



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Επανάληψη...

- Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση που αυτό εκτελεί λέγεται **Απλή Αρμονική Κίνηση**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Επανάληψη...

- Συχνότητα ταλάντωσης:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ονομάζεται **γωνιακή συχνότητα**

- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Συχνότητα (σε Hertz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

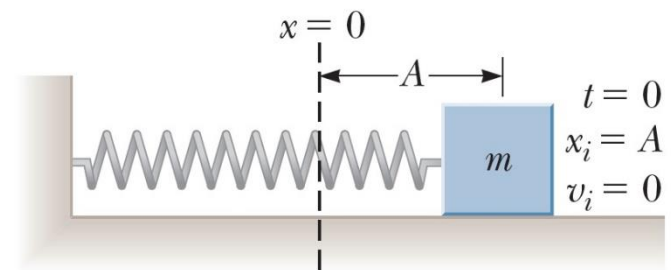
- Σχέση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
 - ◉ Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
 - ◉ Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
 - ◉ Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
 - ◉ Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

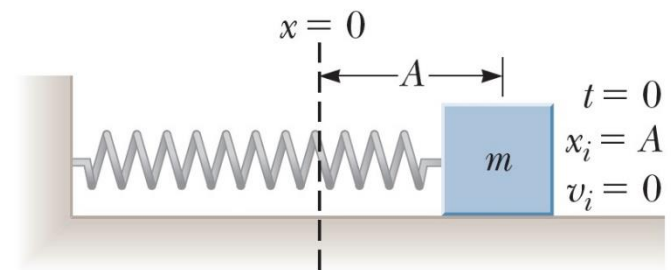


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
 - ◉ Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{50}} \text{ sec}$$

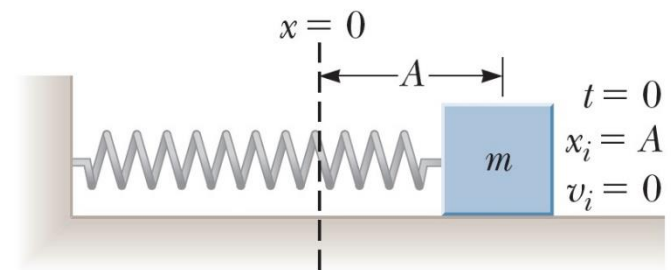


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
- ◉ Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

$$v_{\max} = \omega A = 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

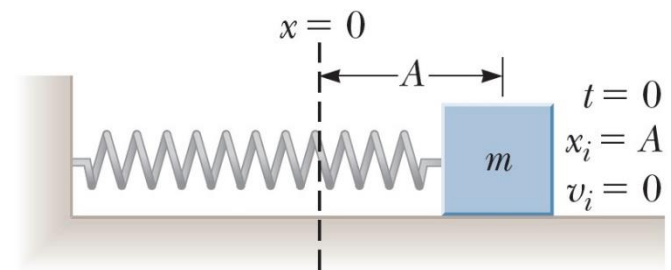


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
- ◉ Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

$$a_{max} = \omega^2 A = 1.25 \frac{m}{s^2}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

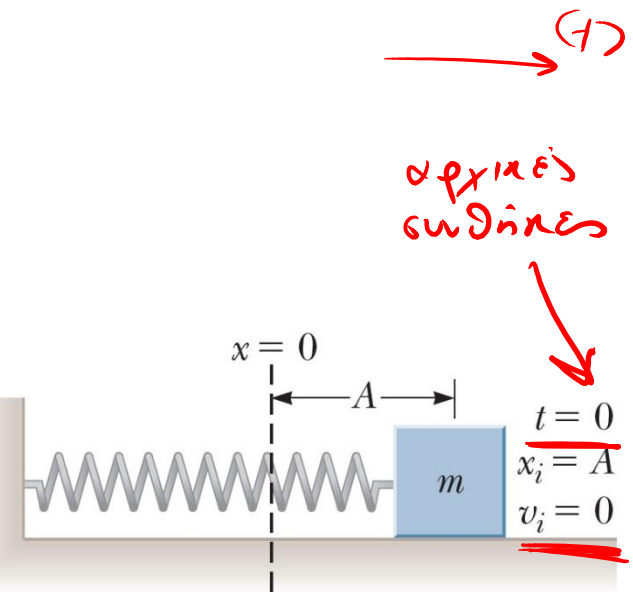
- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

