ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

(α΄) Η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας επιφάνειας A είναι $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A} = EA\cos(\theta)$, όπου θ η γωνία μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου και του διανύσματος $\vec{A}$ που είναι κάθετο στην επιφάνεια, έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας, και δείχνει προς τα έξω από την επιφάνεια. Άρα

$$\Phi_1 = EA\cos(\theta_1) = 500\times 9\times 10^{-4}\times\cos(150^o) = -0.39\ \text{Nm}^2/\text{C} \tag{1}$$
$$\Phi_2 = EA\cos(\theta_1) = 500\times 9\times 10^{-4}\times\cos(60^o) = 0.23\ \text{Nm}^2/\text{C} \tag{2}$$
$$\Phi_3 = EA\cos(\theta_1) = 500\times 9\times 10^{-4}\times\cos(3^o) = 0.39\ \text{Nm}^2/\text{C} \tag{3}$$
$$\Phi_4 = EA\cos(\theta_1) = 500\times 9\times 10^{-4}\times\cos(120^o) = -0.23\ \text{Nm}^2/\text{C} \tag{4}$$

Η συνολική ροή διαμέσου των επιφανειών είναι $\Phi_T = \sum \Phi_i = 0\ \text{Nm}^2/\text{C}$.

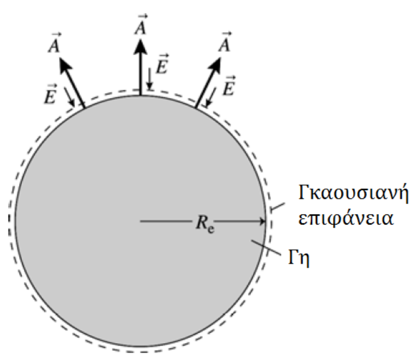
(β΄) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια 1 και παράλληλο στις επιφάνειες 2, 3, και 5. Επίσης, η γωνία μεταξύ των $\vec{E}$ και $\vec{A}_4$ είναι 60^o. Η ηλεκτρική ροή σε αυτές τις 5 επιφάνειες είναι

$$\Phi_1 = E_1A_1\cos(\theta_1) = 400\times 2\times\cos(180^o) = -3200\ \text{Nm}^2/\text{C} \tag{5}$$
$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_5 = 0\ \text{Nm}^2/\text{C} \tag{6}$$
$$\Phi_4 = E_4A_4\cos(\theta_4) = 400\times\frac{2}{\sin(30^o)}\times 4\times\cos(60^o) = 3200\ \text{Nm}^2/\text{C} \tag{7}$$

Η συνολική ηλεκτρική ροή είναι μηδέν ξανά.

Άσκηση 2.

Το πρόβλημα μπορεί να σχεδιαστεί όπως στο Σχήμα 1. Λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου, το $\vec{E}$ είναι



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

κάθετο στην επιλεγμένη γκαουσιανή επιφάνεια, και το μέτρο του πεδίου έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας. Από το νόμο του Gauss, έχουμε

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \tag{8}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο "δείχνει" προς τα μέσα, προς το εσωτερικό της Γης, άρα η ροή θα είναι αρνητική, οπότε

$$Q_{in} = -\epsilon_0 E A_{\text{σφαίρας}} = -8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 4\pi \times (6.37 \times 10^6)^2 = -4.51 \times 10^5 \text{ C} \tag{9}$$

Άσκηση 3.
Έστω Q_1 και Q_2 τα άγνωστα φορτία. Πρέπει

$$Q_1 + Q_2 = 30 \times 10^{-9} \text{ C} \tag{10}$$

και

$$U = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} = -180 \times 10^{-6} \text{ J} \tag{11}$$

δηλ.

