ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τέταρτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Μια νυχτερίδα εντοπίζει έντομα εκπέμποντας υπερηχητικά σήματα και στην συνέχεια ακούει την ηχώ τους. Έστω ότι ένα τέτοιο σήμα έχει συνχνότητα $25kHz$. Πόσο γρήγορα πρέπει να πετάει η νυχτερίδα και προς ποια κατεύθυνση έτσι ώστε ένας παρατηρητής να μπορεί μετά βίας να ακούσει ένα σήμα στα $20kHz$;

Λύση

Τα ηχητικά κύματα που αποστέλει η νυχτερίδα μεταβάλονται λόγω του φαινομένου Doppler. Η συνχότητα αυξάνεται καθώς η νυχτερίδα προσεγγίζει τα έντομα και μειώνεται καθώς απομακρύνεται.

Επομένως θα πρέπει να απομακρυνθεί από τον παρατηρητή ώστε η συχνότητα των παρατηρούμενων σημάτων να γίνει μικρότερη των 25 kHz. Άρα

$$f_i = \frac{f_0}{1 + v_S/v} \Rightarrow 20.000 \text{ Hz} = \frac{25,000 \text{ Hz}}{1 + \frac{v_S}{340 \text{ m/s}}} \Rightarrow v_s = 85,25 \text{ m/s}$$

Άσκηση 2.
Η ένταση του ήχου $5m$ μακρυά από μια μουσική σκηνή είναι $100dB$. Σε ποια απόσταση θα είναι έχει ο ήχος την περισσότερο ανεκτή ένταση των $80dB$;

Λύση

Θεωρούμε τους ήχους που προκύπτουν λόγω ηχητικών ανακλάσεων αμετλητέους. Παρατηρούμε ότι

$$\beta_1 - \beta_2 = 20 \text{ dB} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10 \cdot 10 = 100$$

Μια μεταβολή 10 dB αντιστοιχεί σε μεταβολή επί 10 στην ένταση του ήχου. Εν συνεχεία

$$I_1 A_1 = P_1 \Rightarrow P = I_2 A_2 \Rightarrow A_2 = P/I_2$$

Επομένως

$$R_2 = \sqrt{\frac{A_2}{4\pi}} = \sqrt{\frac{\frac{P}{I_2}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{\frac{I_1 A_1}{I_2}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{\frac{I_1}{I_2}(4\pi R_1^2)}{4\pi}} = R_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = R_1\sqrt{100} = (5.0 \text{ m})10 = 50 \text{ m}$$

Άσκηση 3.
Ένας εκκεντρικός γιατρός πιστεύει ότι μπορεί να θεραπεύσει την φαλάκρα ζεσταίνοντας το κρανίο με ηχητικά κύματα. Οι ασθενείς του κάθονται κάτω από μεγάφωνα[1], όπου τα κεφάλια τους βομβαρδίζονται με $93dB$ καταπραΰντικων ηχητικών κυμάτων των $800Hz$. Έστω ότι μοντελοποιούμε το φαλακρό κεφάλι ως ένα ημισφαίριο με διάμετρο $16cm$. Αν τα $10J$ ηχητικής ενέργεια θεωρούνται κατάλληλη δοσολογία, πόσα λεπτά πρέπει να διαρκεί μια επίσκεψη στον γιατρό ;

Λύση

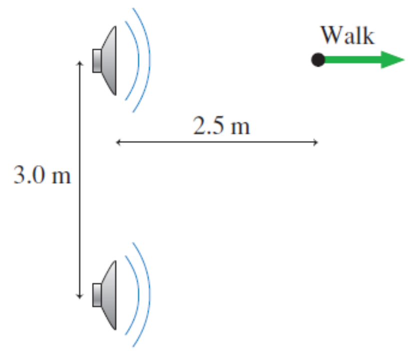
Σύμφωνα με την εκφώνηση θεωρούμε το φαλακρό κεφάλι ως ημισφαίριο με ακτίνα $R = 0,08$ m. Αυτό συνεπάγεται ότι το εμβαδόν της επιφάνειας είναι $A = 2\pi R^2 = 0.0402 \text{ m}^2$.

