ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1. Θεωρούμε ως χρονικό σημείο αναφοράς τη στιγμή που ξεκινά η Porsche. Τότε, το Honda έχει ήδη ξεκινήσει - ένα δευτερόλεπτο νωρίτερα. Ο χρόνος που απαιτείται για την Porsche βρίσκεται από τη σχέση

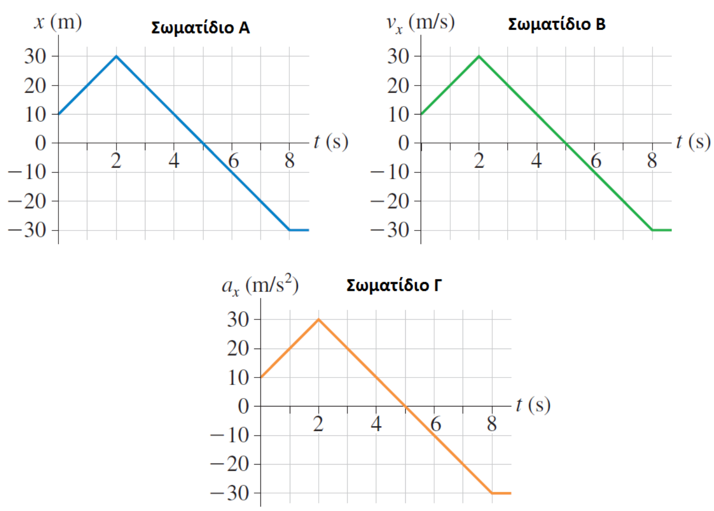
$$x_P = x_{P_0} + u_{P_0}t + \frac{1}{2}a_P t^2 \tag{1}$$
$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.5t^2 \tag{2}$$
$$t = 15.1 \text{ s} \tag{3}$$

Για το Honda, είναι αντίστοιχα

$$x_H = x_{H_0} + u_{H_0}t + \frac{1}{2}a_H t^2 \tag{4}$$
$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3(t+1)^2 \tag{5}$$
$$t = 15.3 \text{ s} \tag{6}$$

Άρα η Porsche κερδίζει. Προσέξτε ότι αν θεωρήσουμε ώς χρονική αναφορά το χρόνο εκκίνησης του Honda, δε θα μπορούσαμε να εφαρμοόσουμε τις εξισώσεις για την Porsche, αφού για το πρώτο δευτερόλεπτο, το αμάξι θα ήταν ακίνητο, και μετά θα έκανε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Συνολικά, η κίνηση αυτή ΔΕΝ περιγράφεται από τις παραπάνω εξισώσεις!

Άσκηση 2. Το διάγραμμα του σωματιδίου Α είναι μια ευθεία γραμμή από $t = 2$ ως $t = 8$ s. Η κλίση της



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

είναι -10 m/s, που είναι η ταχύτητα του σωματιδιου για $t = 7$ s. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει κίνηση προς χαμηλότερες τιμές του άξονα x. Η ταχύτητα του σωματιδίου Β για $t = 7$ s μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το διάγραμμα. Είναι -20 m/s. Η ταχύτητα για το σωματίδιο Γ μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$u_f = u_i + \text{ εμβαδόν της καμπύλης ταχύτητας μεταξύ } t_i \text{ και } t_f.$$

Το συνολικό εμβαδό είναι $40 + 45 - 20 = 75$ m/s.

Άσκηση 3.

i. Το πρόβλημα είναι διττό: αρχικά, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία που δίνεται για να βρούμε την επιτάχυνση κατά το φρενάρισμα. Δεύτερον, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την επιτάχυνση για να βρούμε την απόσταση που απαιτείται για να σταματήσει, δεδομένης της διαφορετικής αρχικής ταχύτητας. Αρχικά, το αυτοκίνητο προχωρά με σταθερή ταχύτητα πριν φρενάρει:

$$x = x_0 + u_0 t = u_0 t = 15 \text{ m} \tag{7}$$

Τότε, το αυτοκινητο φρενάρει. Επειδή δεν ξέρουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u^2 = u_1^2 + 2a_1\Delta x \Rightarrow a_1 = -\frac{u_1^2}{2\Delta x} = -10 \text{ m/s}^2 \tag{8}$$