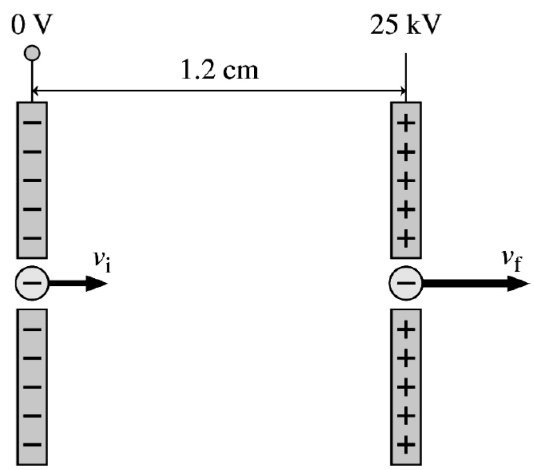
$$Q_1 Q_2 = -4 \times 10^{-16} \text{ C}^2 \tag{12}$$

Λύνοντας την πρώτη σχέση ως προς Q_2 και αντικαθιστώντας στην δεύτερη, έχουμε

$$Q_1(30 \times 10^{-9} - Q_1) = -4 \times 10^{-16} \Rightarrow Q_1 = 40 \times 10^{-9} \text{ C}, \;\; Q_1 = -10 \times 10^{-9} \text{ C} \tag{13}$$

οι οποίες προκύπτουν ως δυο ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. Άρα τα δυο φορτία είναι -10 nC και 40 nC.

Άσκηση 4.



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 4.

(α΄) Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες είναι σταθερό με μέτρο

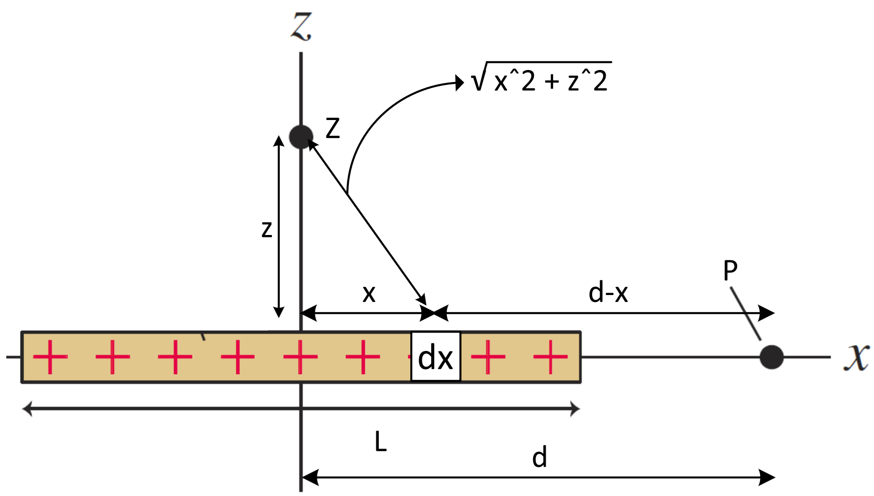
$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{25 \times 10^3}{0.012} = 2.1 \times 10^6 \text{ V/m} \tag{14}$$

(β΄) Από αρχή διατήρησης της ενέργειας στο σύστημα πεδίο-φορτίο, έχουμε

$$\Delta U + \Delta K = 0 \tag{15}$$
$$U_i = K_f + U_f \tag{16}$$
$$0 = \frac{1}{2} m_e u_f^2 + (-e)\Delta V \tag{17}$$
$$0 = \frac{1}{2} m_e u_f^2 - eEd \tag{18}$$
$$u_f = 9.4 \times 10^7 \text{ m/s} \tag{19}$$

(γ΄) Η παραπάνω ταχύτητα αποτελεί περίπου του 31% της ταχύτητας του φωτός. Σε τέτοιες τιμές, πρέπει κανείς να λάβει υπόψη του τη θεωρία της σχετικότητας.

Άσκηση 5.



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 5.

