ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πέμπτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.

(α΄) Ορίζουμε ως $x = 0$ το σημείο που ζητείται το πεδίο. Ένας δακτύλιος με πάχος dx έχει φορτίο Qdx/l, και παράγει πεδίο στο ζητούμενο σημείο που δίνεται ως

$$d\vec{E} = \frac{k_e x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\frac{Qdx}{l}\vec{i} \tag{1}$$

Το συνολικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \int d\vec{E} = \int_d^{d+l} \frac{k_e x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\frac{Qdx}{l}\vec{i} && (2)\\
&= \frac{k_e Q\vec{i}}{2l}\int_d^{d+l}(x^2+R^2)^{-3/2}2xdx && (3)\\
&= \frac{k_e Q\vec{i}}{2l}\frac{(x^2+R^2)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_d^{l+d} && (4)\\
&= \frac{k_e Q}{2l}\left[\frac{1}{(d^2+R^2)^{1/2}} - \frac{1}{((d+l)^2+R^2)^{1/2}}\right]\vec{i} && (5)
\end{aligned}$$

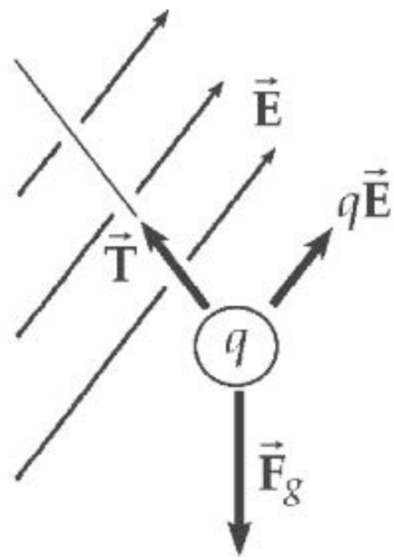
(β΄) Σκεφτείτε τον κύλινδρο σαν ένα σύνολο από δίσκους, καθένας με πάχος dx, φορτίο Qdx/l και επιφανειακό φορτίο $\sigma = Qdx/\pi R^2 l$. Ένας δίσκος παράγει πεδίο

$$d\vec{E} = \frac{2\pi k_e Qdx}{\pi R^2 l}\left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right)\vec{i} \tag{6}$$

Οπότε το συνολικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \int d\vec{E} = \int_d^{d+l}\frac{2k_e Qdx}{R^2 l}\left(1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right)\vec{i} && (7)\\
&= \frac{2k_e Q}{R^2 l}\left[\int_d^{d+l}dx - \frac{1}{2}\int_d^{d+l}(x^2+R^2)^{-1/2}2xdx\right]\vec{i} && (8)\\
&= \frac{2k_e Q}{R^2 l}\left[x\Big|_d^{d+l} - \frac{1}{2}\frac{(x^2+R^2)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_d^{d+l}\right]\vec{i} && (9)\\
&= \frac{2k_e Q}{R^2 l}\left[l + (d^2+R^2)^{1/2} - ((d+l)^2+R^2)^{1/2}\right]\vec{i} && (10)
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.
Οι δυνάμεις που ασκούνται φαίνονται στο Σχήμα. Ο 2ος νόμος του Newton μας δίνει οτι



$$\Sigma\vec{F} = \vec{T} + q\vec{E} + \vec{F}_g = 0 \tag{11}$$

Ξέρουμε ότι

$$E_x = 3 \times 10^5 \text{ N/C} \tag{12}$$
$$E_y = 5 \times 10^5 \text{ N/C} \tag{13}$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες, έχουμε

$$\Sigma F_x = qE_x - T\sin(37) = 0 \tag{14}$$
$$\Sigma F_y = qE_y + T\cos(37) - mg = 0 \tag{15}$$

Λύνουμε ως προς T και έχουμε

$$T = \frac{qE_x}{\sin 37} \tag{16}$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$q = \frac{mg}{E_y + \frac{E_x}{\tan 37}} = 1.1 \times 10^{-8} \text{ N/C} \tag{17}$$