Χρησιμοποιήσαμε $u_1 = u_0 = 30$ m/s. Προσέξτε το αρνητικό πρόσημο, επειδή το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει προς τα αριστερά. Επαναλαμβάνουμε τώρα με $u_0 = 40$ m/s. Η απόσταση μέχρι το φρενάρισμα είναι

$$x_1 = u_0 t = 20 \text{ m} \tag{9}$$

Η θέση x_2 μετά το φρενάρισμα είναι

$$u_2^2 = u_1^2 + 2a_1\Delta x \Rightarrow \Delta x = -\frac{40^2}{2(-10)} = 80 \text{ m} \tag{10}$$

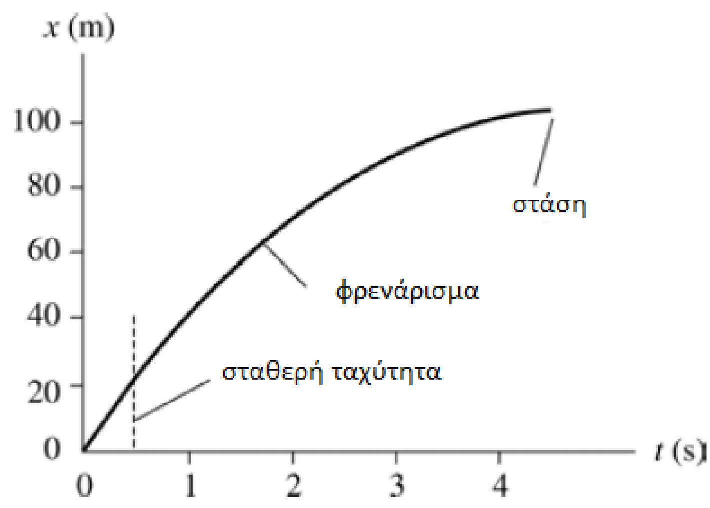
Άρα

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = 80 + 20 = 100 \text{ m} \tag{11}$$

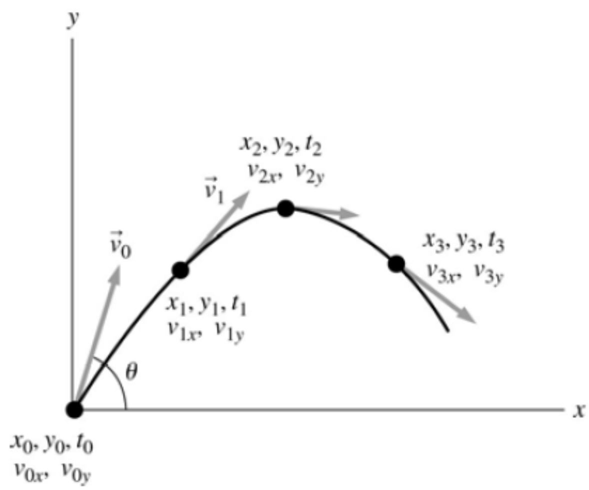
ii. Το αυτοκίνητο διανύει με σταθερή ταχύτητα τα πρώτα 0.5 s, ταξιδεύοντας για 20 m. Το διάγραμμα θα είναι μια ευθεία γραμμή με κλίση 40 m/s. Για $t \geq 0.5$, το διάγραμμα θα είναι μια παραβολή, μέχρι το σημείο που το αυτοκίνητο σταματά (χρονική στιγμή t_2). Μπορούμε να βρούμε αυτή τη στιγμή ως

$$u_2 = u_1 + a_1(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = t_1 = \frac{u_1}{a_1} = 4.5 \text{ s} \tag{12}$$

Η παραβολή θα έχει μηδενική κλίση $u = 0$ σε χρόνο $t = 4.5$ s. Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Διάγραμμα Άσκησης 3.



Σχήμα 3: Διάγραμμα Άσκησης 4.