- ◉ Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ x(0) &= A \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \cos(0 + \varphi) &= A \Leftrightarrow A \cos \varphi = A \Rightarrow \varphi = 0 \\ (u(0) &= -\omega A \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.05 \cos(5t), \quad u(t) = -0.25 \sin(5t) \\ a(t) &= -1.25 \cos(5t). \end{aligned}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**

- **Κινητική Ενέργεια:**

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

- **Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:**

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

- Παρατηρήστε ότι είναι πάντα θετικές!

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

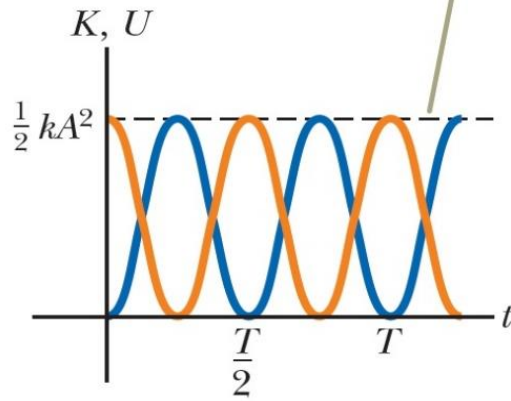
- Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή
 - Μηχανική Ενέργεια $K + U$

Το άθροισμα $K + U$ είναι σταθερό και στα δυο γραφήματα

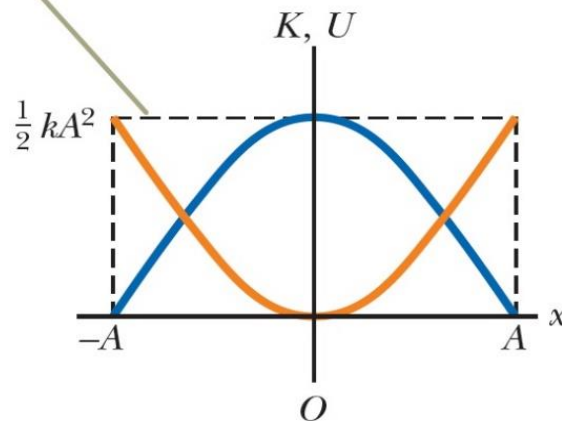
$$E_{\text{mech}} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

— U — K

— $U = \frac{1}{2}kx^2$ — $K = \frac{1}{2}mv^2$



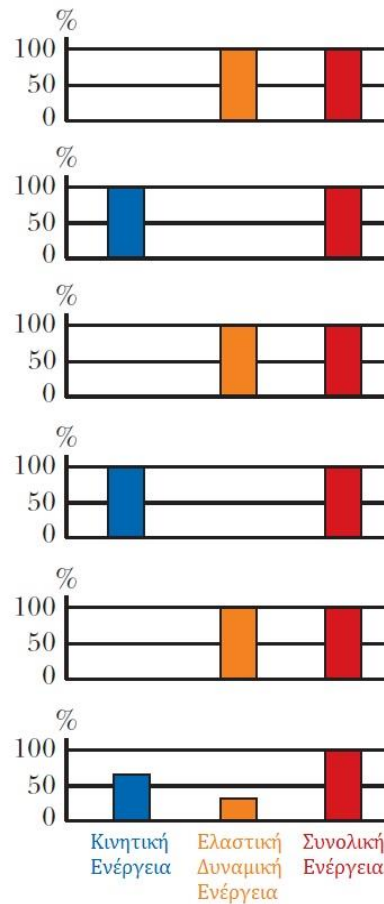
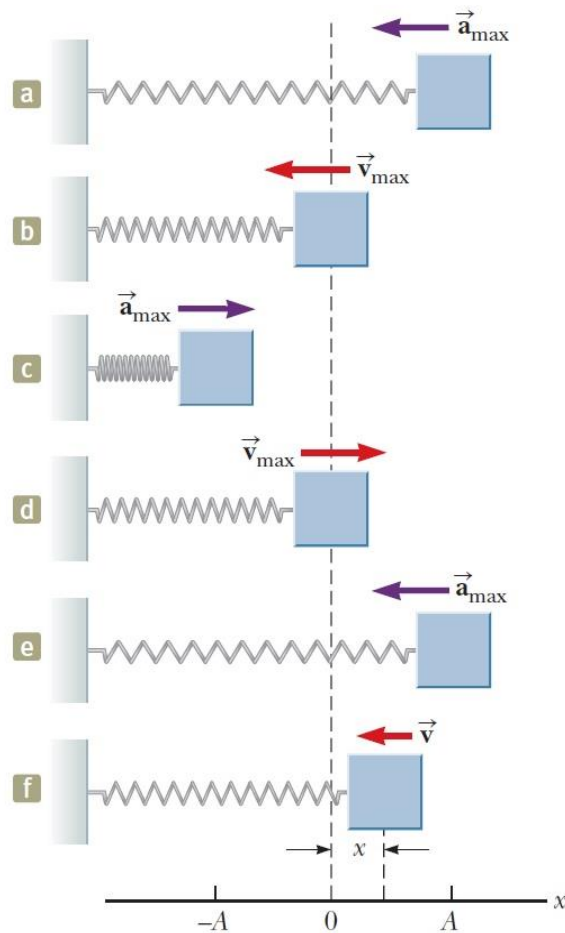
a