(α΄) Έστω P το σημείο σε απόσταση d από τη συμβολή των αξόνων. Έστω ένα μικρό τμήμα ράβδου, μήκους dx, με φορτίο dq, στη θέση x, σε απόσταση $d-x$ από το σημείο P. Αυτό το τμήμα συνεισφέρει δυναμικό

$$dV = k_e \frac{dq}{d-x} = k_e \frac{\lambda dx}{d-x} = k_e \frac{\frac{Q}{L}dx}{d-x} \tag{20}$$

Αθροίζοντας τις συνεισφορές για κάθε τμήμα ράβδου, έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \int dV && (21)\\ &= k_e \frac{Q}{L} \int \frac{dx}{d-x} && (22)\\ &= k_e \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{d-x} dx && (23)\\ &= k_e \frac{Q}{L} \Big[-\ln(d-x) \Big]_{-L/2}^{L/2} && (24)\\ &= k_e \frac{Q}{L} \ln\Big(\frac{d+L/2}{d-L/2} \Big) && (25) \end{aligned}$$

Για ένα οποιοδήποτε σημείο P που βρίσκεται σε τυχαία θέση x του άξονα, το δυναμικό θα είναι

$$V = k_e \frac{Q}{L} \ln\Big(\frac{x+L/2}{x-L/2} \Big) \tag{26}$$

(β΄) Έστω Z το σημείο σε απόσταση z από τη συμβολή των αξόνων. Έστω ένα μικρό τμήμα ράβδου, μήκους dx, με φορτίο dq, στη θέση x, σε απόσταση $\sqrt{x^2+z^2}$ από το σημείο z. Αυτό το τμήμα συνεισφέρει δυναμικό

$$dV = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2+z^2}} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+z^2}} = k_e \frac{\frac{Q}{L}dx}{\sqrt{x^2+z^2}} \tag{27}$$

Αθροίζοντας τις συνεισφορές για κάθε τμήμα ράβδου, έχουμε

$$V = \int dV \tag{28}$$
$$= k_e \frac{Q}{L} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}} \tag{29}$$
$$= k_e \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} dx \tag{30}$$
$$= k_e \frac{Q}{L} \Big[\ln\Big(\sqrt{x^2+z^2} + x \Big) \Big]_{-L/2}^{L/2} \tag{31}$$
$$= k_e \frac{Q}{L} \ln\Big(\frac{\sqrt{(L/2)^2+z^2}+L/2}{\sqrt{(L/2)^2+z^2}-L/2} \Big) \tag{32}$$

Άσκηση 6

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή διαχέεται στο περιβάλλον μέσω του φλας, και εφόσον η μέση ισχύς ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας, είναι

$$E = P\Delta t = 10 \times 10 \times 10^{-6} = 10^{-4} \text{ J} \tag{33}$$

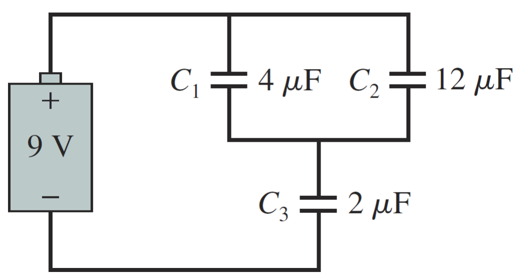
Αυτή είναι η δυναμική ενέργεια του πυκνωτή. Από τη σχέση

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \tag{34}$$

έχουμε

$$C = \frac{2U}{\Delta V^2} = 22 \times 10^{-6} \text{ F} \tag{35}$$

Άσκηση 7.



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 7.

Αφού οι C_1 και C_2 βρίσκονται σε παραλληλία,

$$C_{eq}^{1-2} = C_1 + C_2 = 16 \times 10^{-6} \text{ F} = 16 \text{ μF} \tag{36}$$

Οι C_{eq}^{1-2} και C_3 βρίσκονται σε σειρά, οπότε

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{eq}^{1-2}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{18}{32} \Rightarrow C_{eq} = \frac{16}{9} \text{ μF} \tag{37}$$