Γνωρίζουμε ότι $\beta = 93$ dB και $\Delta E = 0.10$ J. Επίσης γνωρίζουμε ότι $I = I_0 \times 10^{\beta/10 \text{ dB}}$, $P = IA$ όπως και $P = \Delta E \Delta t$. Επομένως

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{\Delta E}{IA} = \frac{\Delta E}{(I_0 \times 10^{\beta/10 \text{ dB}})} = \frac{0.1 \text{ J}}{(10^{-12} \text{ W/m}^2 \times 10^{9,3})(0.0402 \text{ m}^2)} = 1250 \text{ s} = 21 \text{ min}$$

[1]Μάρκας Bald-o-Matic.

Άσκηση 4.
Καθόμαστε 2.5 m μπροστά από ένα ηχείο (όπως φαίνεται στο σχήμα). Τα ηχεία μεταξύ τους έχουν απόσταση 3 m και εκπέμπουν ήχο με συχνότητα 686 Hz στην ίδια φάση. Καθώς απομακρυνόμαστε από τα ηχεία σε ποια απόσταση θα ακούμε την ήχο με την ελάχιστη ένταση ;



Λύση

Η αλλαγή στην ένταση του ήχου οφείλεται στη συμβολή των δύο αλληλοεπικαλυπτόμενων ηχητικών κυμάτων. Η ελάχιστη ένταση υπονοεί καταστρεπτική συμβολή, η οποία συμβαίνει όταν η διαφορά του μήκους του μονοπατιού των δύο κυμάτων είναι $\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Υποθέτουμε ότι $\Delta\varphi_0 = 0$ rad για τα ηχεία που εκπέμπουν ακριβώς τον ίδιο τόνο. Το μήκος κύματος του ήχου είναι $\lambda = v_{sound}/f = (340\ \mathrm{m/s})/(680\ \mathrm{Hz}) = 0.5$ m. Θεωρούμε ένα σημείο που έχει απόσταση x από το ένα ηχείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, και θέτουμε r_1 την απόσταση αυτού του σημείο από το ένα ηχείο και r_2 από το άλλο. Άρα

$$r_1 = x \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (3\ \mathrm{m})^2}$$

Η καταστρεπτική συμβολή συμβαίνει σε απόσταση x τέτοια ώστε

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + 9\ \mathrm{m}^2} - x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Λύνουμε ως προς x

$$x^2 + 9\ \mathrm{m} = \left[x + \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\right]^2 = x^2 + 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda x + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2 \Rightarrow x = \frac{9\ \mathrm{m} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}{2\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Υπολογίζουμε το x για διαφορετικές τιμές του m

m	$x(m)$
0	17.88
1	5.62
2	2.98
3	1.79

Καθώς η αρχική μας θέση είναι στα $x = 2.5$ m και απομακρυνόμαστε από τα ηχεία, θα ακούσουμε τα ελάχιστα για τιμές $x > 2.5$ m. Επομένως η ελάχιστη ένταση του ήχου εμφανίζεται στα σημεία 2.98 m, 5.62 m και $17,88$ m.

Άσκηση 5.

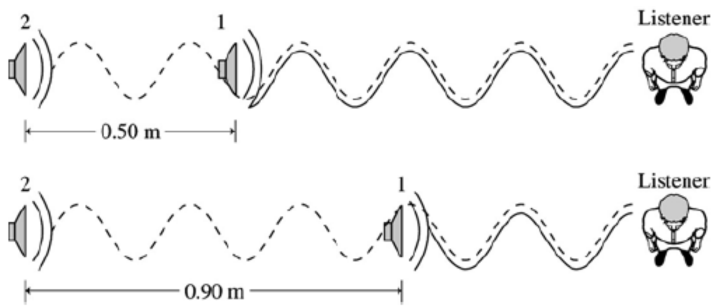
Δύο ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα κατα μήκος του άξονα $x'x$. Ένας ακροατής, που κάθεται μπροστά από τα δύο ηχεία, ακούει την μέγιστη ένταση όταν το ηχείο 2 βρίσκεται στο σημείο $x = 0$ m και το ηχείο ένα $x = 0.5$ m. Όταν το ηχείο 1 μετακινείται αργά προς τα δεξιά, η ένταση του ήχου αρχικά μειώνεται και ύστερα αυξάνεται, φτάνοντας ένα άλλο μέγιστο όταν το ηχείο 1 βρίσκεται στην θέση $x = 0.9$ m.