b

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

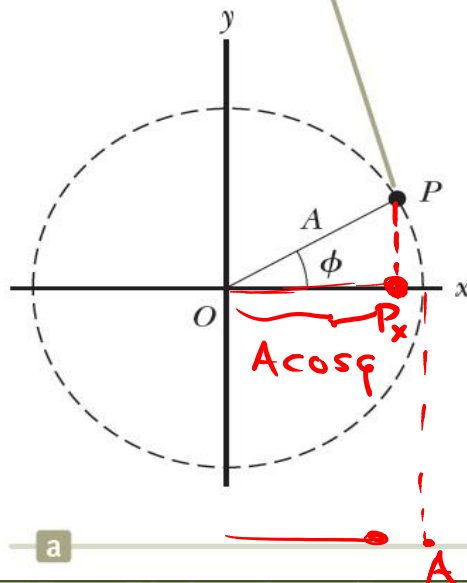


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

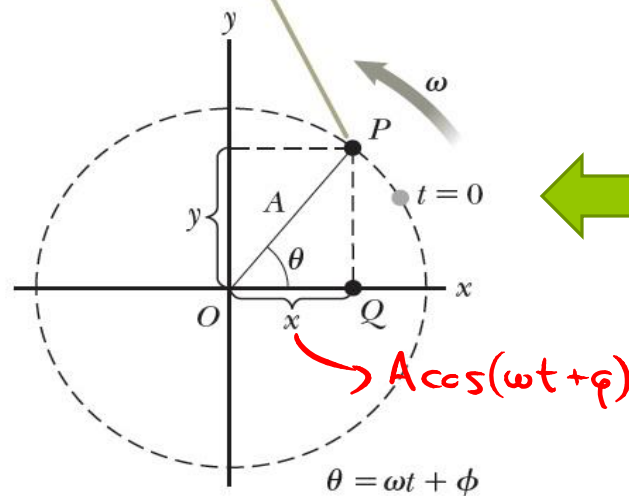
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

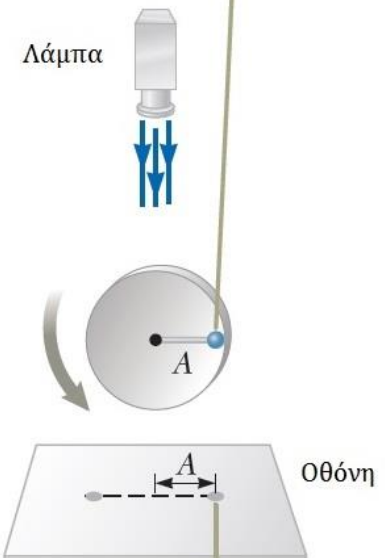
Ένα σώμα βρίσκεται στο σημείο P όταν $t=0$.



Λίγο αργότερα, τη χρονική στιγμή t , οι x-συνιστώσες των σημείων P και Q είναι ίσες.