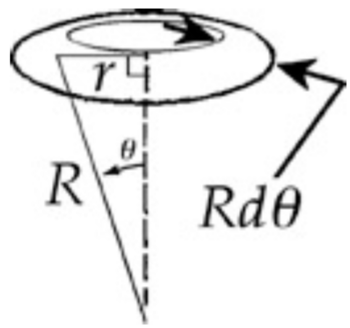
Με χρήση του παραπάνω αποτελέσματος, έχουμε

$$T = \frac{qE_x}{\sin 37} = 5.44 \times 10^{-3} \text{ N} \tag{18}$$

Άσκηση 3. Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ εξ' αιτίας του φορτίου είναι ομοιόμορφο και δείχνει ακτινικά προς τα έξω, άρα

$$\Phi_E = EA \tag{19}$$

Το μήκος του τόξου ενός μικρού δακτυλιοειδούς στοιχείου όπως στο σχήμα, είναι $ds = Rd\theta$, και η περιφέρειά του είναι $2\pi r = 2\pi R \sin\theta$. Το εμβαδό του καπακιού είναι



$$\begin{aligned} A &= \int 2\pi r ds = \int_0^\theta (2\pi R \sin\theta) R d\theta && (20) \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\theta \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 (-\cos\theta)\Big|_0^\theta = 2\pi R^2 (1-\cos\theta) && (21) \end{aligned}$$

Άρα η ηλεκτρική ροή είναι

$$\Phi_E = EA = k_e \frac{Q}{R^2} 2\pi R^2 (1-\cos\theta) = \frac{Q}{2\epsilon_0}(1-\cos\theta) \tag{22}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Το δυναμικό από τα δυο φορτία κατά μήκος του άξονα x είναι

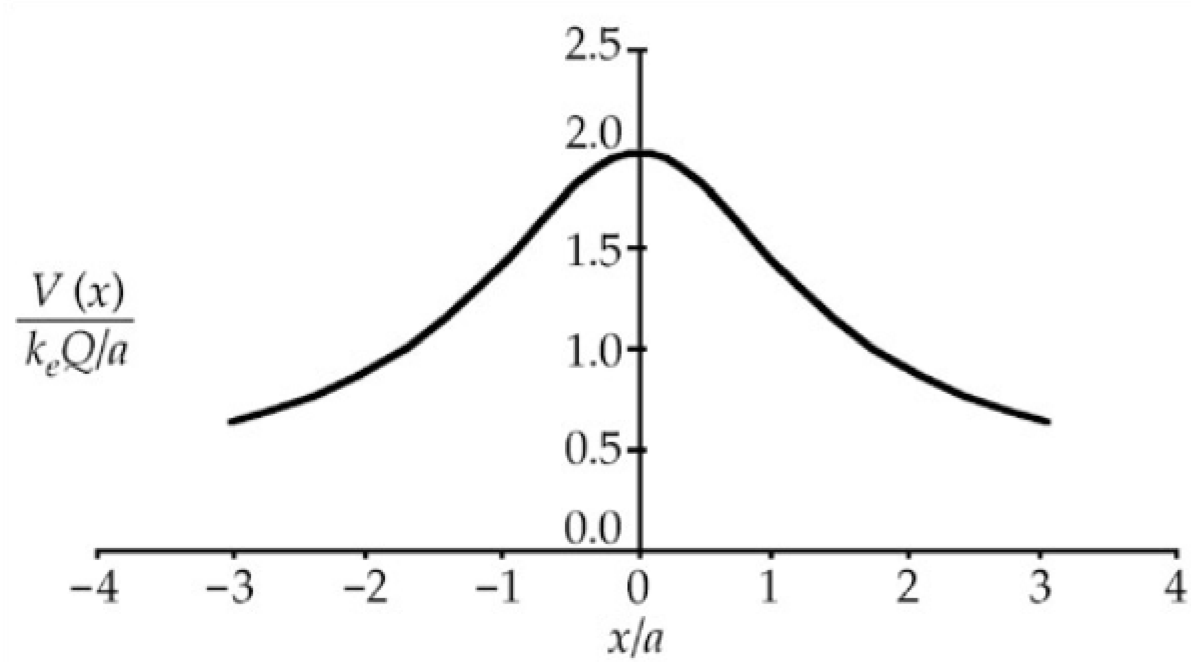
$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2+(-a)^2}} && (23) \\ &= \frac{2k_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k_e Q}{a} \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2+1}} && (24) \\ \frac{V(x)}{k_e Q/a} &= \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2+1}} && (25) \end{aligned}$$