1. Ποια είναι η συνχότητα του ήχου; Υποθέτουμε ότι $v_{sound} = 340$ m/s.

2. Ποια είναι η διαφορά φάσης ανάμεσα στα δύο ηχεία ;

Λύση

Η ανάμειξη συμβαίνει κατά την διαφορά ανάμεσα στις φάσεις των δυο κυμάτων.



1. Η διαφορά φάσης ανάμεσα στα ηχητικά κύματα των δυο ηχείων είναι

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} + \Delta\varphi_0$$

Έχουμε την μέγιστη συχνότητα όταν $\Delta x = 0.5$ m και $\Delta x = 0.9$ m. Επομένως

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{0.5\text{ m}}{\lambda}\right) + \Delta\varphi_0 = 2m\pi, \qquad 2\pi\left(\frac{0.9\text{ m}}{\lambda}\right) + \Delta\varphi_0 = 2(m+1)\pi\text{ rad} \tag{1}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$2\pi\left(\frac{0.4\text{ m}}{\lambda}\right) = 2\pi \Rightarrow \lambda = 0.4\text{ m} \Rightarrow f = \frac{v_{sound}}{\lambda} = \frac{340\text{ m/s}}{0.4\text{ m}} = 850\text{ Hz}$$

2. Από τις εξισώσεις (1) βρίσκουμε

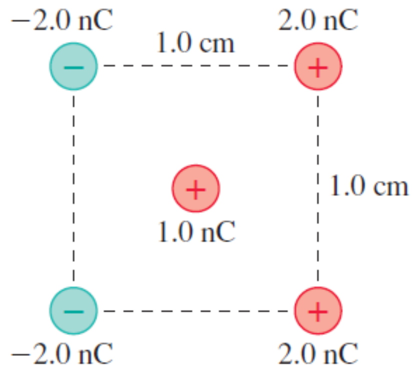
$$2\pi\left(\frac{0.4\text{ m}}{0.5\text{ m}}\right) + \Delta\varphi_0 = 2m\pi\text{ rad} \Rightarrow \Delta\varphi_0 = \varphi_{20} - \varphi_{10} = -\frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

Στην τελευταία εξίσωση βάλαμε $m = 1$ καθώς πάντοτε υπολογίζουμε την φάση στο εύρος από $-\pi$ έως π (ή από 0 έως 2π).[2]

[2] Θα μπορούσαμε αντί για $m = 1$ να βάλουμε $m = 2$ το οποίο θα έδινε το ισοδύναμο αποτέλεσμα $-\frac{3}{2}\pi$ rad.

Άσκηση 6.

Πόση είναι η δύναμη $\vec{F}$ στο 1 nC φορτίο, βρίσκεται στο μέσο του παρακάτω σχήματος εξαιτίας των υπολοίπων τεσσάρων φορτίων; Δώστε την απάντηση σας υπό την μορφή συνιστωσών.



Λύση

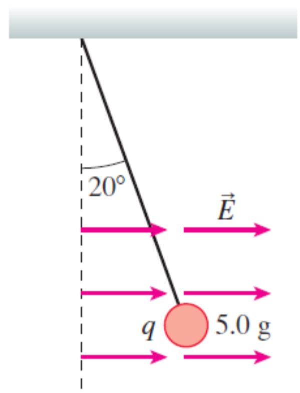
Τοποθετούμε το φορτίο q_1 στην αρχή των αξόνων και τα q_2, q_3, q_4, q_5 στο πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο αντίστοιχα. Η ηλεκτρική ενέργεια στο q_1 είναι το διάνυσμα του αθροίσματων των ηλεκτρικών ενεργειών των υπολοίπων τεσσάρων φορτίων. Το μέγεθος των περιμετρικών φορτίων είναι το ίδιο και για τα τέσσερα καθώς οι φορτίσεις του είναι ίσες (κατά απόλυτη τιμή) και ισαπέχουν από το q_1. Επομένως

$$F_{2\text{ on }1} = F_{3\text{ on }1} = F_{4\text{ on }1} = F_{5\text{ on }1} = \frac{(9\times 10^9\ \text{Nm}^2/\ \text{C}^2)(2\times 10^{-9}\ \text{C})(1\times 10^{-4}\ \text{C})}{(0.5\times 10^{-2}\ \text{m})^2 + (0.5\times 10^{-2}\ \text{m})^2} = 3.6\times 10^{-4}\ \text{N}$$