Άσκηση 4. Δείτε το Σχήμα 3.

i. Ξέρουμε το διάνυσμα ταχύτητας της μπάλας όταν $t = 1$ s. Η μπάλα στο ψηλότερό της σημείο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 2$ s. Εκεί λοιπόν πρέπει $u_y = 0$. Η οριζόντια ταχύτητα είναι σταθερή στη διάρκεια της κίνησης, έτσι $u_x = 2$ m/s, για κάθε χρονική στιγμή. Αρα $\vec{u}_2 = 2\vec{i}$ m/s, για $t = 2$ s. Παρατηρούμε ότι η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας άλλαξε κατά $\Delta u_y = -2$ m/s ανάμεσα στις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 2$ s. Επειδή η επιτάχυνση στον $y-$άξονα είναι σταθερή - βαρυτική επιτάχυνση - η u_y αλλάζει κατά -2 m/s σε οποιοδήποτε διάστημα διάρκειας ενός δευτερολέπτου. Τη χρονική στιγμή $t = 3$ s, η u_y είναι 2 m/s μικρότερη από τη (μηδενική) τιμή της τη χρονική στιγμή $t = 2$ s. Για $t = 0$, η u_y πρέπει να είναι 2 m/s μεγαλύτερη από την τιμή της τη χρονική στιγμή $t = 1$ s. Κατά συνέπεια, έχουμε συνολικά:

$$t = 0 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} + 4\vec{j} \text{ m/s} \tag{13}$$

$$t = 1 : \vec{u}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \text{ m/s} \tag{14}$$

$$t = 2 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} + 0\vec{j} \text{ m/s} \tag{15}$$

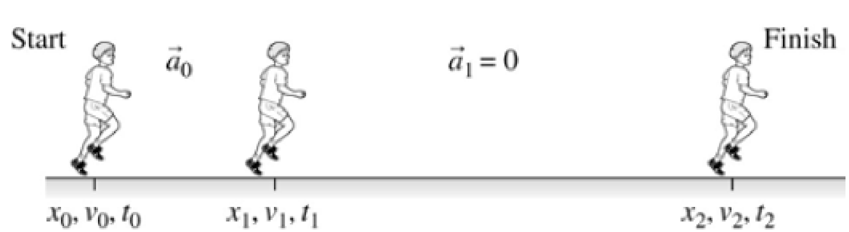
$$t = 3 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s} \tag{16}$$

ii. Επειδή η u_y αλλάζει με ρυθμό -2 m/s ανά δευτερόλεπτο, η $y-$συνιστώσα της επιτάχυνσης πρέπει να είναι $a_y = -2$ m/s^2. Όμως η a_y είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο θάλαμο, άρα η βαρυτική επιτάχυνση του θαλάμου είναι $g = 2$ m/s^2.

iii. Από το πρώτο υποερώτημα, οι συνιστώσες τη χρονική στιγμή $t = 0$ μας δίνουν

$$\theta = \tan^{-1}\frac{u_{0y}}{u_{0x}} = \tan^{-1} 2 = 63^o \tag{17}$$

Άσκηση 5. Δείτε το παρακάτω σχήμα και τις μεταβλητές του.



i. Από τη σχέση σταθερής ταχύτητας για την απόσταση $x_1 \to x_2$ έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{100 - x_1}{u_1} + \frac{10}{3} \tag{18}$$

Ας βρούμε τώρα τις ταχύτητες και θέσεις, ως εξής:

$$u_1 = u_0 + a_0(t_1 - t_0) = 0 + 3.6\frac{10}{3} = 12 \text{ m/s} \tag{19}$$

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.6\Big(\frac{10}{3}\Big)^2 = 20 \text{ m} \tag{20}$$

Έτσι, έχουμε

$$t_2 = \frac{100 - 20}{12} + \frac{10}{3} = 10 \text{ s} \tag{21}$$

ii. Η μέγιστη ταχύτητα των 12 m/s σημαίνει $u_1 = 12$ m/s. Για να βρούμε την επιτάχυνση, έχουμε

$$u_1 = u_0 + a_0(t_2 - t_1) \Rightarrow 12 = 0 + a_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{12}{a_0} \tag{22}$$

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}a_0 t_1^2 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 \tag{23}$$

Αφού

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_1(t_2 - t_1)^2 \tag{24}$$

έχουμε

$$100 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 + 12(9.9 - t_1) \tag{25}$$