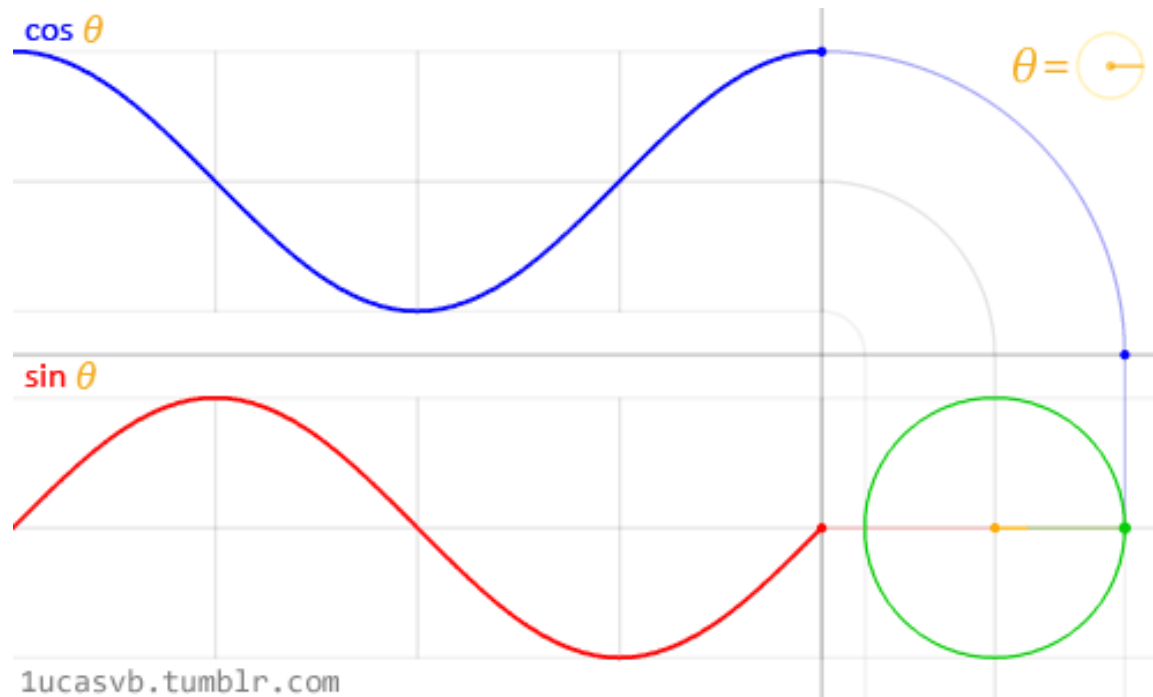
Η μπίλια γυρίζει και συμπεριφέρεται ως σωματίδιο σε ομοιόμορφη κυκλική κίνηση.



Η σκιά της μπάλας κινείται όπως ένα σωματίδιο σε απλή αρμονική κίνηση.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Όταν η γωνία θ είναι $< 10^\circ$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

$$F_{\varepsilon\pi} = ma \leftrightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Επειδή $s = L\theta$,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \approx -\frac{g}{L} \theta$$

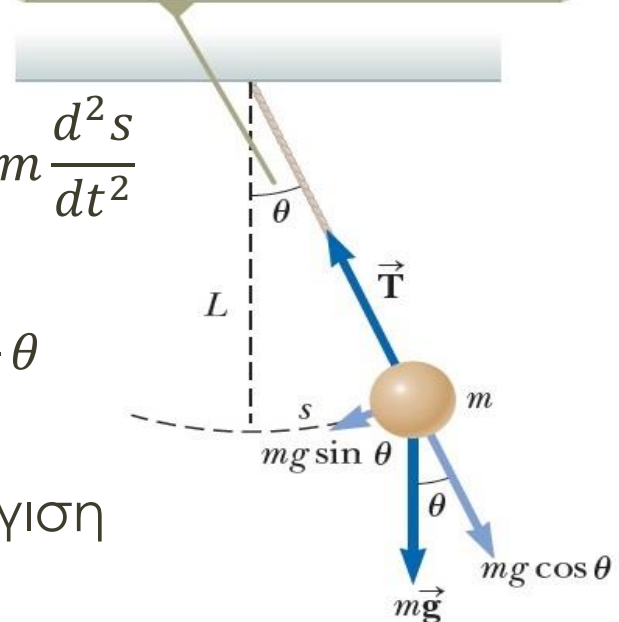
όταν θ μικρό.

