ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

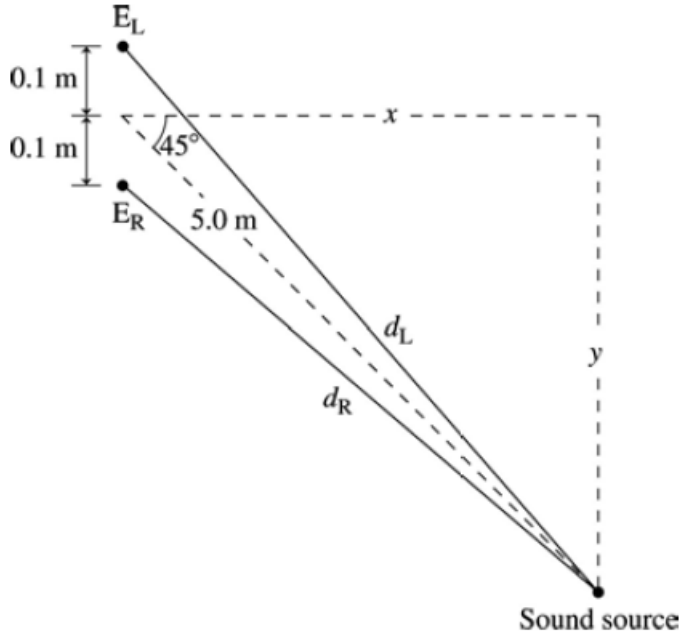
ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1. Η ενέργεια που παραδίδεται στο αυτί μας σε χρόνο t ισούται με $E = Pt$, με P την ισχύ του κύματος. Η ένταση του κύματος είναι $I = P/A$ με A το εμβαδόν της επιφάνειας του τυμπάνου. Συνολικά,

$$E = Pt = IAt = I\pi r^2 t = 3.4 \times 10^{-6} \text{ J} \tag{1}$$

Άσκηση 2. Σχηματικά, το πρόβλημα φαίνεται στο Σχήμα 1. Η απόσταση μεταξύ της πηγής και του αριστερού



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

αυτιού (E_L) είναι

$$d_L = \sqrt{x^2 + (y + 0.1)^2} = \sqrt{(5\cos 45^o)^2 + (5\sin 45^o + 0.1)^2} = 5.07 \text{ m} \tag{2}$$

Όμοια για το δεξί αυτί, $d_R = 4.93$ m. Έτσι

$$d_L - d_R = \Delta d = 0.14 \text{ m} \tag{3}$$

Για το ηχητικό κύμα με τη δεδομένη ταχύτητα, η διαφορά στις αφίξεις του ήχου στο αριστερό και στο δεξί αυτί είναι

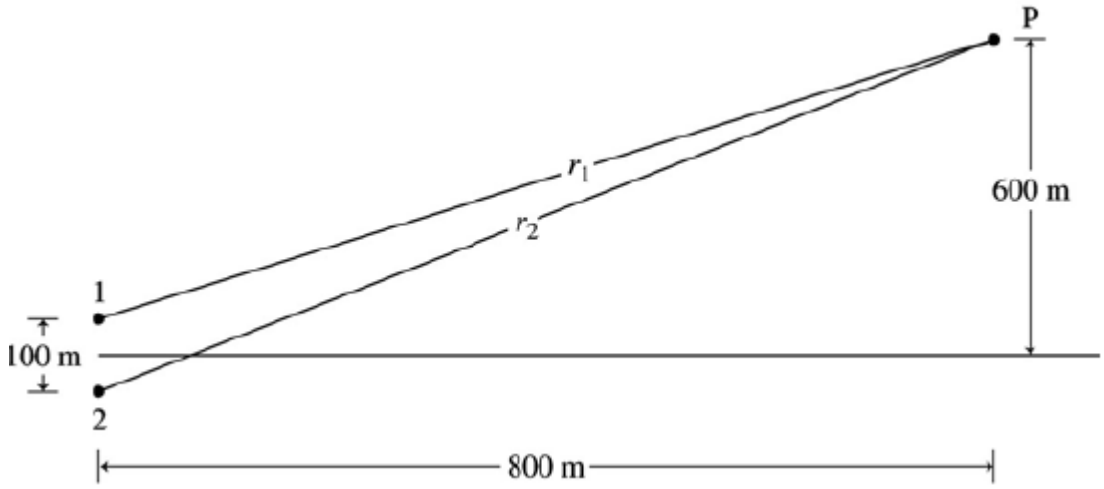
$$\Delta t = \frac{\Delta d}{343} \approx 410\mu\text{s} \tag{4}$$

