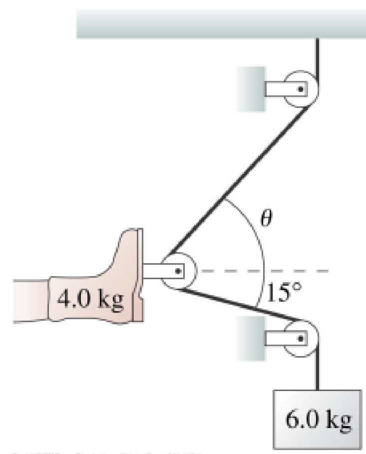
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Δεύτερο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.

Το θύμα ενός ατυχήματος έχει σπασμένο πόδι, το οποίο οι γιατροί έχουν τοποθετήσει στην ανάκληση. Ο ασθενής φοράει μια ειδική μπότα η οποία έχει μια τραχολία στη σόλα. Το πέλμα μαζί με την μπότα έχουν μάζα 4.0 kg και ο γιατρός έχει αποφασίσει να κρεμάσει μια μάζα 6.0 kg από το σκοινί. Η μπότα μένει κρεμάμενη από τα σχοινιά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και δεν ακουμπάει στο κρεβάτι.

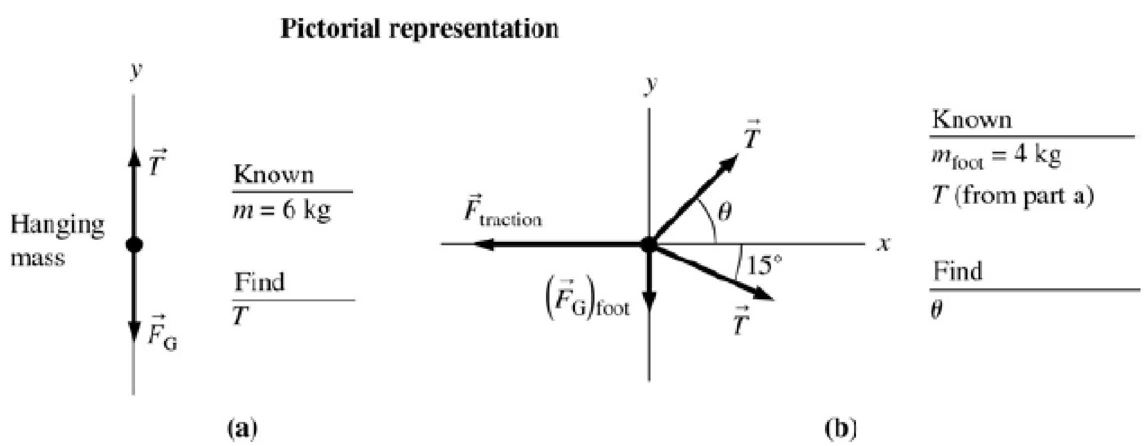


α) Βρείτε το μέτρο της τάσης στο σχοινί χρησιμοποιώντας τους νόμους του Νεύτωνα.

β) Η συνισταμένη ελκτική δύναμη που νιώθει το πόδι πρέπει να το “τραβάει” προς τα έξω. Ποια είναι η κατάλληλη γωνία θ για αυτό το σκοπό;

γ) Ποια είναι η συνισταμένη ελκτική δύναμη;

Μοντέλο. Μπορούμε να θεωρήσουμε το πέλμα ως σώμα σε ισορροπία υπό τις συνδυασμένες δυνάμεις της βαρύτητας, των τάσεων του άνω και κάτω μέρους τους σχοινιού και της δύναμης του πέλματος. Μπορούμε επίσης να διαχειριστούμε τη μάζα που κρέμεται ως ένα σώμα σε ισορροπία. Εφόσον οι τροχαλίες δεν έχουν τριβή, η τάση είναι ίδια σε όλο το μήκος του σχοινιού. Καθώς όλες οι τροχαλίες είναι σε ισορροπία η τάση του νήματος τους είναι μηδέν. Επομένως δεν συνεισφέρουν στο T.



