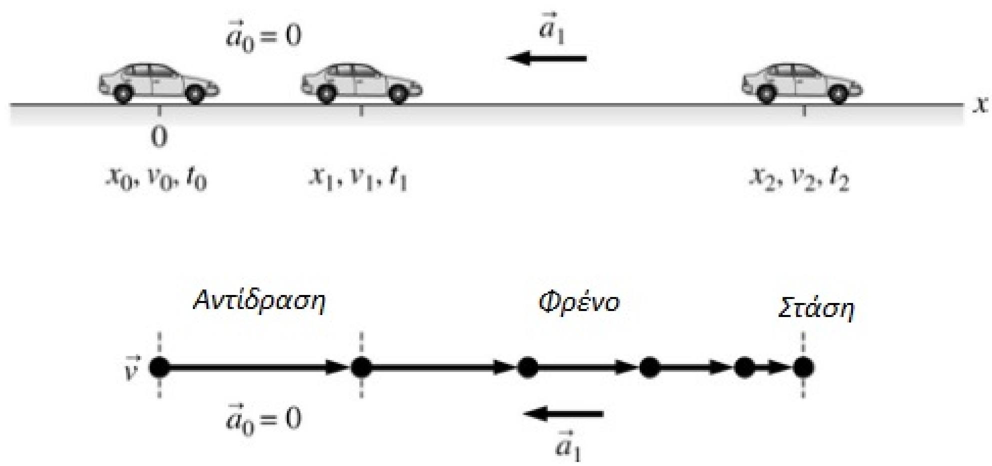
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

Θα βρούμε το x_2 από την εξίσωση της κινηματικής:



Σχήμα 1: Γραφική απεικόνιση άσκησης 1.

$$u_2^2 = u_1^2 + 2a_1(x_2 - x_1) = (0)^2 = (50)^2 + 2(-10)(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 + 125 \text{ m} \tag{1}$$

Δεδομένου ότι το όχημα βρίσκεται 150 m απο την αρχή (x_0), χρειάζεται να καθορίσουμε το x_1

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) = 0 + (50)(0.60 - 0.0) = 30 \text{ m} \tag{2}$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε $x_2 = (30 + 125) = 155$ m, πράγμα που σημαίνει οτι ο Ethan δε θα καταφέρει να σταματησει σε απόσταση 150 m και τελικά θα καταλήξει στην φυλακή !

Άσκηση 2.

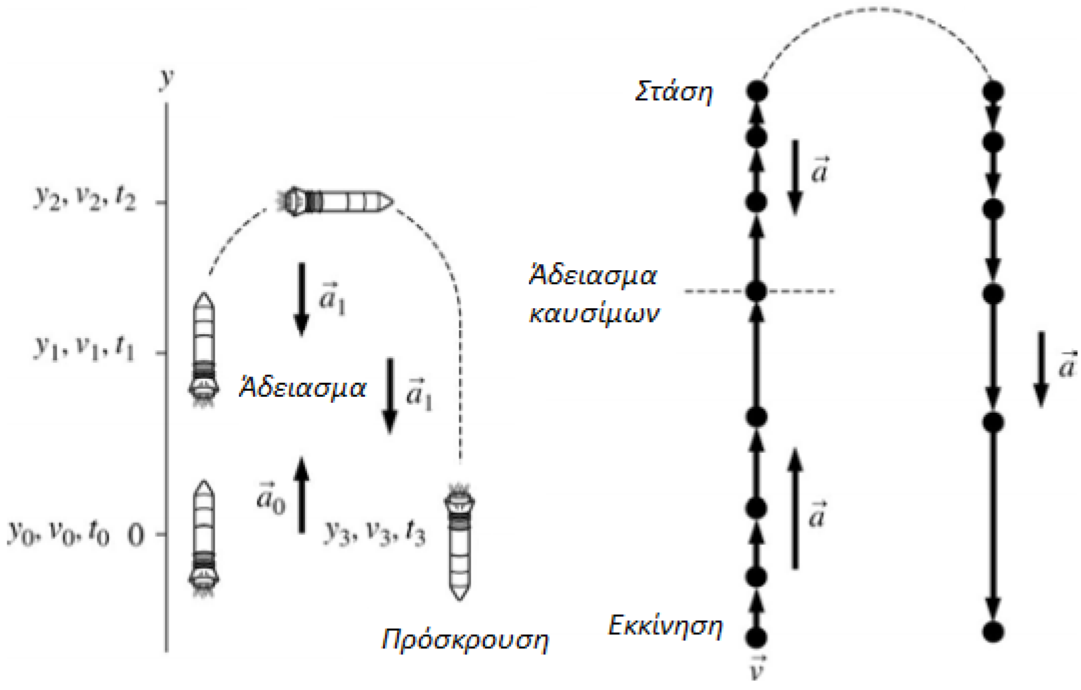
i. Αναγνωρίζουμε 3 διαφορετικές φάσεις στην κίνηση. Η δεύτερη και η τρίτη είναι και οι δύο ελεύθερες πτώσεις, με $a = -g$ και μέγιστο ύψος εκτόξευσης y_2. Στην επιταχυνόμενη κίνηση:

$$y_1 = y_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}(30)(30) = 13.500\text{m}$$
$$u_1 = u_0 + a(t_1 - t_0) = at_1 = 30 \cdot 30 = 900 \text{ m/s}$$

Στη σταθεσή φάση,

$$u_2^2 = 0 = u_1^2 - 2g(y_2 - y_1) \Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{u_1^2}{2g} = 13500 + \frac{900^2}{2 \cdot 9.8} = 54800 \text{ m} = 54.8 \text{ km} \tag{3}$$

Άρα το μέγιστο υψόμερο είναι 54.8 m.



Σχήμα 2: Γραφική απεικόνιση άσκησης 2.

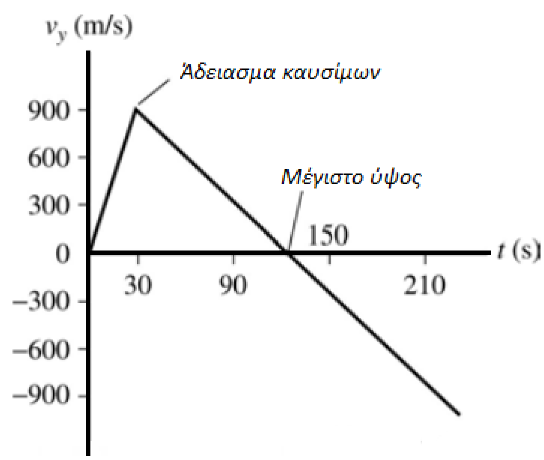
ii. Ο πύραυλος είναι στον αέρα μέχρι την χρονική στιγμή t_3. Γνωρίζουμε ήδη ότι $t_1 = 30$ s, και υπολογίζουμε την t_2, ως εξής:

$$u_2 = 0 = u_1 - g(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{u_1}{g} = 122 \text{ s} \tag{4}$$

Συνεπώς η χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται ως ο χρόνος που χρειάζεται για να πέσει 54.8 km:

$$y_3 = 0 = y_2 + u_2(t_3 - t_2) - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 = y_2 - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 \Rightarrow t_3 = t_2 + \sqrt{\frac{2y_2}{g}} = 228 \text{ s} \tag{5}$$

iii. Η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά, με σταθερή επιτάγχυνση 30 m/s^2 για 30 s συνεπώς, η μέγιστη ταχύτητα θα είναι 900 m/s. Μετά ξεκινά να μειώνεται με σταθεσή επιβράδυνση -9.8 m/s^2. Η ταχύτητα γίνεται



Σχήμα 3: Άσκηση 2: Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου.

μηδέν όταν $t_2 = 122$ s. Τελικά, την χρονική στιγμή $t_3 = 228$ s η ταχύτητα υπολογίζεται να είναι: $u_3 = u_2 - g(t_3 - t_2) = -1040$ m/s.

Άσκηση 3.

i. Σημεία στροφής έχουμε όταν η ταχύτητα αλλάζει πρόσημο. Θέτουμε $u_x = 0$ και ελέγχουμε σε ποιές χρονικές στιγμές η ταχύτητα μηδενίζεται:

$$u_x = 0 \Longleftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Longleftrightarrow (t-2)(t-5) = 0 \Longleftrightarrow t = 2\text{s} \quad \text{και} \quad t = 5\text{s} \tag{6}$$

Άρα η ταχύτητα αλλάζει πρόσημο για στις $t = 2$ s και $t = 5$ s.