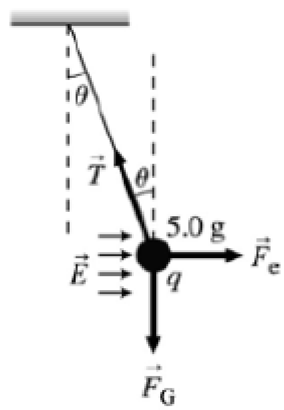
Άρα $\vec{F}_{\text{on }1} = (3.6\times 10^{-4}\ \text{N}$, απομακρυνόμενη από το $q_2) + (3.6\times 10^{-4}\ \text{N}$, απομακρυνόμενη από το $q_3) + (3.6\times 10^{-4}\ \text{N}$, απομακρυνόμενη από το $q_4) + (3.6\times 10^{-4}\ \text{N}$, απομακρυνόμενη από το $q_5)$. Αναλύοντας σε συνιστώσες παίρνουμε

$$\vec{F}_{\text{on }1} = F_{\text{on }1}\Big(\Big[-\cos(45°)\vec{i} - \sin(45°)\vec{j}\Big] + \Big[-\cos(45°)\vec{i} + \sin(45°)\vec{j}\Big] + \Big[-\cos(45°)\vec{i} - \sin(45°)\vec{j}\Big] + \Big[-\cos(45°)\vec{i} + \sin(45°)\vec{j}\Big]\Big) = (3.6\times 10^{-4}\ \text{N})(-4\cos(45°)\vec{j} = -1\times 10^{-3}\vec{i}\ \text{N}.$$

Άσκηση 7.
Ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = 100000\hat{i}$ N/C προκαλεί σε ένα σωματίδιο 5 g φόρτιση τέτοια ώστε να κρέμεται υπό γωνία 20°. Πόση είναι η φόρτιση στο σωματίδιο ;



Λύση
Θεωρούμε την φόρτιση του σωματιδίου ότι περιγράφεται ως σημειακή φόρτιση.



Το σωματίδιο ισορροπεί στο ηλεκτρικό πεδίο όταν το νήμα σχηματίζει γωνία 20° με τον οριζόντιο άξονα. Οι τρείς δυνάμεις που δρούν στην φορτισμένη μπάλα είναι η ηλεκτρική δύναμη του πεδίου, η βαρύτητα και η τάση του νήματος. Από τον δεύτερο νόμο του Newton, για το σωματίδιο, έχουμε $\vec{F}_{net} = \vec{T} + \vec{F}_G + \vec{F}_e = \vec{0}$ και αναλύωντας σε συνιστώσες παίρνουμε

$$(F_{net})_x = T_x + 0 \text{ N} + qE = 0 \text{ N}, \qquad (F_{net})_y = T_y - mg + 0 \text{ N} = 0 \text{ N}$$

Άρα

$$T \sin\theta = qE, \qquad T\cos\theta = mg$$

Διαιρούμε κατά μέλη

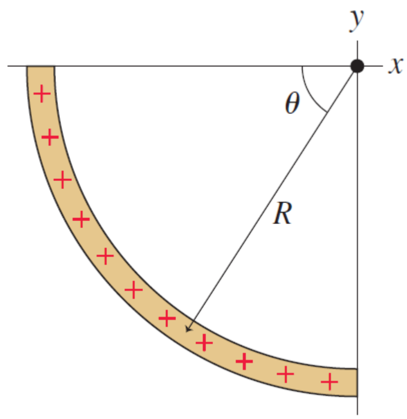
$$\tan\theta = \frac{qE}{mg} \Rightarrow q = \frac{mg\tan\theta}{E} = \frac{(5 \times 10^{-3} \text{ kg})(9.8 \text{ N/kg})\tan 20^\circ}{100000 \text{ N/C}} = 1.78 \times 10^{-7} \text{ C} = 0.18\mu \text{ C}$$

Άσκηση 8.
Μια πλαστική ράβδος με γραμμική φόρτιση πυκνότητας λ λυγίζεται σε τεταρτοκύκλιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων

1. Γράψτε παραστάσεις για τις x και y συνιστώσες στην αρχή των αξόνων, οι οποίες οφείλονται σε μια μικρή φόρτιση υπό γωνία $\hat{\theta}$.