Λύση:

α) Από το διάγραμμα (a) για την μάζα, η τάση του νήματος είναι

$$T = F_G = mg = (6\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 58.8\ \text{N}$$

β) Χρησιμοποιώντας τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα για την κατακόρυφη διεύθυνση στην τροχαλία που είναι προσαρμοσμένη στο πέλμα παίρνουμε,

$$(F_{\text{net}})_y = \sum F_y = T\sin\theta - T\sin 15^\circ - (F_G)_{\text{foot}} = 0\ \text{N}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{T\sin 15^\circ + (F_G)_{\text{foot}}}{T} = \sin 15^\circ + \frac{m_{\text{foot}}g}{T} = 0.259 + \frac{(4\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{58.8\ \text{N}} = 0.259 + 0.667 = 0.926$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1} 0.926 = 67.8^\circ$$

γ) Χρησιμοποιώντας τον πρώτο νόμο του Newton για την οριζόντια διεύθυνση έχουμε,

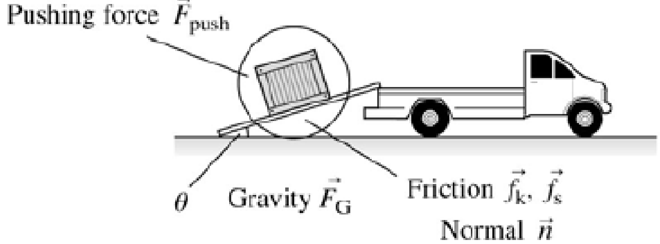
$$(F_{\text{net}})_x = \sum F_x = T\cos\theta - T\cos 15^\circ - F_{\text{traction}} = 0\ \text{N}$$

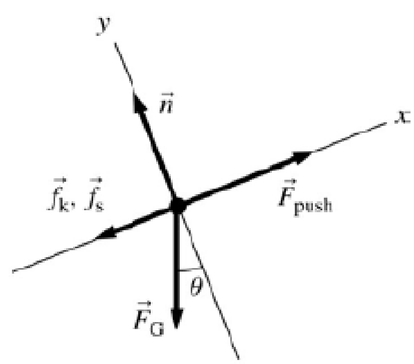
$$\Rightarrow F_{\text{traction}} = T\cos\theta - T\cos 15^\circ - T(\cos 67.8^\circ + \cos 15^\circ)$$

$$= (58.8\ \text{N})(0.3778 + 0.9659) = (58.8\ \text{N})(1.344) = (79\ \text{N})$$

Άσκηση 2.

Χρειάζεται να ανεβάσετε ένα κουτί βάρους 100 kg μέσω μιας ράμπας σε ένα φορτηγό, υπο γωνία 20°. Οι συντελεστές τριβής στο φορτηγό και στην ράμπα είναι $\mu_s = 0.90$ και $\mu_k = 0.60$ αντίστοιχα. Μπορείτε να ωθήσετε το κουτί με δύναμη που φτάνει εως τα 1000 N. Θα καταφέρετε να ανεβάσετε, χωρίς βοήθεια, το κουτί στο φορτηγό αν ξεκινάτε με αρχική ταχύτητα στην ράμπα ; Αν σταματήσετε στην ράμπα, θα είστε σε θέση να κινήσετε το κουτί ξανά ;





Λύση:

Η ωθητική δύναμη βρίσκεται κατά μήκος του Ox-άξονα, ενώ η δύναμη της τριβής κατά μήκος του $x'O$-άξονα. Το κουτί θα κινηθεί προς τα πάνω αν ασκήσουμε δύναμη το λιγότερο ίση με τον συνδυασμό των δυνάμεων της τριβής και του συντελεστή της βαρύτητας στον $x'x$ άξονα.