Άσκηση 3. Λύνοντας την εξίσωση ως προς I, έχουμε

$$I = I_0 \times 10^{\beta/10} \tag{5}$$

Για $\beta = 60$ dB, έχουμε $I = 10^{-6}$ W/m^2 και για $\beta = 61$ dB, έχουμε $I = 1.3 \times 10^{-6}$ W/m^2. Ο λόγος των δυο είναι 1.3.

Άσκηση 4. Οι δυο κεραίες αποτελούν συμφασικές πηγές κυμάτων (δηλ. βρίσκονται σε φάση). Η επικάλυψη των κυμάτων προκαλεί συμβολή. Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 4.

(α') Η διαφορά φάσης των δυο κυμάτων στο σημείο P είναι

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} \tag{6}$$

με

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{800^2 - 650^2} - \sqrt{800^2 - 550^2} = 59.96 \text{ m} \tag{7}$$

Το μήκος κύματος του ραδιοκυματος είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} = 100 \text{ m} \tag{8}$$

Η διαφορα φάσης στο σημείο P είναι τελικά

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{59.96}{100} = 1.2\pi \text{ rad} \tag{9}$$

(β') Αφού $\Delta\phi = 0.6 \times 2\pi$, το οποίο δεν είναι ούτε ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, ούτε $(m + 1/2)$-πολλαπλάσιο του 2π, η συμβολή στο σημείο P δεν είναι ενισχυτική ούτε καταστρεπτική (είναι κάτι ανάμεσα).

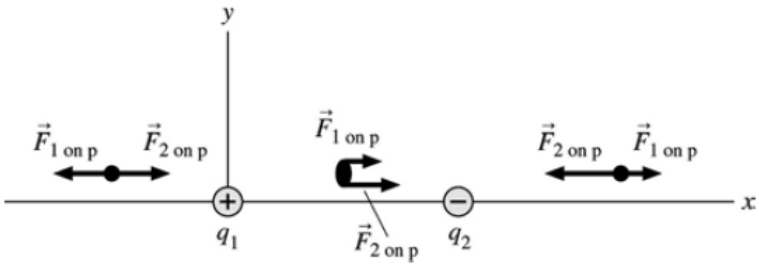
(γ') Σε ένα σημείο 10 m πιο βόρεια, έχουμε

$$\Delta r = \sqrt{800^2 + 660^2} - \sqrt{800^2 - 560^2} = 60.58 \text{ m} \tag{10}$$

και

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{60.58}{100} = 1.21\pi \text{ rad} \tag{11}$$

Αφού η διαφορά φάσης αυξάνεται όσο προχωρούμε βόρεια, μετακινούμαστε από καταστρεπτική συμβολή σε ενισχυτική συμβολή. Άρα η ισχύς του σήματος αυξάνεται.



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 5.

Άσκηση 5.

i. Το πρόβλημα είναι ουσιαστικά στην εύρεση κατάλληλης θέσης για το πρωτόνιο όπου $\vec{F}_{1\text{ επάνω }p} = -\vec{F}_{2\text{ επάνω }p}$, δηλ. οι δυνάμεις που ασκούνται επάνω στο πρωτόνιο είναι ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης. Αν το πρωτόνιο βρίσκεται στη θέση x, βρίσκεται σε απόσταση $|x|$ από το q_1 και σε απόσταση $|d-x|$ από το q_2, με $d = 0.01$ m. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι

$$F_{1\text{ επάνω}p} = k_e \frac{|q_1||q_p|}{x^2} \tag{12}$$

$$F_{2\text{ επάνω}p} = k_e \frac{|q_2||q_p|}{(d-x)^2} \tag{13}$$

Εξισώνοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$\frac{2\times 10^{-9}}{x^2} = \frac{4\times 10^{-9}}{(d-x)^2} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \tag{14}$$

