

HY-111

Απειροστικός Λογισμός II

Μέγιστα & Ελάχιστα



1 μεταβλητή: Τύπος Taylor

Αν $y=f(x)$ είναι καλή συνάρτηση

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < c < x$$

π.χ

$$f(x) = e^x, e^{0.7} = ?$$

Εφαρμόζω το Θ. Taylor $n=5, a=0$

$$f(0.7) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(0.7) + \frac{f''(0)}{2!}(0.7)^2 + \dots + \frac{f^5(0)}{5!}(0.7)^5 + \frac{f^6(c)}{6!}(0.7)^6$$

$$0 < c < 1 \rightarrow 1 < e^c < 3 \rightarrow \frac{f^6(c)}{6!}(0.7)^6 < \frac{3 \cdot 0.7^6}{6!}$$

$$|e^{0.7} - m| = \frac{f^6(c)}{6!}(0.7)^6 < \frac{3 \cdot 0.7^6}{6!}$$



Ακρότατα συνάρτησης

Αν f είναι καλή συνάρτηση (παραγ. - συνεχής)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2, a < c < x$$

$$y(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a), \text{ εξίσωση εφαπτομένης}$$

Υποθέτω $f'(a) > 0$

Έστω $g(x) = f''(x)$, συνεχής $g(a) > 0$.

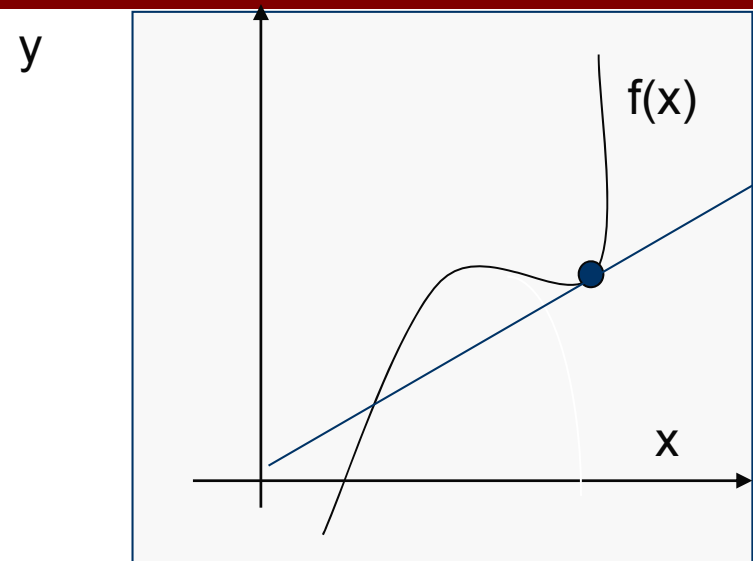
Λόγω συνέχειας υπάρχει γειτονιά Δ του a τ.ώ. $\forall x \in \Delta \Rightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$

$$\text{Άρα } \forall x \in \Delta, \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \geq 0 \Rightarrow R_1(x) > 0$$

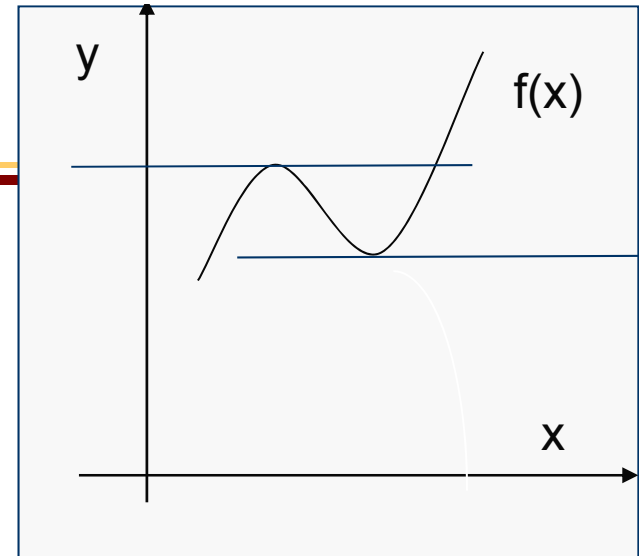
$f(x) \geq y(x), \forall x \in \Delta \Rightarrow$ Το γράφημα της f είναι πάνω από την εφαπτομένη στο $(a, f(a))$

Ομοίως αν $f'(a) < 0 \Rightarrow$ Το γράφημα της f είναι κάτω από την εφαπτομένη στο $(a, f(a))$