Θα βρούμε πόση είναι η ωθητική δύναμη που χρειάζεται ώστε το κουτί να ανέβει την ράμπα με σταθερή ταχύτητα. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το κουτί σε ισορροπία είναι

$$(F_{\text{net}})_x = \sum F_x = n_x + (F_G)_x + (f_k)_x + (F_{\text{push}})_x = 0\ \text{N} - mg\sin\theta - f_k + F_{\text{push}} = 0\ \text{N}$$

$$(F_{\text{net}})_y = \sum F_y = n_y + (F_G)_y + (f_k)_y + (F_{\text{push}})_y = n - mg\cos\theta + 0\ \text{N} + 0\ \text{N} = 0\ \text{N}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$F_{\text{push}} = mg\sin\theta + f_k = mg\sin\theta + \mu_k n$$

Θα βρούμε το n χρησιμοποιώντας το $n = mg\cos\theta$, από την δεύτερη εξίσωση. Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} F_{\text{push}} &= mg\sin\theta + f_k = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta \\ &= (100\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(\sin 20^\circ + 0.60\cos 20^\circ) = 888\ \text{N} \end{aligned}$$

Η απαιτούμενη δύναμη είναι μικρότερη από την μέγιστη ωθητική δύναμη, που φτάνει τα 1000 N. Άπαξ και το κουτί τεθεί σε κίνηση, θα μπορέσουμε να το ανεβάσουμε στην ράμπα. Αν σταματήσουμε πάνω στην ράμπα και θέλουμε να ωθήσουμε το κουτί, τότε εφαρμόζουμε το μοντέλο της στατικής τριβής. Η ανάλυση είναι η ίδια πέραν του ότι χρησιμοποιείται ο συντελεστής της στατικής τριβής και εμείς χρησιμοποιούμε την μέγιστη τιμή της δύναμης της στατικής τριβής. Επομένως έχουμε,

$$F_{\text{push}} = mg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)(100\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(\sin 20^\circ + 0.90\cos 20^\circ) = 1160\ \text{N}$$

Εφόσον η μέγιστη δύναμη που μπορούμε να εφαρμόσουμε δεν ξεπερνά τα 1000 N δεν θα μπορέσουμε να σπρώξουμε το κουτί, λόγω της μεγάλης δύναμης της στατικς τριβής.

Άσκηση 3.
Σε χρόνο $t = 0$ ένα αντικείμενο μάζας m βρίσκεται σε ηρεμία στο $x = 0$ σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς τριβή. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F_x = F_0(1 - t/T)$ η οποία ελαττώνεται από F_0, για $t = 0$, σε μηδέν, για $t = T$. Βρείτε την παράσταση για α) την ταχύτητα του αντικειμένου και β) την θέση του στον χρόνο T.

Μοντέλο. Μοντελοποιούμε το αντικείμενο ως σωματίδιο. Η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή επομένως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Όλες οι κινήσεις λαμβάνουν χώρα στον $x'x$ άξονα.

Λύση:

α)

$$a_x(t) = \frac{F_x}{m} = \frac{F_0}{m}\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

$$v_x(t) = \int a_x dt = \frac{F_0}{m}\int\left(1 - \frac{t}{T}\right)dt = \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right) + v_0 = \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)$$

$$v_x(T) = \frac{F_0}{m}\left(T - \frac{T^2}{2T}\right) = \frac{F_0}{m}\frac{T}{2}$$

β)

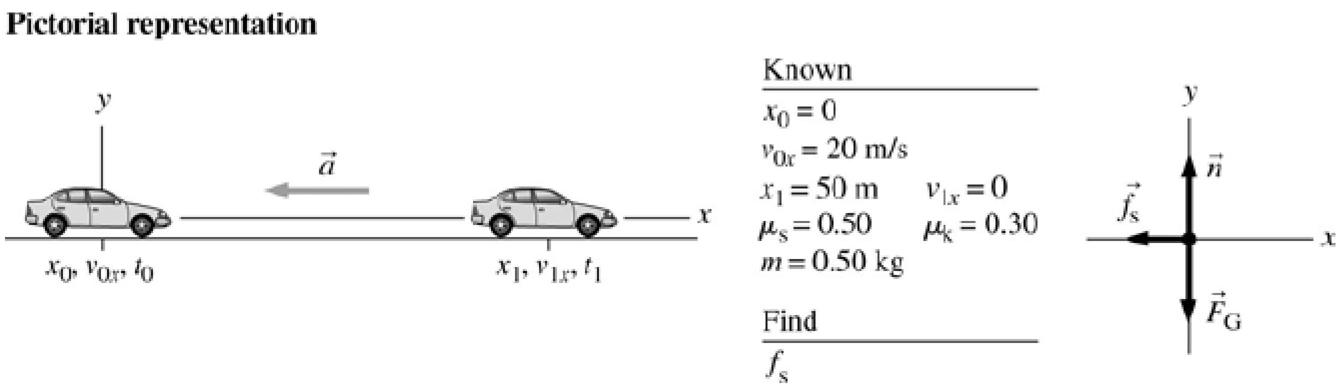
$$x(t) = \int v_x dt = \frac{F_0}{m}\int\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)dt = \frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right) + x_0 = \frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right)$$