- Εδώ χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

για μικρές τιμές του θ (σε rad)

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
- Θυμηθείτε για το ελατήριο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!! 😊
 - Άρα το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για μικρό θ !

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

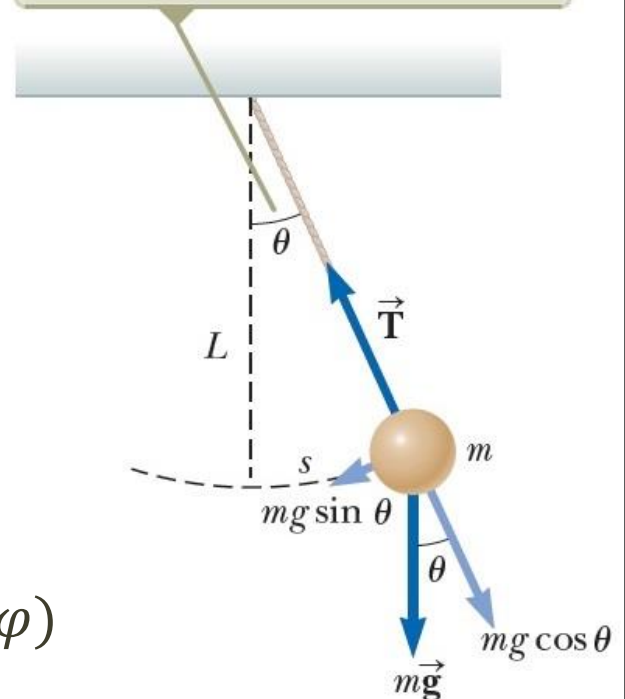
- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι φθίνουσα ταλάντωση

- Πιο κοντά στην πραγματικότητα:

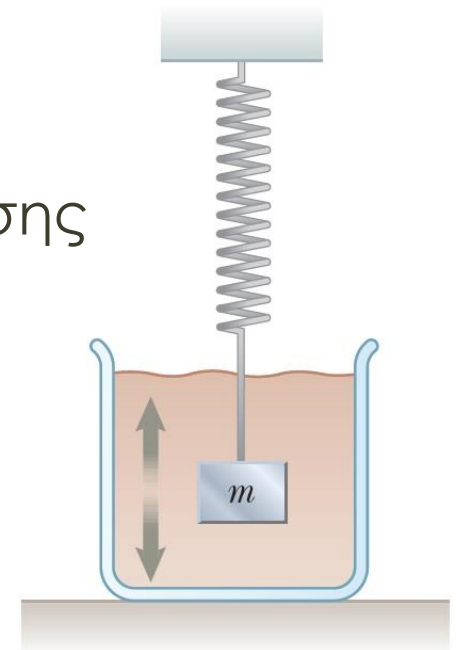
- τριβές, αντίσταση αέρα

- $\vec{R} = -b\vec{v} = -b \frac{d\vec{x}}{dt}$: δύναμη επιβράδυνσης

- Συντελεστής απόσβεσης b

- Δρα αντίθετα στην ταχύτητα του σώματος

- $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

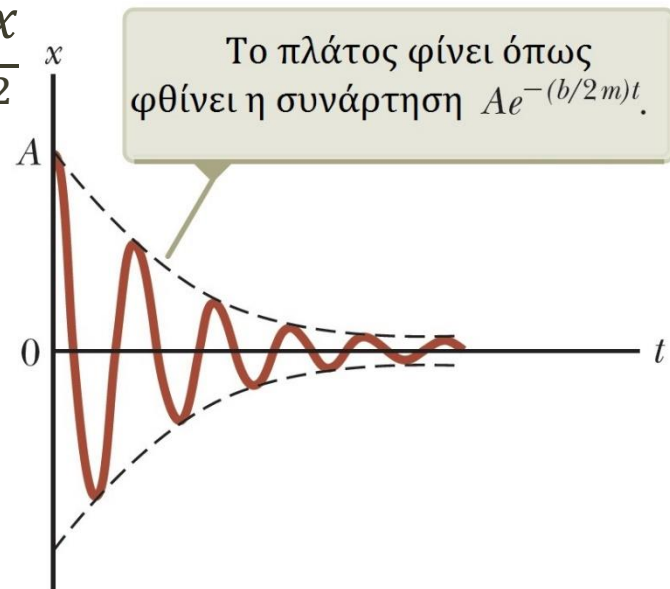
- Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (b μικρό):