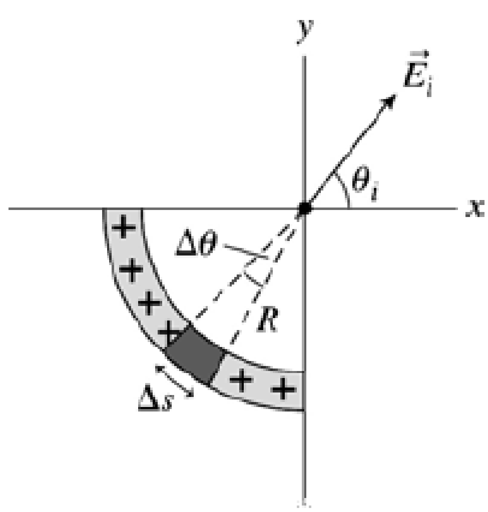
2. Γράψτε, χωρίς να τα υπολογίσετε, τα αόριστα ολοκληρώματα των x και y συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων.

3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα και βρείτε το $\vec{E}_{net}$ υπό την μορφή συνιστωσών.



Λύση

Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου. Χωρίζουμε την ράβδο σε αρκετά μικρά τμήματα φόρτισης Δq και με μήκος τόξου Δs.



1. Το τμήμα i δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_i$ στην αρχή των αξόνων με δύο συνιστώσες

$$(E_i)_x = E_i \cos\theta_i \qquad (E_i)_y = E_i \sin\theta_i$$

Παρατηρούμε ότι η γωνία $\hat{\theta}_i$ εξαρτάται από την θέση του τμήματος i. Όλα τα τμήματα έχουν απόσταση $r_i = R$ από την αρχή των αξόνων

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{R}$$

Η πυκνότητα της γραμμικής φόρτισης της ράβδου είναι $\lambda = Q/L$, όπου L είναι το μήκος της ράβδου ($L = \pi R/2$ ως τεταρτοκύκλιο). Αυτό μας επιτρέπει να σχετίσουμε την φόρτιση Δq με το μήκος τόξου Δs μέσω της σχέσης

$$\Delta q = \lambda \Delta s = \left(\frac{Q}{L}\right) \Delta s = \left(\frac{2Q}{\pi R}\right) \Delta s$$

$\Delta s = R\Delta\theta$, οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων

$$(E_i)_x = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{\Delta q}{R^2}\cos\theta_i = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{1}{R^2}\left(\tfrac{2Q}{\pi R}\right) R\Delta\theta\cos\theta_i = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\tfrac{2Q}{\pi R^2}\right)\Delta\theta\cos\theta_i$$
$$(E_i)_y = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{\Delta q}{R^2}\sin\theta_i = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{1}{R^2}\left(\tfrac{2Q}{\pi R}\right) R\Delta\theta\sin\theta_i = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\tfrac{2Q}{\pi R^2}\right)\Delta\theta\sin\theta_i$$

2. Οι x, y συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου για ολόκληρη την ράβδο είναι τα ολοκληρώματα της προηγούμενης ερώτησης από $\theta = 0$ rad έως $\theta = \pi/2$ rad. Άρα

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{\pi R^2}\right)\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta \qquad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{\pi R^2}\right)\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta$$

3. Επιλύουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1 \qquad \int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = [-\sin\theta]_0^{\pi/2} = -\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 1$$

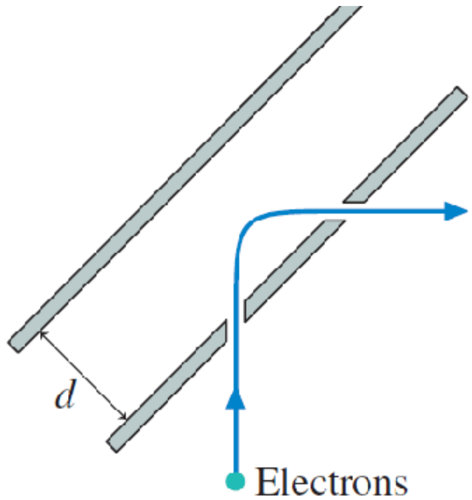
Συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi R^2}(\vec{i} + \vec{j})$$

Άσκηση 9.
Χρειάζεται να κάνουμε μια δέσμη ηλεκτρονίων να στρίψει κατα 90°. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της διάταξης του παρακάτω σχήματος. Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 3×10^{-17} J εισέρχεται απο μια μικρή οπή από το κάτω μέρος της διάταξης.