$$x(T) = \frac{F_0}{m}\left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6T}\right) = \frac{F_0}{m}\frac{T^2}{3}$$

Άσκηση 4.
Ένας ασυνείδητος οδηγός οδηγεί προς την δουλειά του, και με το αριστερό του χέρι κρατούσε μια κούπα με καφέ, ενώ με το δεξί του χέρι προσπαθούσε να αλλάξει σταθμούς στο ραδιόφωνο (ήδη κακός οδηγός). Τότε

χτύπησε το κινητό του τηλέφωνο, οπότε άφησε την κούπα στο επίπεδο μέρος του ταμπλό. Για κακή του τύχη εκείνη την στιγμή πετάχτηκε μπροστά του, μέσα από το δάσος, ένα ελάφι. Ευτυχώς ο χρόνος αντίδρασης του ήταν μηδενικός και κατάφερε να ακινητοποιήσει το αυτοκίνητο, που είχε ταχύτητα 20 m/s, σε 50 m μόλις, οπότε μετα βίας απέφυγε το ελάφι. Κατοπινές έρευνες έδειξαν ότι οι συντελεστές της τριβής, στατική και κινητική, είναι 0.5 και 0.3 αντίστοιχα˙ ο καφές και η κούπα είχαν συνολική μάζα 0.5 kg και η μάζα του ελαφιού ήταν 120 kg. Η κούπα με τον καφέ γλίστρησε ;

Μοντέλο. Η κούπα του καφέ (M) είναι το μοναδικό αντικείμενο στο σύστημα μας, οπότε θα το μεταχειριστούμε ως σωματίδιο. Θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο της τριβής και τις εξισώεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.



Λύση:

Η κούπα και το αυτοκίνητο έχουν την ίδια ταχύτητα. Αν η κούπα δεν γλιστρήσει, οι επιταχύνσεις τους θα είναι επίσης ίδιες. Χρησιμοποιώντας ότι $v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x_1 - x_0)$ παίρνουμε

$$0\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 20\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 + 2a_x(50\ \mathrm{m}) \Rightarrow a_x = -4\ \mathrm{m/s}^2$$

Η δύναμη στατικής τριβής που απαιτείται για να σταματήσει η κούπα είναι

$$(F_{\mathrm{net}})_x = -f_s = ma_x = (0.5\ \mathrm{kg})(-4.0\ \mathrm{m/s}^2) = -2.0\ \mathrm{N} \Rightarrow f_s = 2\ \mathrm{N}$$

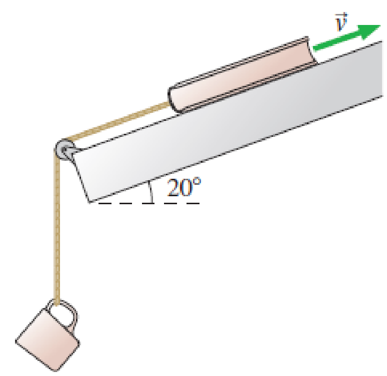
Η μέγιστη δύναμη της στατικής τριβής είναι

$$(f_s)_{\mathrm{max}} = \mu_s n = \mu_s F_G = \mu_s mg = (0.5)(0.5\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s}^2) = 2.5\ \mathrm{N}$$

Εφόσον $f_s < (f_s)_{\mathrm{max}}$ η κούπα δεν θα γλιστρήσει.

