ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 27/11/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 5/12/2017

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1. Έστω ότι το φορτίο 1 nC βρίσκεται στο σημείο αναφοράς ενός συστήματος συντεταγμένων και έστω ότι το ονομάζουμε q_1. Αντίστοιχα, $q_3 = -6.0$ nC, ενώ το φορτίο q_2 θα βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, και το q_4 στο τέταρτο τεταρτημόριο. Η συνολική ηλεκτρική δύναμη στο q_1 είναι το διανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών δυνάμεων από τα άλλα τρια φορτία. Άρα

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{21} &= k_e\frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_2 && (1)\\
&= 0.72\times 10^{-5}, \text{ με φορά προς το } q_2 && (2)\\
&= 0.72\times 10^{-5}(\cos(45^o)\vec{i}+\sin(45^o)\vec{j}) && (3)\\
\vec{F}_{31} &= k_e\frac{|q_3||q_1|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_3 && (4)\\
&= 2.16\times 10^{-5}\vec{j} && (5)\\
\vec{F}_{41} &= k_e\frac{|q_1||q_4|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_4 && (6)\\
&= 0.72\times 10^{-5}(\cos(45^o)\vec{i}-\sin(45^o)\vec{j}) && (7)
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις συνιστώσες έχουμε

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}+\vec{F}_{41} = 1.02\times 10^{-5}\vec{i}+2.2\times 10^{-5}\vec{j}\ \mathrm{N} \tag{8}$$

Άσκηση 2. Δείτε το Σχήμα 1. Οι δυο ηλεκτρικές δυνάμεις υπολογίζονται ως

$$F_E = |q|E = 1.00\times 10^{-2}\ \mathrm{N} \tag{9}$$

$$F_e = k_e\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = \frac{9.0\times 10^{-5}}{r^2} \tag{10}$$

Από τη γεωμετρία του Σχήματος 1, έχουμε

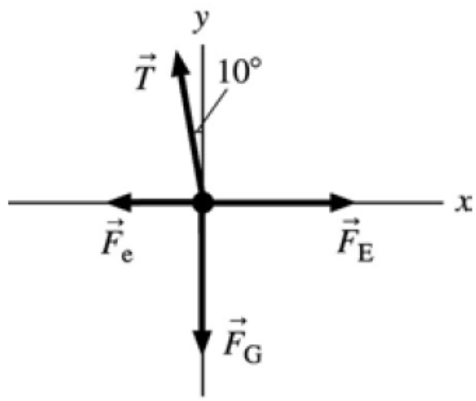
$$\sin(10^o) = \frac{\frac{r}{2}}{0.5} \Longrightarrow r = 0.174 \tag{11}$$

οπότε

$$F_e = 3\times 10^{-3}\ \mathrm{N} \tag{12}$$

Ξανά από το Σχήμα, παρατηρούμε ότι

$$T\cos(10^o) = mg \text{ και } T\sin(10^o)+F_e = F_E \tag{13}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 2.*

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\tan(10^o) = \frac{F_E - F_e}{mg} \Longrightarrow m = \frac{F_E - F_e}{g\tan(10^o)} = 0.41 \times 10^{-2} = 4.1 \text{ gr} \tag{14}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Παρατηρούμε πως λόγω συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο θα έχει μόνο $x-$συνιστώσα. Για ένα τμήμα της ράβδου dy με φορτίο dq θα ισχύει

$$dE_x = k_e \frac{dq\cos(\theta)}{r^2} \tag{15}$$

με θ τη γωνία που σχηματίζει ο οριζόντιος άξονας με την απόσταση r. Τότε

$$dE_x = k_e \frac{\lambda dy}{a^2 + y^2} cos(\theta) = k_e \lambda \frac{a dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \tag{16}$$

αφού

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \tag{17}$$

Για το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο

$$E_x = \int dE_x = \int k_e \lambda \frac{a dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = k_e \lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{a dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \tag{18}$$

$$= k_e \lambda \frac{y}{a\sqrt{a^2 + y^2}}\Big]_{-L/2}^{L/2} = \frac{k_e \lambda L}{a\sqrt{a^2 + (L/2)^2}} = k_e \frac{Q}{a\sqrt{a^2 + (L/2)^2}} \tag{19}$$

(β΄) Αν $a \gg L$, τότε $a^2 + (L/2)^2 \approx a^2$, οπότε

$$E_x = k_e \frac{Q}{a\sqrt{a^2}} = k_e \frac{Q}{a^2} \tag{20}$$

οπότε η συμπεριφορά της είναι ως σημειακό φορτίο.