Αν $f'(a) = 0$, κανένα συμπέρασμα



Τοπικά Ακρότατα



$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

a τοπικό ελάχιστο αν υπάρχει γειτονιά $\Delta(a)$ τ.ώ. $\forall x \in \Delta(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

a τοπικό μέγιστο αν υπάρχει γειτονιά $\Delta(a)$ τ.ώ. $\forall x \in \Delta(a) \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

Αν a τοπικό ακρότατο (δηλ. μέγιστο ή ελάχιστο) τότε $f'(a) = 0$

Αν $f'(a) = 0$

1) $f''(a) < 0$, a τοπικό μέγιστο

2) $f''(a) > 0$, a τοπικό ελάχιστο

3) $f''(a) = 0$???



2 μεταβλητές: Τύπος Taylor

Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι καλή συνάρτηση

Εφαπτόμενο επίπεδο

$$f(x, y) = \overbrace{f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)} + R_1(x, y)$$

$$R_1(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2) \cdot (x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \cdot (x - a) \cdot (y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2) \cdot (y - b)^2 \right)$$

π.χ.

$$f(x, y) = (y + 1)e^x, (a, b) = (0, 0)$$

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot (x) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot (y) + R_1(x, y)$$

...



2 μεταβλητές: Τύπος Taylor

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) + R_1(x, y)$$

$$R_1(x, y) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2) \right)}_{\alpha} \cdot (x - a)^2 + \underbrace{\left(\frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \right)}_{\beta} \cdot (x - a) \cdot (y - b) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2) \right)}_{\gamma} \cdot (y - b)^2$$

Διαιρώ με το $(y - b)^2$ και θέτω $z = \frac{x - a}{y - b}$ και εξετάζω το πρόσημο

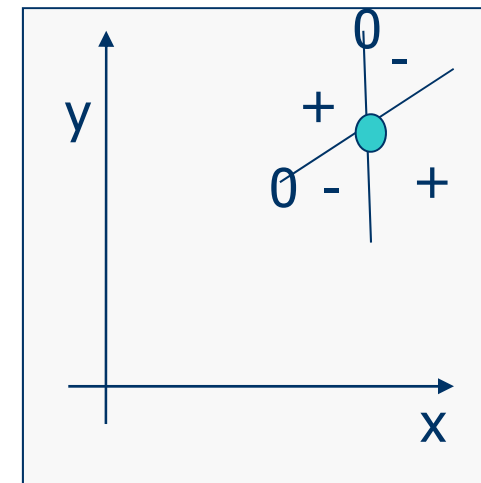
του πολυωνύμου $R_1(z) = \alpha z^2 + 2\beta z + \gamma$

$$4\beta^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta^2 - \alpha\gamma)$$

$$\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$$

$$\text{Αν } \Delta > 0 \begin{cases} \alpha > 0 \rightarrow R(z) > 0 \\ \alpha < 0 \rightarrow R(z) < 0 \end{cases}$$

Αν $\Delta < 0$ αλλαγή προσήμου



$$\text{Αν } \Delta = 0 \rightarrow \text{τέλειο τετράγωνο} \begin{cases} \alpha > 0 \rightarrow R(z) \geq 0 \\ \alpha < 0 \rightarrow R(z) \leq 0 \end{cases}$$



Κριτήριο β' παραγώγου

Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(a,b) \in U$ είναι τοπικό ελάχιστο αν υπάρχει γειτονιά $\Delta(a,b)$ τ.ώ. $\forall (x,y) \in \Delta(a,b) \Rightarrow f(x,y) \geq f(a,b)$