Οι λύσεις του τριωνύμου είναι οι $x_1 = 0.414$ και $x_2 = -2.41$ cm. Και οι δυο θέσεις είναι θέσεις όπου το μέτρο των δυο δυνάμεων είναι ίσο, αλλά η θέση $x = 0.414$ είναι σημείο όπου τα μέτρα είναι ίσα αλλά και οι κατευθύνσεις των δυνάμεων είναι επίσης ίδιες. Άρα η σωστή λύση είναι η άλλη, $x = -2.41$ cm.

ii. Ναι, η συνισταμένη θα ήταν ξανά μηδέν για ένα ηλεκτρόνιο στην παραπάνω θέση. Αυτό γιατί η λύση στο προηγούμενο ερώτημα δεν εξαρτάται από το είδος του φορτίου που δέχεται μηδενική δύναμη από τα άλλα δυο φορτία.

Άσκηση 6.

i. Χωρίζουμε τη ράβδο σε πολλά απειροστά μικρά τμήμα φορτίου dq και μήκους dy. Έστω ένα τμήμα dy με φορτίο dq της ράβδου που βρίσκεται στο σημείο $(0, \hat{y})$. Η απόσταση από το σημείο P είναι $(x^2 + \hat{y}^2)^{1/2}$. Το ηλεκτρικό πεδίο που συνεισφέρει στο σημείο P το παραπάνω φορτίο δημιουργεί γωνία θ με το οριζόντιο άξονα και είναι

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{(x^2+\hat{y}^2)}(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}) \tag{15}$$

Αφού $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}$ και $\sin\theta = \frac{\hat{y}}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{(x^2+\hat{y}^2)}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\vec{i} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\vec{j}\Big) \tag{16}$$

ii. Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στο σημείο P αποτελείται από το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών των μικρών τμημάτων φορτίου dq. Δεδομένου ότι η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι $\lambda =$

Q/L, τότε $dq = \lambda d\hat{y}$. Ολοκληρώνοντας από $\hat{y} = 0$ ως $\hat{y} = L$, θα είναι

$$\vec{E} = k_e\lambda\Big(\int_0^L \frac{xd\hat{y}}{(x^2+\hat{y}^2)^{3/2}}\vec{i} - \int_0^L \frac{\hat{y}d\hat{y}}{(x^2+\hat{y}^2)^{3/2}}\vec{j}\Big) \tag{17}$$

$$= k_e\frac{Q}{L}\Big(x\frac{\hat{y}}{x^2\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\Big]_0^L\vec{i} - \frac{-1}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\Big]_0^L\vec{j}\Big) \tag{18}$$

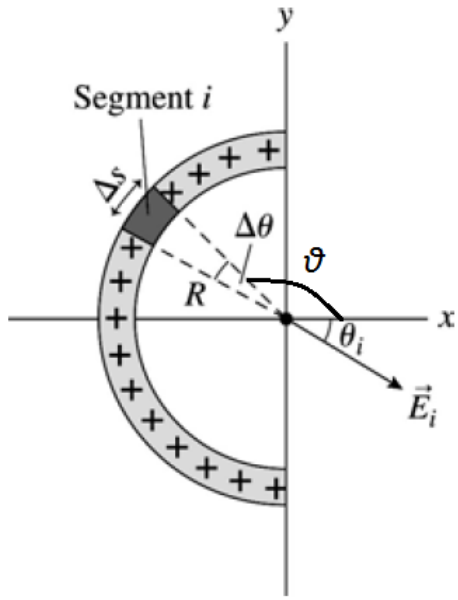
$$= k_eQ\frac{1}{x\sqrt{x^2+L^2}}\vec{i} - k_e\frac{Q}{Lx}\Big(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\Big)\vec{j} \tag{19}$$

iii. Αν $x \gg L$, τότε $x^2 + L^2 \approx x^2$, οπότε

$$\vec{E} = k_eQ\frac{1}{x\sqrt{x^2}}\vec{i} - k_e\frac{Q}{Lx}\Big(1-\frac{x}{\sqrt{x^2}}\Big)\vec{j} = k_e\frac{Q}{x^2}\vec{i} \tag{20}$$

Η ράβδος τότε συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων!

Άσκηση 7.