(γ) Γράφουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ως

$$E_x = k_e \frac{Q}{aL/2} \frac{1}{\sqrt{1+4a^2/L^2}} = k_e \frac{2\lambda}{a} \frac{1}{\sqrt{1+4a^2/L^2}} \tag{21}$$

και θέτοντας $L \to +\infty$, έχουμε

$$E = k_e \frac{2\lambda}{a} \tag{22}$$

Άσκηση 4. Από την προηγούμενη άσκηση, έχουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας μιας άπειρου μήκους ράβδου σε απόσταση a από αυτή δίνεται ως

$$E = k_e \frac{2\lambda}{a} \tag{23}$$

Για κάθε ράβδο,

$$E_{\text{αριστερά}} = E_{\text{δεξιά}} = k_e \frac{2\lambda}{\sqrt{y^2+(d/2)^2}} = k_e \frac{4\lambda}{\sqrt{4y^2+d^2}} \tag{24}$$

Έστω ότι το διάνυσμα $E_{\text{αριστερά}}$ σχηματίζει γωνία ϕ με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα, ενώ το $E_{\text{δεξιά}}$ σχηματίζει γωνία ϕ με τον οριζόντιο αρνητικό ημιάξονα. Από τη γεωμετρία του σχήματος, θα είναι

$$\cos(\phi) = \frac{d/2}{\sqrt{y^2+d^2/4}} = \frac{d}{\sqrt{4y^2+d^2}} \tag{25}$$

$$\sin(\phi) = \frac{2y}{\sqrt{4y^2+d^2}} \tag{26}$$

και άρα

$$\vec{E}_{\text{αριστερά}} = k_e \frac{4\lambda}{\sqrt{4y^2+d^2}} \Big(\frac{d}{\sqrt{4y^2+d^2}} \vec{i} + \frac{2y}{\sqrt{4y^2+d^2}} \vec{j} \Big) \tag{27}$$

$$\vec{E}_{\text{δεξιά}} = k_e \frac{4\lambda}{\sqrt{4y^2+d^2}} \Big(- \frac{d}{\sqrt{4y^2+d^2}} \vec{i} + \frac{2y}{\sqrt{4y^2+d^2}} \vec{j} \Big) \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

Προσθέτοντας τα δυο διανύσματα έχουμε αλληλοακύρωση των $x-$συνιστωσών τους. ΆΡα

$$\vec{E} = k_e \frac{16\lambda y}{(4y^2+d^2)} \vec{j} \tag{30}$$

Άσκηση 5.

(α) Είναι

$$E = 2k_e\pi\sigma \Big(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \Big) = 2k_e\pi\sigma \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} \Big) \tag{31}$$

Όμως από τη διωνυμική προσέγγιση

$$1 - (1+R^2/x^2)^{-1/2} \approx 1 - \Big(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} \Big) = \frac{R^2}{2x^2} \tag{32}$$

Άρα

$$E = 2k_e\pi\sigma \frac{R^2}{2x^2} \tag{33}$$

(β΄) Αφού $\sigma = Q/A = \frac{Q}{\pi R^2}$, τότε από την παραπάνω απάντηση (και υπόθεση ότι $x \gg R$)

$$E = k_e \pi \frac{Q}{\pi R^2} \frac{R^2}{x^2} = k_e \frac{Q}{x^2} \tag{34}$$

που πράγματι είναι η σχέση ηλεκτρικού πεδίου για σημειακό φορτίο.