Άσκηση 5.

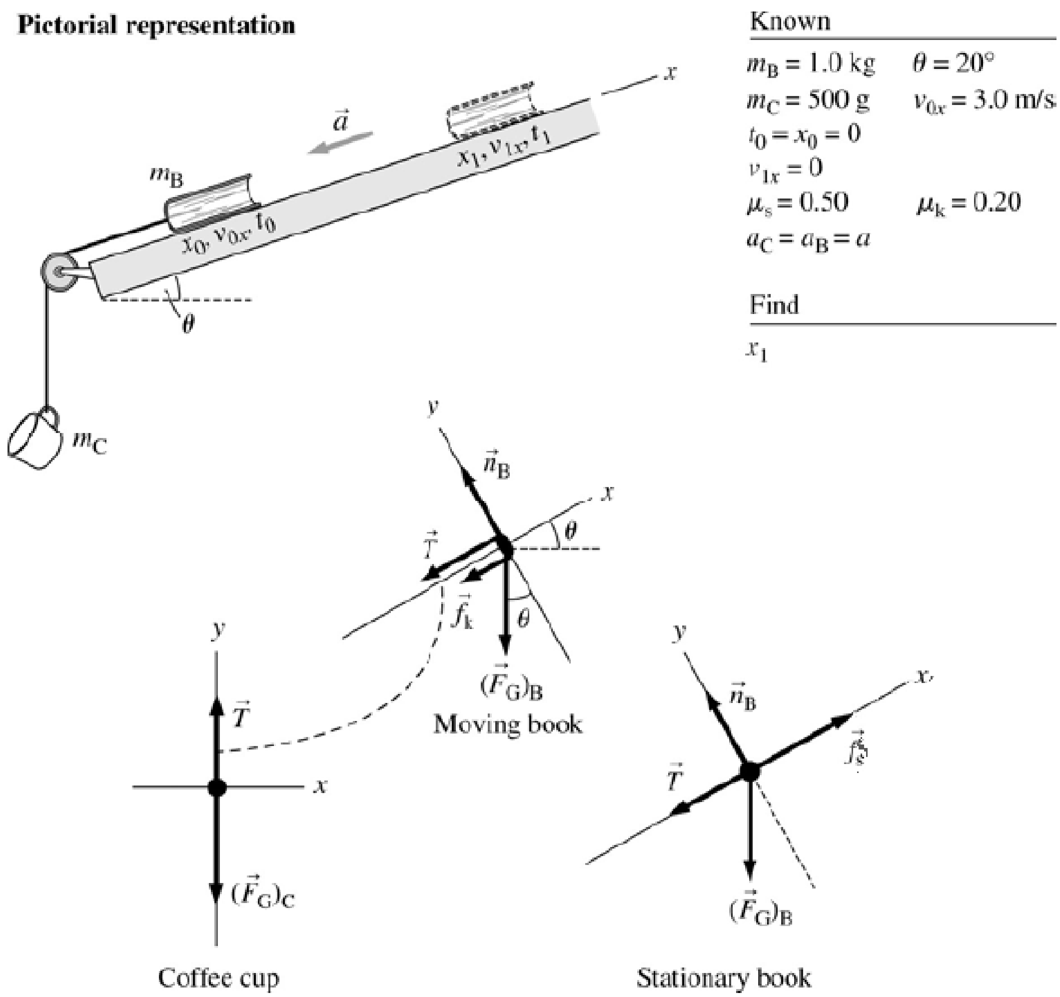
Το βιβλίο Φυσικής βάρους 1 kg συνδέεται μέσω ενός νήματος με ένα κύπελλο βάρους 500 g, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δίνουμε μια ώθηση στο βιβλίο και το αφήνουμε με ταχύτητα 3 m/s. Οι συντελεστές τριβής είναι $\mu_s = 0.5$ και $\mu_k = 0.2$.