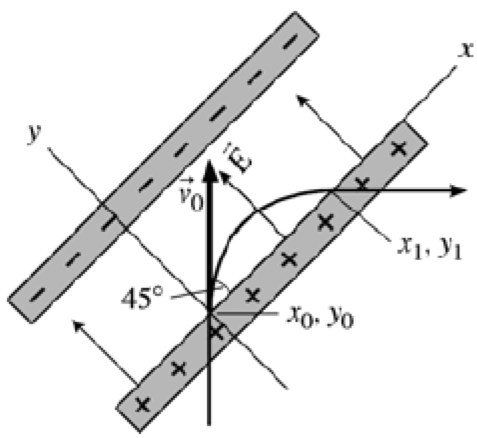
1. Πως θα πρέπει να είναι φορτισμένες οι δύο πλάκες ώστε το ηλεκτρόνιο να στρίψει δεξιά ;

2. Πόσο μέγεθος πρέπει να έχει το ηλεκτρικό πεδίο αν το ηλεκτρόνιο εξέρχεται από οπή η οποία βρίσκεται 1 cm μακρυά από την οπή εισόδου ;



Λύση

Το ηλεκτρικό πεδίο στην διάταξη είναι ομοιόμορφο, επομένως τα ηλεκτρόνια θα έχουν σταθερή επιτάχυνση.



1. Η πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης θα έχει θετική φόρτιση. Το ηλεκτρόνιο θα πρέπει να απωθηθεί από την πλάκα του άνω μέρους, δηλαδή θα πρέπει να έχει αρνητική φόρτιση. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να έχει κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα, άρα η κατεύθυνση του ηλεκτρονίου $\vec{a}$ είναι προς την πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος.

2. Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων xy ώστε ο άξονας $x'x$ να είναι παράλληλος με την πλάκα, που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης. Η αρχή των αξόνων είναι το σημείο εισόδου του ηλεκτρονίου. Τότε η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου, που είναι παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο, είναι $\vec{a} = a\vec{j}$. Για την κινητική ενέργεια έχουμε $K = \frac{1}{2}mv_0^2 = 3 \times 10^{-17}$ J η οποία μας δίνει αρχική ταχύτητα $v_0 = (2\text{ K/m})^{1/2} = 8.115 \times 10^6$ m/s. Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας, στην αρχική κατάσταση, είναι

$$v_{x0} = v_0 \cos 45^\circ = 5.72 \times 10^6 \text{ m/s} \qquad v_{y0} = v_0 \sin 45^\circ = 5.72 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Ποια επιτάχυνση $\vec{a}$ επιτρέπει στο ηλεκτρόνιο να περάσει από το σημείο $(x_1, y_1) = (1 \text{ cm}, 0 \text{ cm})$; Για τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$x_1 = x_0 + v_{x0}t_1 + \frac{1}{2}a_x t_1^2 = v_{x0}t_1 = 0.01 \text{ m} \qquad y_1 = y_0 + v_{y0}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2 = 0.01 \text{ m}$$

Από την εξίσωση στον άξονα $x'x$ βρίσκουμε $t_1 = x_1/v_{x0} = 1.742 \times 10^{-9}$ s. Συνεπώς από την εξίσωση στον άξονα $y'y$ έχουμε

$$a = \frac{2v_{y0}t_1}{t_1^2} = -6.59 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

Όμως η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου σε ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$a = \frac{F_{\text{elec}}}{m} = \frac{q_{\text{elec}}E}{m} = -\frac{eE}{m} \Rightarrow E = -\frac{ma}{e} = -\frac{(9.11 \times 10^{-31}\text{kg})(-6.59 \times 10^{15}\text{m/s}^2)}{1.6 \times 10^{-19}\text{C}} = 37.5\text{N/C}$$