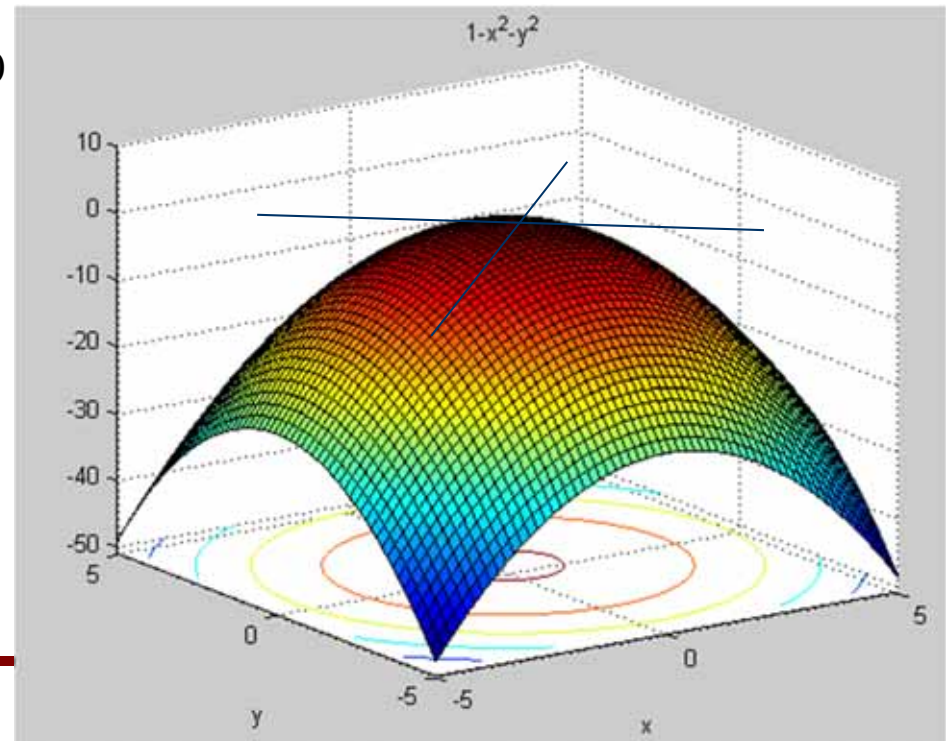
$(a,b) \in U$ είναι τοπικό μέγιστο αν υπάρχει γειτονιά $\Delta(a,b)$ τ.ώ. $\forall (x,y) \in \Delta(a,b) \Rightarrow f(x,y) \leq f(a,b)$

Αν $(a,b) \in U$ είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο τότε το εφαπτόμενο επίπεδο στο (a,b) είναι με το xy -επίπεδο

\perp διάνυσμα στο εφ. επίπεδο $(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1)$

(a,b) τοπικό ακρότατο $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

Κρίσιμα Σημεία



Κριτήριο για τοπικά ελάχιστα/μέγιστα

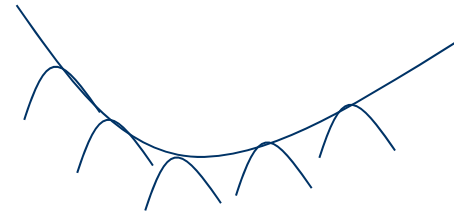
$$\text{Av } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2$$

$$1) \text{ Av } \Delta > 0 \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \rightarrow (a, b) \text{ είναι τοπικό ελάχιστο, το γράφημα πάνω από εφ. επ.} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \rightarrow (a, b) \text{ είναι τοπικό μέγιστο, το γράφημα κάτω από εφ. επ.} \end{cases}$$

2) $\Delta < 0 \rightarrow$ τότε το (a, b) αντιστοιχεί σε σημείο "σαμαριού"

3) $\Delta = 0 \rightarrow$ κανένα συμπέρασμα



Τοπικά ελάχιστα/μέγιστα

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Βρες τα κρίσιμα σημεία

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

Βρες τα κρίσιμα σημεία

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

$$\text{Κρίσιμα σημεία: } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right)^2 = 4 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) > 0 \rightarrow (0, 0) \text{ τοπικό ελάχιστο}$$



Τοπικά ελάχιστα/μέγιστα

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ τοπικό ακρότατο} \rightarrow \nabla f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad \text{Εσσιανός (Hessian)}$$

Αν H + ορισμένος ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$ και $\det(H) > 0$) τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο

Αν H - ορισμένος ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$ και $\det(H) > 0$) τότε έχουμε τοπικό μέγιστο



Κρίσιμα σημεία

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$$

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

$$f(x, y) = y \sin x$$



HY-111

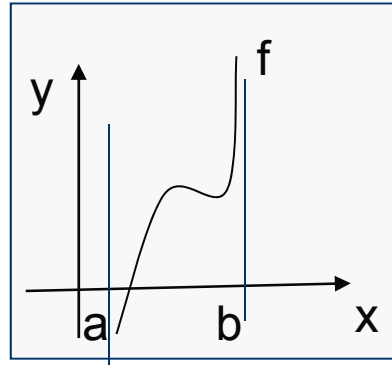
Απειροστικός Λογισμός II

Προσδιορισμός ολικού
μέγιστου/ελάχιστου



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (1 μεταβλητή)

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Δεν έχει κατ' ανάγκη ολικό ελάχιστο ή μέγιστο



$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής - παραγωγίσιμη

Η f λαμβάνει ολικό ελάχιστο, μέγιστο είτε στο (a, b) είτε στο a ή στο b .