α) Τι απόσταση θα διανύσει το βιβλίο γλιστρώντας προς τα πάνω ;

β) Καθώς το βιβλίο βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο, θα παραμείνει σε αυτό ή θα γλιστρήσει προς τα πίσω ;

Μοντέλο. Θα χρησιμοποιήσουμε τα μοντέλα της στατικής και της ριβής ολισθήσεως, όπως επίσης και τις εξισώσεις της σταθερά επιταχυνόμενης κίνησης.



<u>Λύση:</u>

α) Χρησιμοποιώντας ότι $v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + 2a(x_1 - x_0)$ βρίσκουμε

$$0 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 3 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 2a(x_1) \Rightarrow ax_1 = -4.50 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Για να βρούμε το x_1 πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το a. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Newton για το βιβλίο και το κύπελλο έχουμε

$$\sum (F_{\text{on B}})_y = n_\text{B} - (F_G)_\text{B} cos(20°) = 0 \text{ N} \Rightarrow n_\text{B} = (1 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) cos(20°) = 9.21 \text{ N}$$

$$\sum (F_{\text{on B}})_x = -T - f_k - (F_G)_\text{B} sin(20°) = m_\text{B} a_\text{B}, \quad \sum (F_{\text{on C}})_y = T - (F_G)_\text{C} sin(20°) = m_\text{C} a_\text{C}$$

Γράφουμε ξανά τις δύο τελευταίες σχέσεις καθώς $a_\text{C} = a_\text{B} = a$,

$$-T - \mu_k n_\text{B} - m_\text{B} g sin(20°) = m_\text{B} a, \quad T - m_\text{B} g sin(20°) = m_\text{C} a$$

Τις οποίες προσθέτουμε και παίρνουμε

$$a(m_{\mathrm{C}} + m_{\mathrm{B}}) = -g[m_{\mathrm{C}} + m_{\mathrm{B}} sin(20°)] - \mu_k(9.21 \text{ N})$$

$$(1 \text{ kg})a = -(9.8 \text{ m/s}^2)[0.5 \text{ kg} + (1 \text{ kg}) sin(20°)] - (0.2)(9.21 \text{ N}) \Rightarrow a = -6.73 \text{ m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στο a, για το x_1 έχουμε

$$x_1 = \frac{-4.5 \text{ m}^2/\text{s}^2}{a} = \frac{-4.5 \text{ m}^2/\text{s}^2}{-6.73 \text{ m/s}^2} = 0.67 \text{ m}$$

β) Η μέγιστη δύναμη στατικής τριβής είναι $(f_s)_{\max} = \mu_s n_{\mathrm{B}}) = (0.5)(9.21 \text{ N}) = 4.6 \text{ N}$. Θα εξετάσουμε αν η δύναμη f_s που απαιτείται ώστε το βιβλίο να παραμείνει στην θέση του είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την $(f_s)_{\max}$. Όταν το κύπελλο βρίσκεται σε ηρεμία, η τάση του νήματος είναι $T = m_{\mathrm{C}} g$. Από τον πρώτο νόμο του Newton, για το βιβλίο, παίρνουμε

$$\sum (F_{\text{on B}})_x = f_s - T - w_{\mathrm{B}} sin(20°) = f_s - m_{\mathrm{C}} g - m_{\mathrm{B}} g sin(20°)$$
$$f_s = (M_{\mathrm{C}} + M_{\mathrm{B}} sin(20°))g = 8.25 \text{ N}$$

Καθώς $f_s > (f_s)_{\max}$ το βιβλίο θα γλιστρήσει προς τα πίσω.

Άσκηση 6.
Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου 500 g, καθώς αυτό κινείται στον άξονα των $x'x$, δίνεται από το παρακάτω σχήμα. Έστω ότι το σωματίδιο έχει μηχανική ενέργεια ίση με 12 J.

