ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πρώτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Η θέση ενός σωματιδίου στον οριζόντιο άξονα περιγράφεται από την συνάρτηση $x = (t^2 - 4t + 2)$ m, όπου το t μετριέται σε s.

α. Κάντε το διάγραμμα θέσης - χρόνου για το διάστημα $0 \text{ s} \leq t \leq 5$ s.

β. Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδιού για $t = 1.0$ s υπολογίζοντας την τιμή της πραγώγου, στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό του (α.) ερωτήματος.

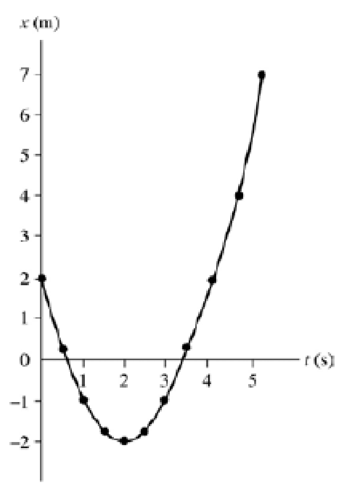
γ. Υπάρχουν σημεία καμπής στην κίνηση του σωματιδού ; Αν ναι να βρείτε τις θέσεις αυτών των σημείων.

δ. Σε ποιά θέση βρίσκεται το σωματίδιο όταν $v_x = 4.0$ m/s ;

ε. Σχεδιάστε το διάγραμμα κίνησης του σωματιδίου.

Λύση:

α.



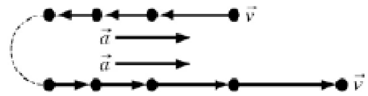
β. $\frac{dx}{dt} = v_x = 2t - 4 \Rightarrow v_x(\text{καθώς } t = 1 \text{ s}) = [2 \text{ m/s}^2(1 \text{ s}) - 4 \text{ m/s}] = -2$ m/s.

γ. Υπάρχει σημείο καμπής στην χρονική στιγμή $t = 2$ s, κατά την οποία η θέση του σωματιδίου είναι $x = -2$ m.

δ. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση από την ερώτηση γ παίρνουμε,

$$v_x = 4 \text{ m/s} = (2t - 4) \text{ m/s} \Rightarrow t = 4 \text{ m/s}$$

Εφόσον $x = (t^2 - 4t + 2)$ m παίρνουμε $x = 2$ m.



ε. Αλλάζει κατεύθυνση στο $t = 2.0$ s δηλαδή,

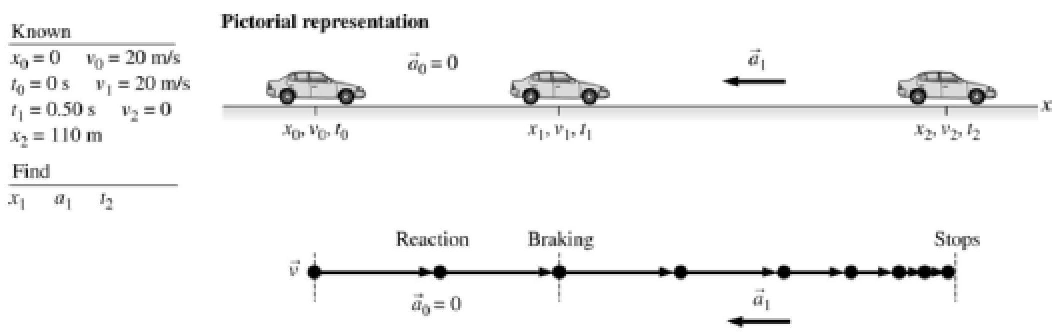
Άσκηση 2.
Οδηγείτε το αυτοκίνητο σας στο μπακάλικο με ταχύτητα 20 m/s. Καθώς βρίσκεστε σε απόσταση 100 m από μια διασταύρωση το φανάρι γίνεται κόκκινο. Υποθέστε ότι ο χρόνος αντίδρασης σας είναι 0.50 s και ότι το αυτοκίνητο φρενάρει με σταθερή επιτάχυνση.

α. Πόση απόσταση έχετε από την διασταύρωση την στιγμή που ξεκινάτε να πατάτε τα φρένα ;

β. Πόση επιτάχυνση θα ακινητοποιήσει το όχημα στην διασταύρωση ακριβώς ;

γ. Πόσος χρόνος απαιτείται ώστε να σταματήσετε αφότου το φανάρι έγινε κόκκινο ;

Μοντέλο. Το αυτοκίνητο είναι ένα σώμα και ισχύουν οι εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.