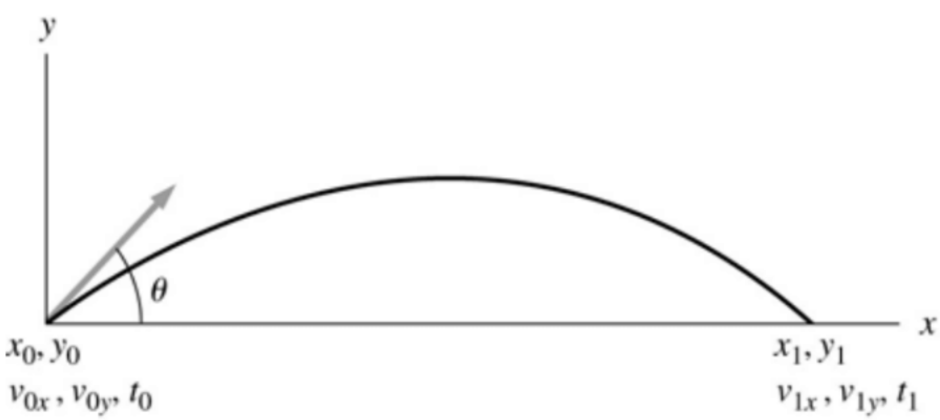
ii. Η επιτάγχυνση δίνεται απο την παράγωγο της ταχύτητας:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = 2t - 7 \tag{7}$$

Αντικαθιστώντας τις χρονικές στιγμές που βρήκαμε πριν, βρίσκουμε: $a_x(2) = 2(2) - 7 = -3$ m/s^2 και $a_x(5) = 2(5) - 7 = 3\text{m/s}^2$

Προχοσή: Στο πρόβλημα δεν υπάρχει σταθερή επιτάχυνση για να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης που γνωρίζουμε, όμως πάντα ισχύει η σχέση $a = \frac{du}{dt}$, ανεξαρτήτως του είδους της κίνησης.

Άσκηση 4.



Σχήμα 4: Γραφική αναπαράσταση άσκησης 4.

i. Η απόσταση που ταξίδεψε είναι $x_1 = u_{0x}t_1 = u_0 \cos\theta \times t_1$. Ο χρόνος της πτήσης υπολογίζεται απο την y-εξίσωση, χρησιμοποιώντας το γεγονός οτι η μπαλα ξεκινά και τελειώνει την κίνησή της στο $y = 0$:

$$y_1 - y_0 = 0 = u_0 \sin\theta t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = (u_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt_1)t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2u_0 \sin\theta}{g} \tag{8}$$

Άρα η απόσταση που διένυσε είναι:

$$x_1 = u_0 \cos\theta \times \frac{2u_0 \sin\theta}{g} = \frac{2u_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \tag{9}$$

Για $\theta = 30°$, η απόσταση θα είναι:

$$(x_1)_{earth} = \frac{2u_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g_{earth}} = \frac{2 \cdot 25 \cdot \sin 30 \cdot \cos 30}{9.80} = 55.2\text{m} \tag{10}$$

και

$$(x_1)_{moon} = \frac{2u_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g_{moon}} = \frac{2u_0^2 \sin\theta\cos\theta}{\frac{1}{6}g_{earth}} = 6\frac{2u_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g_{earth}} = 6(x_1)_{earth} = 331.2\text{m} \tag{11}$$

Η μπάλα του γκόλφ ταξίδεψε $331.2 - 55.2 = 276$ m μακρύτερα στο φεγγάρι απότι στη γη.

ii. Οι χρόνοι πτήσεις είναι:

$$(t_1)_{earth} = \frac{2u_0^2 \sin\theta}{g_{earth}} = \frac{2 \cdot 25 \cdot \sin 30}{9.80} = 2.55\text{s} \tag{12}$$

και

$$(t_1)_{moon} = \frac{2u_0^2 \sin\theta}{g_{moon}} = \frac{2u_0^2 \sin\theta}{\frac{1}{6}g_{earth}} = 6\frac{2u_0^2 \sin\theta}{g_{earth}} = 6(t_1)_{earth} = 15.30\text{s} \tag{13}$$

Η μπάλα ταξίδεψε για $15.30 - 2.55 = 12.75$ s περισσότερο στο φεγγάρι.

Άσκηση 5.

Η μετατόπιση είναι $\Delta x = 62$ m.

$$\Delta x = (u_0)_x \Delta t = u_0 \cos\theta \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{u_0 \cos\theta} \tag{14}$$

και

$$y_f = y_i + (u_0 \sin\theta)\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2 \tag{15}$$

ενώ

$$\Delta y = (u_0 \sin\theta)\frac{\Delta x}{u_0\cos\theta} + \frac{1}{2}(-g)\Big(\frac{\Delta x}{u_0\cos\theta}\Big)^2 \tag{16}$$

