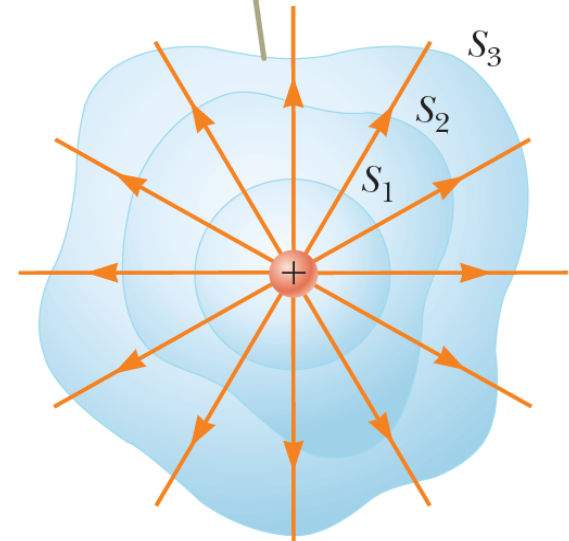


Ο νόμος του Gauss

• Ο νόμος του Gauss

- Και τι θα συμβεί αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική;
- Είπαμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που περνούν μέσα από μια επιφάνεια
- Το σχήμα δείχνει ότι ο αριθμός αυτός είναι ίδιος σε όλες τις επιφάνειες!
- Η S_1 είναι σφαιρική, άρα $\Phi_E = q/\epsilon_0$
- Άρα **η ηλεκτρική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο q είναι $\Phi_E = q/\epsilon_0$ και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.**

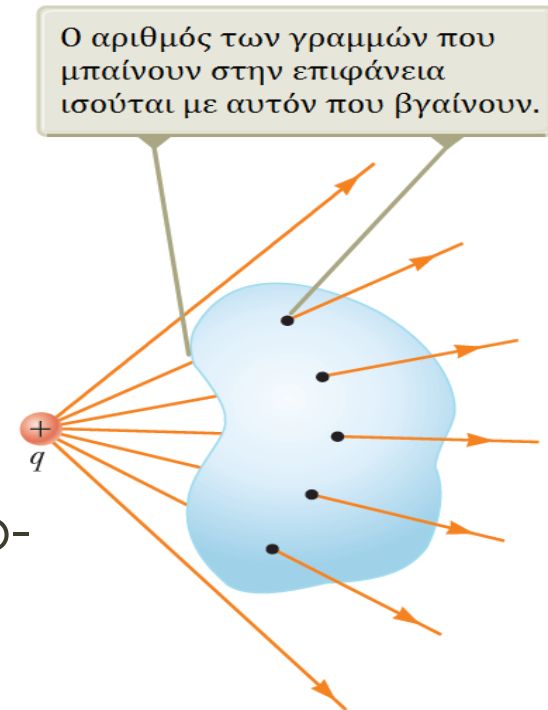
Η ηλεκτρική ροή είναι η ίδια διαμέσου όλων των επιφανειών.



Ο νόμος του Gauss

• Ο νόμος του Gauss

- Και τι θα συμβεί το φορτίο είναι έξω από την επιφάνεια;
- Κάθε δυναμική γραμμή που εισέρχεται στην επιφάνεια βγαίνει από κάποιο άλλο μέρος της
- Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν ισούται με αυτόν που βγαίνουν
- Άρα η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας που **δεν** περιέχει φορτίο είναι **μηδέν!**





Τέλος
Διάλεξης