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία (μαζί με $f(a)$, $f(b)$) και συγκρίνουμε τιμές.

π.χ

$$f(x) = x^2 + 5x - 4, x \in [2, 5]$$

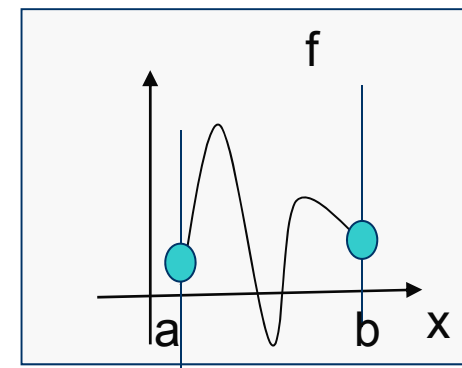
Κρίσιμα σημεία

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = -2.5 \text{ (απορ.)}$$

$$f(2) = 10$$

$$f(5) = 46$$

Οπότε ελάχιστο στο $x = 2$, μέγιστο στο $x = 5$.

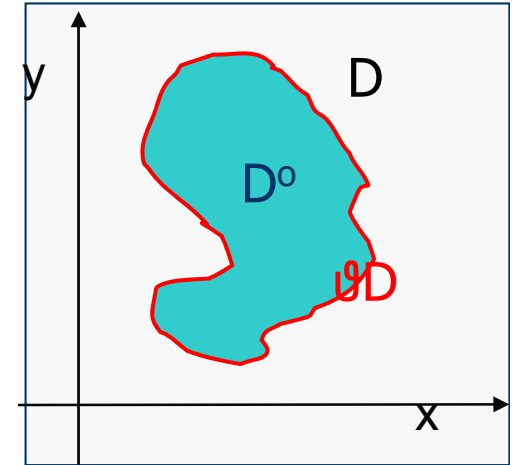


Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D κλειστό φραγμένο

D° : εσωτερικό του D (αντίστοιχο του (a,b))

∂D : σύνορο του D (αντίστοιχο του a,b)

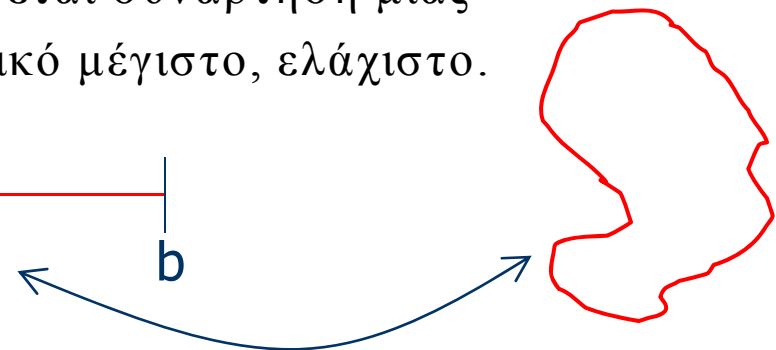
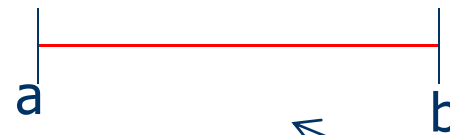


Αν f συνεχής και παραγωγίσιμη στο D λαμβάνει ολικό μέγιστο και ελάχιστο

Τρόπος υπολογισμού

– Βρίσκεις τα κρίσιμα σημεία στο D°

– Περιορίζεις τη συνάρτηση στο ∂D οπότε η f γίνεται συνάρτηση μιας μεταβλητής σε κλειστό διάστημα. Βρίσκουμε ολικό μέγιστο, ελάχιστο.



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)

$$f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$$

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ κλειστός μοναδιαίος δίσκος

Λύση

$$D^\circ = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

–Κρίσιμα σημεία στο D°

$$(0, 0) \quad f(0, 0) = 0$$

–Περιορίζεις την f στο ∂D .

$$\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t)$$

$$F(t) = f \circ \varphi(t) = 3 \cos^2 t + 5 \sin^2 t = 3 + 2 \sin^2 t, t \in [0, 2\pi]$$