Λύνοντας ως προς u_0:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= (\tan\theta)\Delta x + \frac{1}{2}(-g)\Big(\frac{\Delta x}{u_0\cos\theta}\Big)^2 \\
\frac{1}{2}(g)\Big(\frac{\Delta x}{u_0\cos\theta}\Big)^2 &= (\tan\theta)\Delta x - \Delta y \\
u_0^2 &= \frac{g}{2}\Big(\frac{\Delta x}{\cos\theta}\Big)^2\Big(\frac{1}{(\tan\theta)\Delta x - \Delta y}\Big) \\
u_0 &= \sqrt{\frac{g}{2}\Big(\frac{\Delta x}{\cos\theta}\Big)^2\Big(\frac{1}{(\tan\theta)\Delta x - \Delta y}\Big)} = \\
&= \sqrt{\frac{9.8}{2}\Big(\frac{62}{\cos 30^\circ}\Big)^2\Big(\frac{1}{(\tan 30^\circ)62 - (-2)}\Big)} \\
&= 25.78\text{m/s}
\end{aligned} \tag{17}$$

Αυτή είναι η ταχύτητα οταν το ακόντιο φεύγει από το χέρι του ακοντιστή. Αυτή γίνεται u_f κατά τη διάρκεια της ρίψης, συνεπώς η σταθερή επιτάχυνση a θα είναι:

$$a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} = \frac{25.78^2 - 0^2}{2 \cdot 0.70} = 474\text{m/s}^2 \tag{18}$$

Άσκηση 6.

i. Η γωνιακή ταχύτητα ω δεν αλλάζει σε αυτή τη κίνηση, άρα:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega^2 r_2}{\omega^2 r_1} = 2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 20 = 40m/s^2 \tag{19}$$

ii. Έστω a_3 η επιτάγχυνση του πρώτου κόκκου σκόνης αν το ω διπλασιαστεί ($\omega_3 = 2\omega_1$). Η απόσταση r από το κέντρο δε θα αλλάξει, άρα:

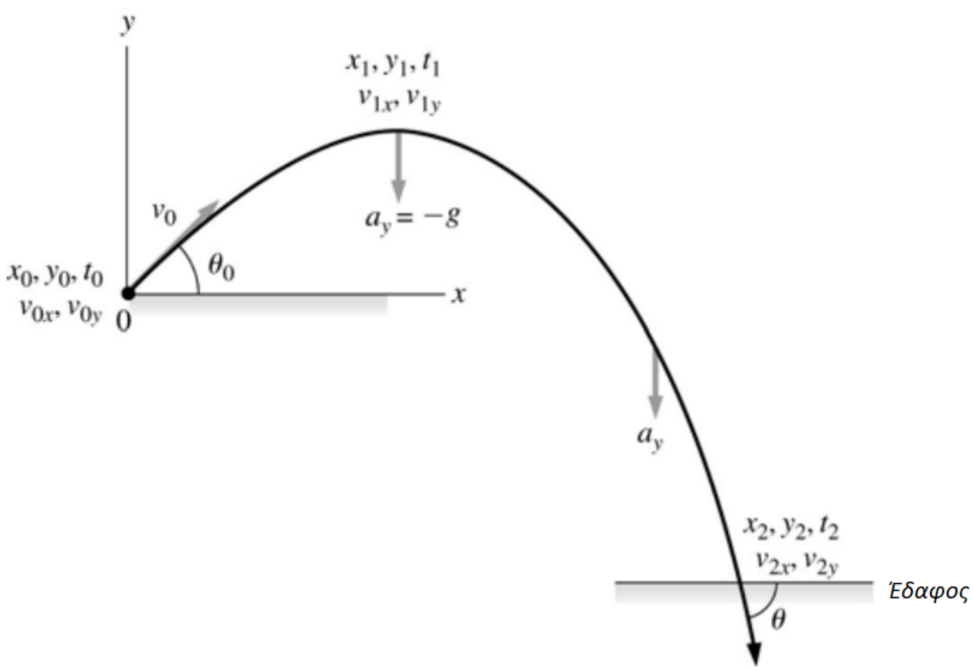
$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{\omega_3^2 r}{\omega_1^2 r} = \frac{2\omega_1^2 r}{\omega_1^2 r} = 2^2 = 4 \Rightarrow a_3 = 4a_1 = 4 \cdot 20 = 80 m/s^2 \tag{20}$$

Άσκηση 7.

i. Λύνοντας την:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + u_{0y}(t_2 - t_0)^2 \\ y_2 &= 0 + 30\sin 60°(7.5 - 0) + \frac{1}{2}(-9.8)(7.5 - 0)^2 = -80.8 \text{ m} \end{aligned} \tag{21}$$

Άρα βρίσκεται περίπου 81 m ψηλότερα από το σημείο που το σωματίδιο χτύπησε στο έδαφος.



Σχήμα 5: Γραφική απεικόνηση άσκησης 7.

ii. Επιπλέον, $u_{1y}^2 = u_{0y}^2(y_1 - y_0) \Rightarrow 0 = (30\sin 60°)^2 + 2(-9.8)(y_1 - 0) \Rightarrow y_1 = 34.4$ m.