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

- Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης

- Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται **φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)** του συστήματος

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

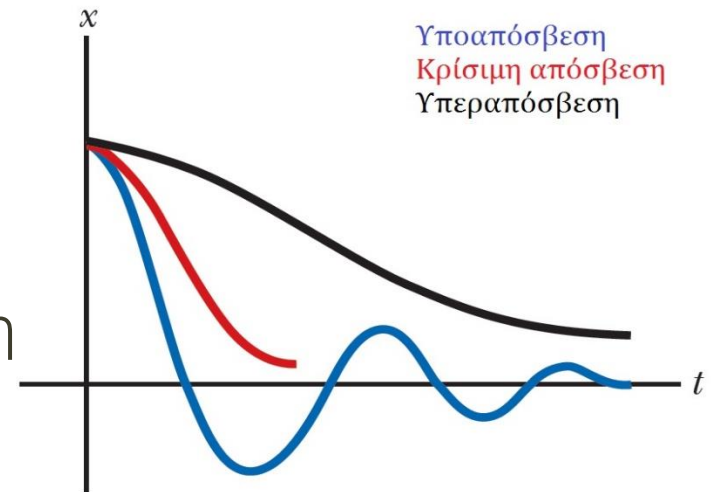
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

• Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση

• Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση

• Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση

• Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t)$ δεν ισχύει.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- ◉ Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης λόγω της δύναμης αντίστασης
 - ◉ Ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη στο σύστημα
 - ◉ Π.χ. παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει την ταλάντωσή του
 - ◉ Π.χ. στον έμφωνο στάσιμο λόγο
 - ◉ Π.χ. σε ηλεκτρικά κυκλώματα
- ◉ Εξωτερική δύναμη διέγερσης $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$
- ◉ Τότε $\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- $\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- Λύση (σταθερή κατάσταση):
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

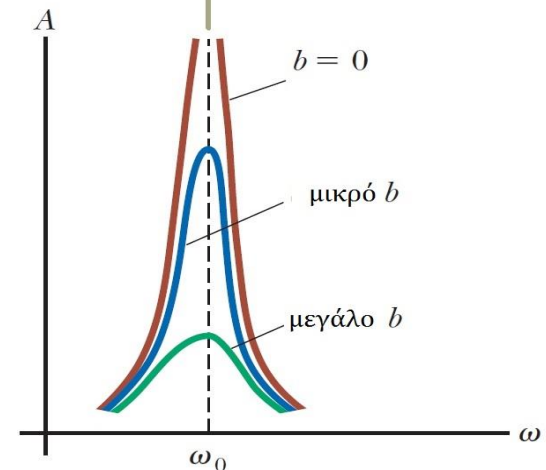
- με

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

- Συντονισμός:** Όταν $\omega \approx \omega_0$ το A γίνεται πολύ μεγάλο

- ω_0 : **συχνότητα συντονισμού**

Όταν η συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης διέγερσης ισούται με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή, παρατηρείται συντονισμός.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Μηχανική:

AP Photos



a



b

- ο Ο κυματισμός του ανέμου στο οδόστρωμα δημιούργησε περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού της γέφυρας. Το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξήθηκε πολύ με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.
- ο https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