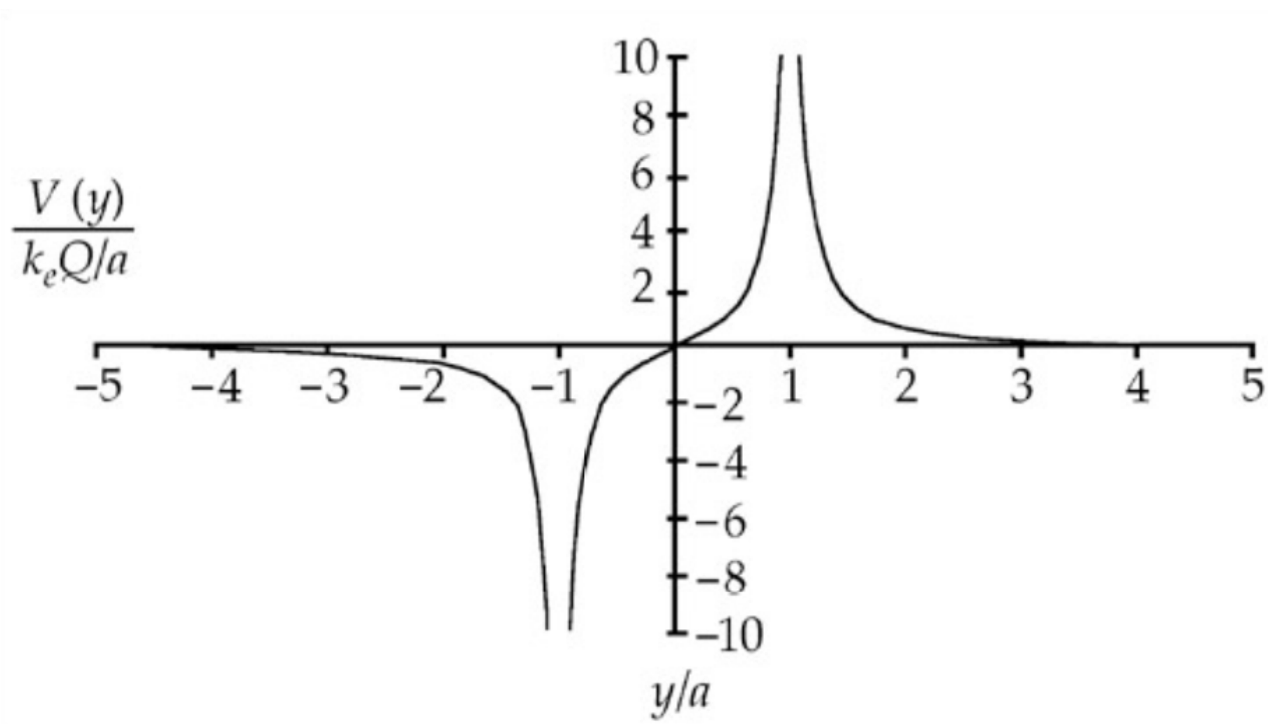
Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα παρακάτω.

(β΄) Το δυναμικό κατά μήκος του y άξονα είναι

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{|y-a|} + \frac{-k_e Q}{|y+a|} && (26) \\ &= \frac{k_e Q}{a}\Big(\frac{1}{|y/a-1|} - \frac{1}{|y/a+1|}\Big) && (27) \\ \frac{V(x)}{k_e Q/a} &= \Big(\frac{1}{|y/a-1|} - \frac{1}{|y/a+1|}\Big) && (28) \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.





Άσκηση 5.

(α΄) Ως γραμμική πυκνότητα φορτίου, η λ έχει μονάδες C/m. Άρα η σταθερά a θα έχει μονάδες C/m^2.

(β΄) Θεωρήστε ένα μικρό κομμάτι της ράβδου στη θέση x και μήκους dx. Το ποσό φορτίου που βρίσκεται σε αυτό είναι $\lambda dx = axdx$. Η απόστασή του από το σημείο Α είναι $d + x$, άρα η συνεισφορά του ηλεκτρικού δυναμικού στο σημείο Α είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{axdx}{d+x} \tag{29}$$

Αν θεωρήσουμε μηδενικό δυναμικό στο άπειρο, για να βρούμε το δυναμικό στο σημείο Α πρέπει να ολοκληρώσουμε όλες τις συνεισφορές από όλα τα μικρά τμήματα ράβδου, από το $x = 0$ ως το $x = L$. Έτσι,

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^L \frac{k_e a x}{d+x} dx && (30) \\ &= \int_d^{d+L} \frac{k_e a(u-d)}{u} du && (31) \\ &= k_e a \int_d^{d+L} du - k_e a d \int_d^{d+L} \frac{1}{u} du && (32) \\ &= k_e a(d+L-d) - k_e a d(\ln(d+L) - \ln(d)) && (33) \\ &= k_e a \Big[L - d \ln\Big(1 + \frac{L}{d}\Big)\Big] && (34) \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη γραμμή κάναμε αλλαγή μεταβλητής $u = d + x \Longrightarrow du = dx$, $u_1 = d$, $u_2 = d + L$.