Το φορτίο που αποθηκεύεται στον πυκνωτή είναι

$$Q = C_{eq} \Delta V_c = 16 \times 10^{-6} \text{ C} = 16 \text{ μC} \tag{38}$$

Επειδή η C_{eq} είναι ένας συνδυασμός σε σειρά δυο πυκνωτών C_3 και C_{eq}^{1-2}, ισχύει για τα φορτία ότι

$$Q_{eq}^{1-2} = Q_3 = 16 \text{ μC} \tag{39}$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του C_3 είναι

$$\Delta V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 8 \text{ V} \tag{40}$$

Τώρα, $Q_{eq}^{1-2} = 16$ μC είναι το φορτίο του ισοδύναμου πυκνωτή με $C_{eq}^{1-2} = 16$ μF. ΆΡα η διαφορά δυναμικού στα άκρα του ισοδύναμου πυκνωτή C_{eq}^{1-2} είναι

$$\Delta V_{eq}^{1-2} = \frac{Q_{eq}^{1-2}}{C_{eq}^{1-2}} = 1 \text{ V} \tag{41}$$

Οι παράλληλοι πυκνωτές C_1 και C_2 έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού με τον ισοδύναμο πυκνωτή C_{eq}^{1-2}, άρα

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = 1 \text{ V} \tag{42}$$

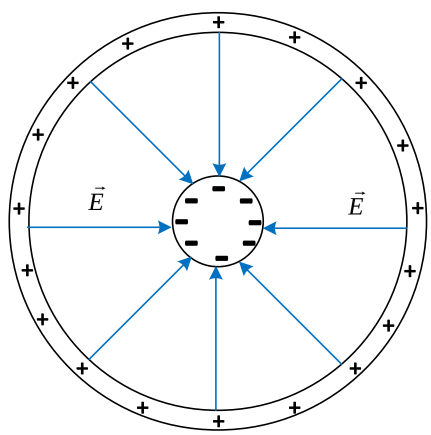
Το φορτίο καθενός είναι

$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = 4 \text{ μC} \tag{43}$$

και

$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = 12 \text{ μC} \tag{44}$$

Άσκηση 8.



Σχήμα 5: Σχήμα Άσκησης 8.

(α΄) Ο νόμος του Gauss μας λέει ότι το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα σε κυλίνδρους οφείλεται μόνο στο φορτίο του εσωτερικού κυλίνδρου. Άρα, το $\vec{E}$ είναι το πεδίο σε απόσταση r ενός μεγάλου, φορτισμένου καλωδίου, και το οποίο βρήκαμε στις διαλέξεις ότι είναι

$$E_r = k_e \frac{2\lambda}{r} \tag{45}$$

με κατεύθυνση ακτινικά προς το εσωτερικό.

(β΄) Θα είναι

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{46}$$

Θα ολοκληρώσουμε ακτινικά, από R_1 στην επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου ως R_2 σε αυτήν την εξωτερικού. Το πεδίο $\vec{E}$ είναι αρνητικό, ενώ η μεταβλητή $d\vec{s}$ θα αντικαταστηθεί με $d\vec{r}$. Άρα

$$\Delta V = -\int \vec{E_r} \cdot d\vec{r} \tag{47}$$

$$= -\int_{R_1}^{R_2} -k_e \frac{2\lambda}{r} dr \tag{48}$$

$$= 2k_e\lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \tag{49}$$

$$= 2k_e\lambda \Big[\ln(r)\Big]_{R_1}^{R_2} \tag{50}$$

$$= 2k_e\lambda \ln\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big) \tag{51}$$

(γ') Από τη σχέση

$$E = k_e \frac{2\lambda}{r} \tag{52}$$

και τη σχέση

$$\Delta V = 2k_e\lambda \ln\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big) \tag{53}$$

εύκολα λαμβάνουμε ότι

$$E = \frac{\Delta V}{r \ln\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big)} \tag{54}$$

(δ') Αν στην παραπάνω σχέση, θέσουμε $E_{max} = 1.0 \times 10^6$ V/m και $r = R_1$, τότε

$$\Delta V_{max} = R_1 E_{max} \ln\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big) = 1600 \text{ V} \tag{55}$$