Λύση:

α. Χωρίζουμε το πρόβλημα σε δύο φάσεις. Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς τη χρονική στιγμή όπου $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$. Κατά την διάρκεια του χρόνου αντίδρασης έχουμε

$$x_1 = x_0 + v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t_1 - t_0)^2 = 0\text{ m} + (20\text{ m/s})(0.50\text{ s} - 0\text{ s}) + 0\text{ m} = 10\text{ m}$$

Ύστερα από την αντίδραση, έχουμε

$$x_2 - x_1 = 110\text{ m} - 10\text{ m} = 100\text{ m}$$

Επομένως είμαστε 100 m μακρυά από την διασταύρωση.

β. Για να σταματήσουμε με επιτυχία έχουμε,

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\alpha_1(x_2 - x_1) \Rightarrow (0\text{ m/s})^2 = 2\alpha_1(100\text{ m}) \Rightarrow \alpha_1 = -2\text{ m/s}^2$$

γ. Ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει το αυτοκίνητο από την στιγμή που πατάμε το φρένο είναι

$$v_2 = v_1 + \alpha_1(t_2 - t_1) \Rightarrow 0\text{ m/s} = 20\text{ m/s} + (-2\text{m/s}^2)(t_2 - 0.50\text{ s}) \Rightarrow t_2 = 11\text{ s}$$

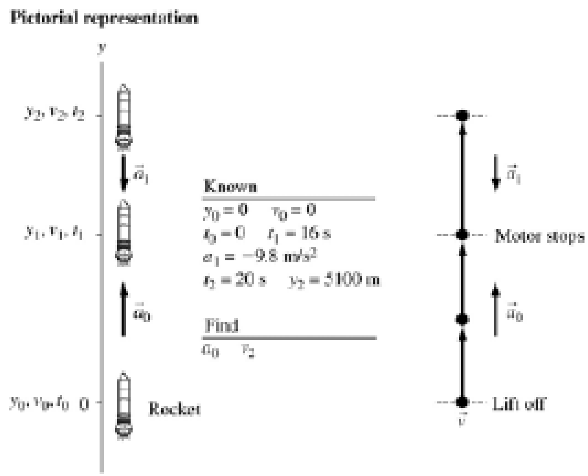
Αρα ο συνολικός χρόνος ακινητοποίησης του αυτοκινήτου από την στιγμή όπου το φανάρι έγινε κόκκινο είναι 11.5 s.

Άσκηση 3.
Ένας μετεωρολογικός πύραυλος 1000 kg εκτοξεύεται κατακόρυφα. Ο κινητήρας του πυραύλου παρέχει σταθερή επιτάχυνση για 16 s, οπότε και σταματά την λειτουργία του. Το υψόμετρο που φτάνει ο πύραλος 20 s μετά την εκτόξευση είναι 5100 m. Θεωρείστε ως αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

α. Ποιά είναι η επιτάχυνση του πυραύλου κατά τα πρώτα 16 s ;

β. Ποιά είναι η ταχύτητα του πυραύλου καθώς περνάει μέσα από ένα σύννεφο στα 5100 m από την επιφάνεια του εδάφους ;

Μοντέλο. Θα μοντελοποιήσουμε τον πύραυλο ως σωματίδιο. Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς τη χρονική στιγμή όπου $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, και $u_0 = 0$, δηλ. το σημείο ακριβώς πριν εκτοξευτεί. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Λύση:

α. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης έχουμε,

$$v_1 = v_0 + \alpha_0(t_1 - t_0) = 0\ \mathrm{m/s} + \alpha_0(16\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s}) = \alpha_0(16\ \mathrm{s})$$

$$y_1 = y_0 + v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2}(16\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s})^2 = \alpha_0(128\ \mathrm{s}^2)$$

$$y_2 = y_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\alpha_1(t_2 - t_1)^2 \Rightarrow$$

$$5100\ \mathrm{m} = 128\ \mathrm{s}^2\alpha_0 + 16\ \mathrm{s}\alpha_0(20\ \mathrm{s} - 16\ \mathrm{s}) + \frac{1}{2}(-9.8\ \mathrm{m/s}^2)(20\ \mathrm{s} - 16\ \mathrm{s})^2 \Rightarrow \alpha_0 = 27\ \mathrm{m/s}^2$$