Κρίσιμα σημεία στο $[0, 2\pi]$

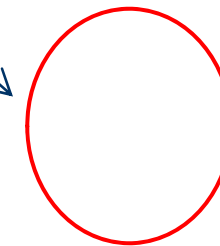
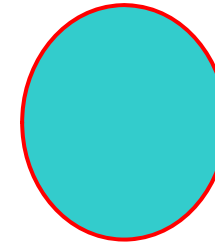
$$F'(t) = 4 \cos t \sin t, t \in (0, 2\pi)$$

$$F'(t) = 0 \rightarrow, t = \pi / 2 \quad F(\pi / 2) = 5, t = \pi \quad F(\pi) = 3, t = 3\pi / 2 \quad F(3\pi / 2) = 5$$

$$\{0, 2\pi\} : F(0) = 3, F(2\pi) = 3$$

Ολικό μέγιστο έχω στα σημεία $(0, 1)$ (για $t = \pi / 2$) και $(0, -1)$ (για $t = 3\pi / 2$) με τιμή το 5

Ολικό ελάχιστο έχω στο σημείο $(0, 0)$ με τιμή το 0



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$$

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ κλειστός μοναδιαίος δίσκος

Λύση

$$D^\circ = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

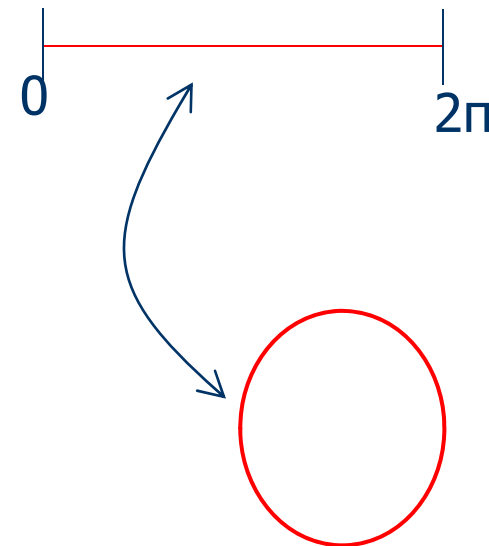
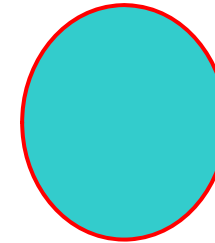
$$\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

–Κρίσιμα σημεία στο D°

–Περιορίζεις την f στο ∂D .

$$\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

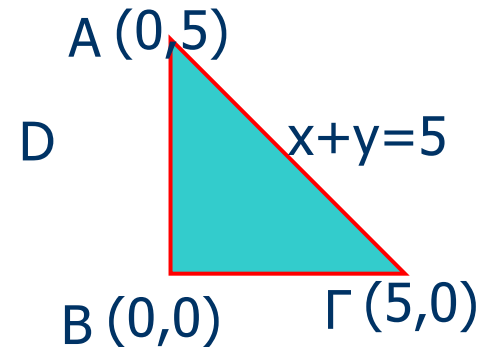
$$t \rightarrow (\cos t, \sin t)$$



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)

$$f(x, y) = 2 + x + y - x^2 - y^2$$

Λύση



–Κρίσιμα σημεία στο D°

...

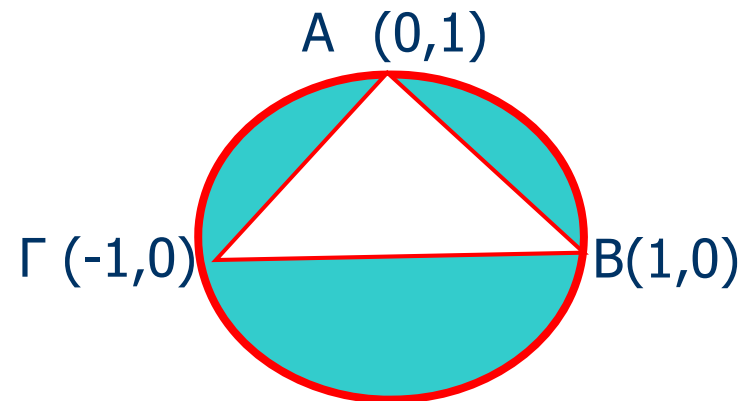
–Περιορίζεις την f στο ∂D

– 3 περιπτώσεις



Ακρότατα σε κλειστό πεδίο ορισμού (2 μεταβλητές)

$$f(x, y) = 2 + x + y - x^2 - y^2$$



Matlab: figure;

```
ezplot3('cos(t)', 'sin(t)', '2+cos(t)+sin(t)-(cos(t))^2-(sin(t))^2');
```

```
hold on;
```

```
ezplot3('t', '1-t', '2+t+1-t-t^2-(1-t)^2', [0 1]); %AB
```

```
hold on;
```

```
ezplot3('t', '1-t', '2+t+1-t-t^2-(1-t)^2', [0 1]); %AB
```

```
%AΓ
```

```
%ΓB
```

```
hold on;
```

```
ezmesh('2+x+y-x^2-y^2', [-1 1], [-1 1]);
```