Άρα

$$100 = \frac{1}{2}a_0\Big(\frac{12}{a_0}\Big)^2 + 12\Big(9.9 - \frac{12}{a_0}\Big) \Rightarrow a_0 = 3.8 \text{ m/s}^2 \tag{26}$$

iii. Από τα παραπάνω ερωτήματα βλέπουμε ότι η επιτάχυνση πρέπει να αυξηθεί από 3.6 σε 3.8 m/s^2 ώστε ο χρόνος του αθλητή να μειωθεί από 10 σε 9.9 s. Αυτή η μείωση είναι της τάξης του 1%. Η μείωση του χρόνου κατά 1% αντιστοιχεί σε αύξηση της επιτάχυνσης κατά

$$\frac{3.8 - 3.6}{3.6} \times 100\% = 5.6\% \tag{27}$$

iv. (α΄) Η επιτάχυνση είναι η χρονική παράγωγος της ταχύτητας, δηλ.

$$a_x = \frac{du_x}{dx} = \frac{d}{dx}(a(1 - e^{-bt}) = abe^{-bt} \tag{28}$$

Με τις δοθείσες τιμές, έχουμε $a_x = 8.314e^{-0.6887t}$ m/s^2. Τις χρονικές στιγμές $t = 0, 2, 4$ s, η τιμή της επιτάχυνσης είναι $8.134, 2.052, 0.5175$ m/s^2.

(β΄) Αφού $u_x = a - ae^{-bt}$, έχουμε

$$x(t) = \int_0^t (a - ae^{-bu})du \tag{29}$$

$$= at + \frac{a}{b}e^{-bt} - \frac{a}{b} \tag{30}$$

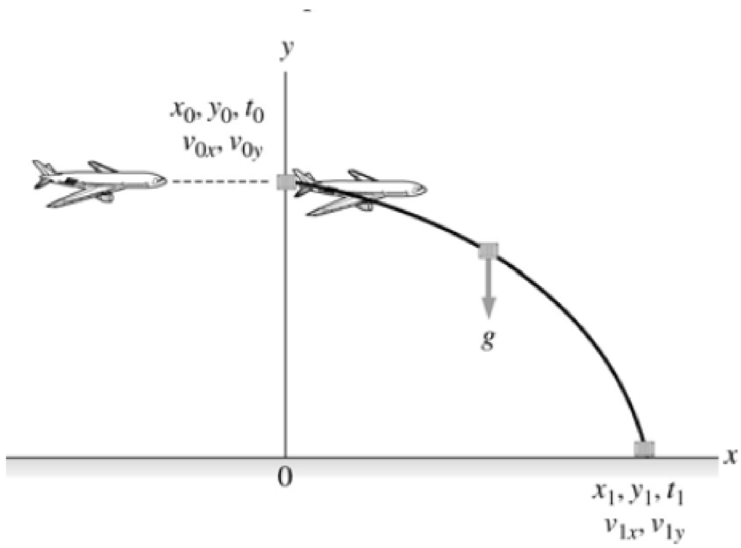
$$= \frac{a}{b}(bt + e^{-bt} - 1) \tag{31}$$

$$= 17.15(0.6887t + e^{-0.6887t} - 1) \text{ m} \tag{32}$$

(γ΄) Με δοκιμές, για $t = 9.92$ s, έχουμε $x = 100.0$ m.

Άσκηση 6 - bonus 10%
BONUS! - Δεν την αποκαλύπτουμε! :-)

Άσκηση 7. Δείτε το παρακάτω σχήμα.



Για την κίνηση στον οριζόντιο άξονα, έχουμε

$$x_1 = x_0 + u_{0x}t_1 + \frac{1}{2}a_x t_1^2 = 0 + 150t_1 + 0 = 150t_1 \tag{33}$$

Από την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, έχουμε

$$y_1 = y_0 + u_{0y}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{200}{9.8}} = 4.518 \approx 4.5 \text{ s} \tag{34}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε

$$x_1 = 678\text{m} \tag{35}$$

Άσκηση 8. Ο δορυφόρος εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 24 ώρες. Η ακτίνα της κίνησής του είναι $r = 6.37 \times 10^6 + 3.58 \times 10^7 = 4.22 \times 10^7$ m. Η ταχύτητα του δορυφόρου είναι

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{24 \times 60 \times 60} = 3.07 \times 10^3 \text{ m/s} \tag{36}$$

Η επιτάχυνσή του θα είναι μέτρου

$$a_r = \frac{u^2}{r} = \frac{3.07 \times 10^3}{4.22 \times 10^7} = 0.223 \text{ m/s}^2 \tag{37}$$