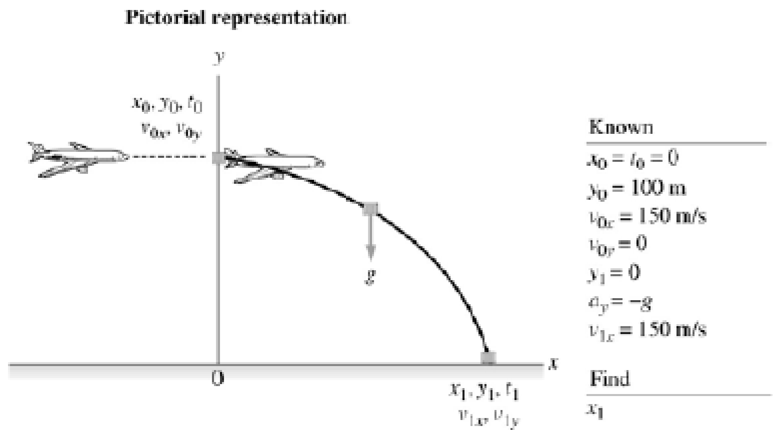
β. Η ταχύτητα του πυραύλου καθώς περνάει από ένα σύννεφο στα 5100 m, από την επιφάνεια του εδάφους, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνηση

$$v_2 = v_1 + \alpha_1(t_2 - t_1) = (16\ \mathrm{s})\alpha_0 + (-9.8\ \mathrm{m/s}^2)(4\ \mathrm{s}) = 390\ \mathrm{m/s}$$

Η τελική ταχύτητα του πυραύλου που έχει επιταχυνθεί για 20 s είναι 400 m/s, με ρυθμό περίπου 20 $\mathrm{m/s}^2$.

Άσκηση 4.
Ένα μεταγωγικό αεροπλάνο χρειάζεται να ρίξει ένα πακέτο προμηθειών σε επιστήμονες που εργάζονται σε ένα παγόβουνο στην Γροιλανδία. Το αεροπλάνο πετάει στα 100 m πάνω από το παγόβουνο με ταχύτητα 150 m/s. Πόσο μακρυά από τον στόχο πρέπει να ρίψει το πακέτο ;

Μοντέλο. Για το πακέτο προμηθειών θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του σωματιδίου, στο οποίο ισχύουν οι εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς τη χρονική στιγμή όπου $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$, δηλ. ακριβώς όταν το πακέτο πέφτει από το αεροπλάνο.



<u>Λύση</u>:
Για την οριζόντια κίνηση έχουμε,

$$x_1 = x_0 + v_{0x}(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_x(t_1 - t_0)^2 = 0\ \mathrm{m} + (150\ \mathrm{m/s})(t_1 - 0) + 0\ \mathrm{m} = (150\ \mathrm{m/s})t_1$$

Θα βρούμε το t_1 από την κατακόρυφη κίνηση, δηλαδή κίνηση στον άξονα $y'y$, ως εξής

$$y_1 = y_0 + v_{0y}(t_1 - t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha_y(t_1 - t_0)^2 \Rightarrow 0\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{m} + 0\ \mathrm{m} + \tfrac{1}{2}(-9.8\ \mathrm{m/s^2})t_1^2$$
$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{200\ \mathrm{m}}{9.8\ \mathrm{m/s^2}}} = 4.518\ \mathrm{s} \simeq 4.5\ \mathrm{s}$$

Από την εξίσωση στον οριζόντιο άξονα η μετατόπιση είναι $x_1 = (150\ \mathrm{m/s})(4.518\ \mathrm{s}) = 678\ \mathrm{m} \simeq 680\ \mathrm{m}$.

Άσκηση 5.
Πετάμε μια μπάλα προς ένα βράχο ύψους h με ταχύτητα 30 m/s και υπό γωνία $60°$. Ύστερα από 4.0 s προσγειώνεται στην κορυφή του βράχου.

α. Πόσο ύψος έχει ο βράχος ;

β. Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα ;

γ. Ποιά είναι η ταχύτητα πρόσκρουσης της μπάλας ;