© Topham/The Image Works

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

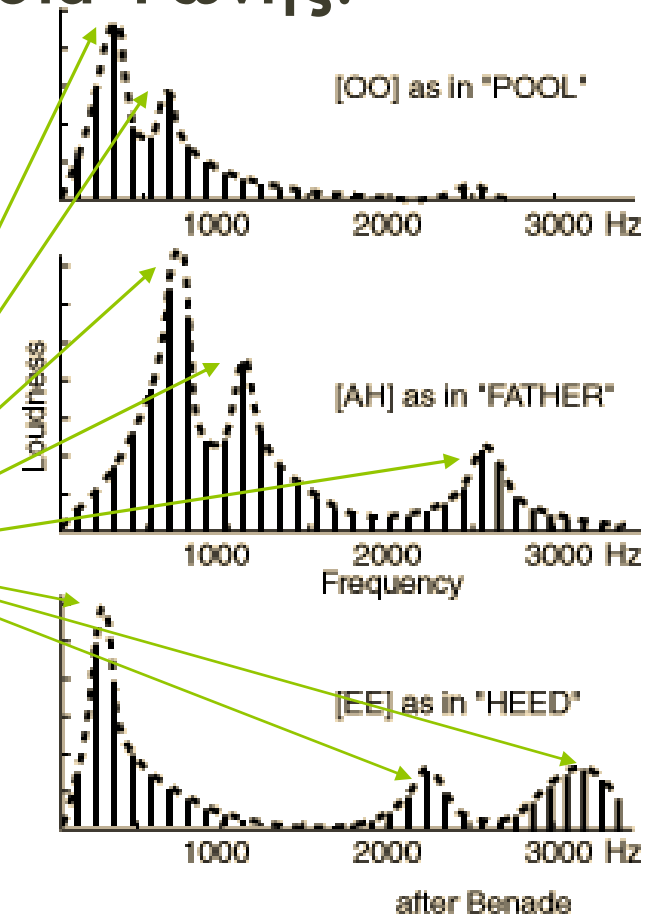
• Παραδείγματα – Επεξεργασία Φωνής:

- Διαφορετικές συχνότητες συντονισμού για τα διαφορετικά φωνήματα

- /o/, /a/, /ε/

- Φωνοσυντονισμός (formant)

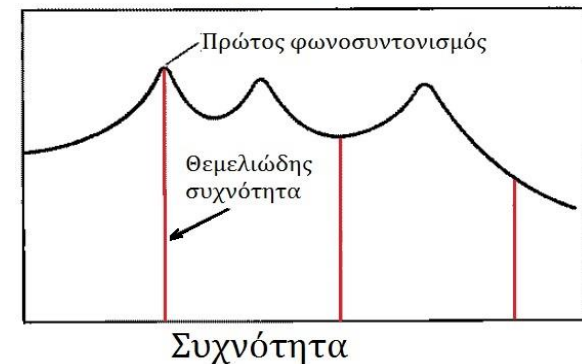
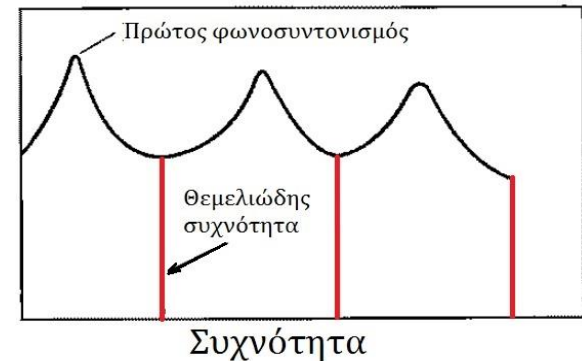
- Περιοχές όπου οι γύρω συχνότητες λαμβάνουν υψηλά πλάτη



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα - Ακουστική:

- ο Οι σοπράνο προσπαθούν να «φτιάξουν» τη φωνητική οδό τους έτσι ώστε η συχνότητα φωνοσυντονισμού να συμπίπτει με τη θεμελιώδη συχνότητα της φωνής τους, όταν θέλουν να παράξουν δυνατή φωνή (Σχήμα)
- ο Επίσης, με διαφορετική διαμόρφωση της φωνητικής οδού μπορούν να «φτιάξουν» ένα φωνοσυντονισμό στην περιοχή συχνοτήτων 2500-3000 Hz, όπου τα μουσικά όργανα συνήθως δεν έχουν ενέργεια, ώστε να ακούγονται περισσότερο αυτοί παρά τα μουσικά όργανα





Τέλος Διάλεξης