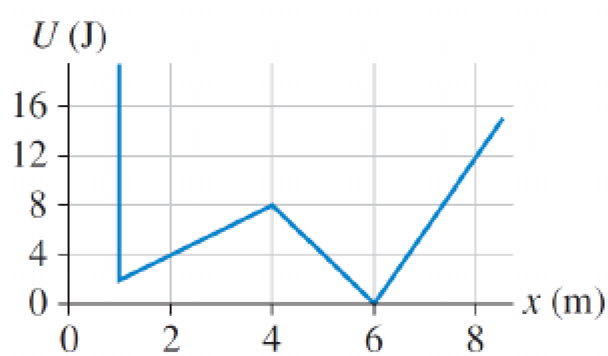
α) Σε ποια σημεία το σωματίδιο θα αλλάξει κατεύθυνση ;

β) Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου για $x = 6$ m ;

γ) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα του σωματιδίου ; Σε ποια θέση την αποκτά ;

δ) Περιγράψτε την κίνηση του αντικειμένου καθώς κινείται από το αριστερό σημείο αλλαγής κατεύθυνσης προς το δεξιό σημείο αλλαγης κατεύθυνσης.

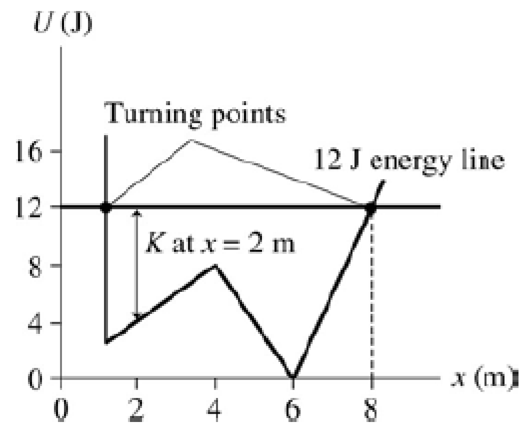
στ) Υποθέστε ότι η ενέργεια του σωματιδίου είναι μικρότερη των 4 J. Περιγράψτε τις πιθανές κινήσεις.



Μοντέλο. Θα χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Λύση:

α) Τα σημεία αλλαγής κατεύθυνσης βρίσκονται στα σημεία όπου η ευθεία της ολικής ενέργειας τέμνει την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας. Για $E = 12$ J, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία αυτά είναι τα $x = 1$ m και $x = 8$ m.



β) Η εξίσωση για την κινητική ενέργεια $K = E - U$ δίνεια την απόσταση μεταξύ της καμπύλης της δυναμικής ενέργειας και της ευθείας της ολικής ενέργειας, για $U = 4$ J στο $x = 2$ m έχουμε $K = 12\text{ J} - 4\text{ J} = 8$ J. Επομένως η ζητούμενη ταχύτητα είναι

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(8\text{ J})}{0.5\text{ kg}}} = 5.78\text{ m/s}$$

γ) Το σωματίδιο αποκτά μέγιστη ταχύτητα όταν το U παίρνει την ελάχιστη του τιμή. Αυτό συμβαίνει στο $x = 6$ m όπου $U = 0$ J και $K = 12$ J. Η ταχύτητα σε αυτό το σημείο είναι

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(12\text{ J})}{0.5\text{ kg}}} = 6.9\text{ m/s}$$

δ) Το σωματίδιο φεύγει από το σημείο $x = 1$ m με $v = 6.3$ m/s, σταδιακά επιβραδύνει φτάνοντας στο $x = 4$ m με ταχύτητα $v = 4$ m/s. Εν' συνεχεία επιταχύνει και διέρχεται από το $x = 6$ m με $v = 6.9$ m/s. Απ'οπου επιβραδύνει και πάλι έως ότου σταματήσει στιγμιαία ($v = 0$ m/s) για $x = 8$ m. Κατόπιν θα αντιστρέψει την κατεύθυνση του και θα κινηθεί προς τα αριστερά.

ε) Αν το σωματίδιο έχει $E = 4$ J δεν μπορεί να υπερβεί το ενεργειακό δυναμικό των $U = 8$ J που βρίσκεται στο κέντρο. Αυτό συνεπάγεται ότι είτε θα ταλαντεύεται στο $1\text{ m} \leq x \leq 2\text{ m}$ ή στο $5\text{ m} \leq x \leq 6.7\text{ m}$.