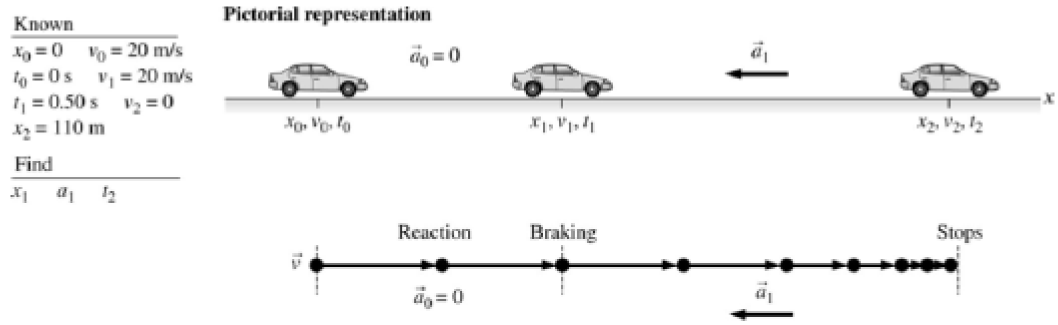
Μοντέλο. Θεωρούμε ότι ισχύουν οι εξισώσεις ευθύγραμμης ομαλής κίνησης για την μπάλα. Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς τη χρονική στιγμή όπου $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, και $u_0 = 20$ m/s.

<u>Λύση</u>:

α. Χρησιμοποιώντας την σχέση $y_1 = y_0 + v_{0y}\,(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_y(t_1 - t_0)^2$ παίρνουμε,

$$h = 0\ \mathrm{m} + (30\ \mathrm{m/s}\sin 60°)(4\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s}) + \frac{1}{2}(-9.8\ \mathrm{m/s^2})(4\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s})^2 = 25.5\ \mathrm{m}$$

Άρα το ύψος του βράχου είναι 25.5 m.



β. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\left(v_y^2\right)_{\text{top}} = v_y^2 + 2\alpha_y\left(y_{\text{top}} - y_0\right)$ παίρνουμε,

$$0 = (v_0 \sin\theta)^2 + 2(-g)(y_{\text{top}}) \Rightarrow y_{\text{top}} = \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g} = \frac{[(30\text{m/s})\sin 60°]^2}{2(9.8\text{m/s}^2)} = 34.4\text{m}$$

Επομένως το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα είναι 34m.

γ. Για τις x και y συνιστώσες έχουμε

$$v_{1x} = v_{0x} = v_0\cos 60° = (30\text{m/s})\cos 60° = 15.0\text{m/s}$$

$$v_{1y} = v_{0y} + \alpha_y(t_1 - t_0) = v_0\sin\theta - gt_1 = (30\text{n/s})\sin 60° - (9.8\ \text{m/s}^2) \times (4.0\ \text{s}) = -13.22\ \text{m/s}$$

Συνεπώς

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 20.0\ \text{m/s}$$

Άρα η ταχύτητα πρόσκρουσης της μπάλας στον βράχο είναι 20 m/s.

Συγκρίνοντας τις τιμές του μέγιστου ύψους στο οποίο φτάνει η σφαίρα, 34.4 m, και του ύψους του βράχου, 25.5 m, μπορεί όντως η μπάλα να φτάσει στην κορυφή του.

Άσκηση 6.

Η τροχιά ενός σωματιδιού περιγράφεται από τους τύπους $x = \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2\right)$ m και $y = \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t\right)$ m, όπου t μετριέται σε s.

α. Ποιά είναι η θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t = 0$ s και $t = 4$ s ;

β. Ποιά είναι η κατεύθυνση του σωματιδίου, μετρούμενη ως γωνία ως προς τον άξονα $x'x$, για $t = 0$ s και $t = 4$ s ;

Λύση:

α. Για $t = 0$ s παίρνουμε $x = 0$ m και $y = 0$ m , ή $\vec{r} = (0\vec{i} + 0\vec{j})$ m. Για $t = 4$ s παίρνουμε $x = 0$ m και $y = 0$ m , ή $\vec{r} = (0\vec{i} + 0\vec{j})$ m. Δηλαδή το σωματίδιο τόσο για $t = 0$ s όσο για $t = 4$ s βρίσκεται στην ίδια θέση. Εν συνεχεία από τους τύπους των x και y έχουμε

$$\vec{r} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = \left[\left(\frac{3}{2}t^2 - 4t\right)\vec{i} + (t-2)\vec{j}\right]\ \text{m/s}$$

Επομένως για $t = 0$ s παίρνουμε $\vec{v} = -2\vec{j}$ m/s, όπου $v = 2$ m/s κατά μέτρο. Ομοίως για $t = 4$ s παίρνουμε $\vec{v} = (8\vec{i} + 2\vec{j})\vec{j}$ m/s, όπου $v = 8.3$ m/s κατά μέτρο.

β. Για $t = 0$ s το $\vec{v}$ είναι κατα μήκος του $-\vec{j}$, δηλαδή $\theta = -90°$. Για $t = 4$ s βρίσκουμε ότι

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\ \text{m/s}}{8\ \text{m/s}}\right) = 14°$$