Σχήμα 4: Φορτισμένη ράβδος Άσκησης 7.

i. Επειδή κάθε τμήμα i της ράβδου υπό γωνία θ επάνω από τον οριζόντιο άξονα "ταιριάζει" με ένα άλλο τμήμα υπό γωνία θ κάτω από τον οριζόντιο άξονα, οι $y-$συνιστώσες των ηλεκτρικών τους πεδίων αλληλοαναιρούνται. Αυτό συμβαίνει για όλα τα ζεύγη τμημάτων που βρίσκονται υπό την ίδια γωνία επάνω και κάτω από τον οριζόντιο άξονα. Άρα

$$E_y = 0 \tag{21}$$

ii. Παρατηρήστε ότι όλα τα τμήματα ράβδου απέχουν απόσταση R από το κέντρο. Η συνεισφορά ηλεκτρικού πεδίου για ένα τμήμα i φορτίου dq είναι

$$dE_i = k_e\frac{dq}{R^2} \tag{22}$$

Η πυκνότητα φορτίου είναι γραμμική, δηλ $\lambda = Q/L$, οπότε για ένα τμήμα ράβδου απειροστά μικρού μήκους ds και απειροστά μικρού φορτίου dq, είναι $dq = \lambda ds = \frac{Q}{L}ds$. Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου για το τμήμα i σχηματίζει γωνία θ_i με τον οριζόντιο άξονα. Αντικαθιστώντας, έχουμε για τη $x-$συνιστώσα ότι

$$dE_x = dE_i\cos(\theta_i) = k_e\frac{Q}{LR^2}\cos(\theta_i)ds \tag{23}$$

Όμως το τμήμα i ράβδου μήκους ds μπορεί να γραφεί ως $ds = Rd\theta_i$, και έτσι η $x-$συνιστώσα γράφεται ως

$$dE_x = k_e \frac{Q}{LR^2} \cos(\theta_i) R d\theta_i = k_e \frac{Q}{LR} \cos(\theta_i) d\theta_i \tag{24}$$

iii. Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές dE_x από κάθε τμήμα ράβδου ds υπό γωνία $d\theta_i$, έχουμε ότι

$$E_x = \int dE_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k_e \frac{Q}{LR} \cos(\theta_i) d\theta_i \tag{25}$$

$$= k_e \frac{Q}{LR} \sin(\theta_i) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \tag{26}$$

$$= k_e \frac{2Q}{LR} \tag{27}$$

Γνωρίζουμε ότι $R = L/\pi$, οπότε

$$E_x = k_e \frac{2\pi Q}{L^2} \tag{28}$$

και το διάνυσμα αυτού γράφεται ως

$$\vec{E} = \vec{E}_x = k_e \frac{2\pi Q}{L^2} \vec{i} \tag{29}$$

iv. Με απλή αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$E = 1.7 \times 10^5 \text{ N/C} \tag{30}$$

Άσκηση 8. Αφού το πεδίο είναι ομογενές, το μέτρο του είναι σταθερό παντού. Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο μέσα στο πεδίο είναι

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \tag{31}$$

και άρα

$$a_y = -1.756 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \tag{32}$$

Η αρχική ταχύτητα u_0 έχει δυο συνιστώσες $u_{0x} = u_0 \cos(45^o)$ και $u_{0y} = u_0 \sin(45^o)$. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά προς τα θετικά του άξονα y. Άρα το ηλεκτρόνιο έχει αρνητική επιτάχυνση που προκαλεί μείωση της $y-$συνιστώσας της ταχύτητας. Απαιτούμε $u_{1y} = 0$ ώστε να μη χτυπήσει στην πλάκα. Από τις εξισώσεις της κινητικής,

$$u_{1y}^2 = u_{0y}^2 + 2a_y \Delta y \Rightarrow 0 = u_{0y}^2 + 2a_y \Delta y \tag{33}$$

$$u_{0y} = \sqrt{-2a_y \Delta y} = \sqrt{-2(-1.756 \times 10^{15} \times 0.02)} \tag{34}$$

$$= 8.381 \times 10^6 \text{ m/s} \tag{35}$$

και άρα

$$u_0 = \frac{8.381 \times 10^6}{\sin(45^o)} = 1.19 \times 10^7 \text{ m/s} \tag{36}$$

Άσκηση 9 - bonus 10%.

BONUS! - Δεν την αποκαλύπτουμε! :-)