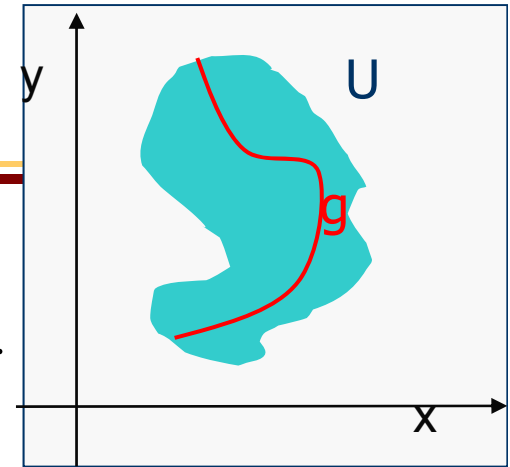
HY-111

Απειροστικός Λογισμός II

Πολλαπλασιαστές Lagrange



Ακρότατα υπό συνθήκη



$$\text{Αν } f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f σε μια καμπύλη $g(x,y)=0$.

$$r(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x(t), y(t))$$

$$f(r(t)) = f(x(t), y(t))$$

$$\text{Ορισμός } p \text{ κρίσιμο} \Leftrightarrow \frac{df}{dt}(t_0) = 0$$

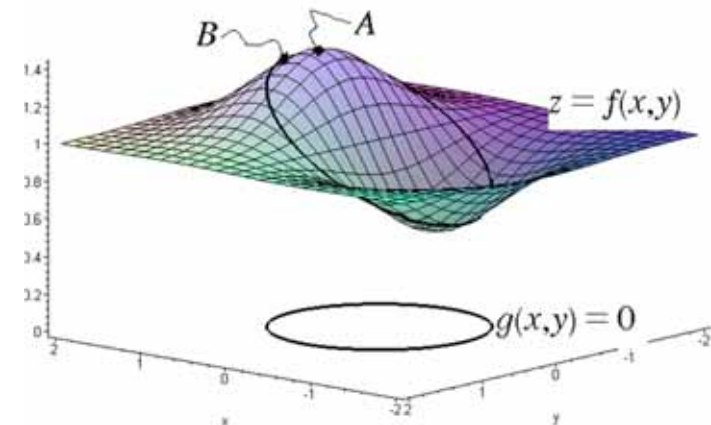
$$\text{Από κανόνα αλυσίδας } \frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0) = \nabla f(p) \cdot r'(t_0)$$

$$p \text{ κρίσιμο} \Leftrightarrow \nabla f(p) \cdot r'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(p) \perp r'(t_0)$$

Όταν η καμπύλη δίδεται από τη $g(x,y)=0$ τότε $\nabla g(p) \perp r'(t_0)$ άρα $\nabla f(p) \parallel \nabla g(p)$

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p), \text{ (}\lambda \text{ πολλαπλασιαστές lagrange)}$$

*Αν $\lambda = 0$, ισχύει πάλι πως είμαι σε κρίσιμο σημείο. $\nabla g \neq 0$



Ακρότατα υπό συνθήκη

$$f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{Κρίσιμα σημεία της } f \text{ επί της } g$$

Έστω (x, y) κρίσιμο σημείο τότε έχουμε:

$$\nabla f = \langle 6x, 10y \rangle$$

Matlab: `figure;`

$$\nabla g = \langle 2x, 2y \rangle$$

`ezplot3('cos(t)','sin(t)','3*(cos(t))^2+5*(sin(t))^2');`

`hold on;`

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

`ezmesh('3*x^2+5*y^2',[-1 1], [-1 1]);`

Να βρεθεί η απόσταση του $O(0,0,0)$ από το $x+2y+3z=1$.

$$\min \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \quad d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla d = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$$

$$\nabla g = \langle 1, 2, 3 \rangle$$

Έστω $p = (x, y)$ κρίσιμο σημείο τότε έχουμε:

$$\begin{cases} \nabla d(p) = \lambda \nabla g(p) \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$$



Ακρότατα υπό συνθήκη

Να μεγιστοποιηθεί ο όγκος κυλίνδρου δοσμένης επιφάνειας c .

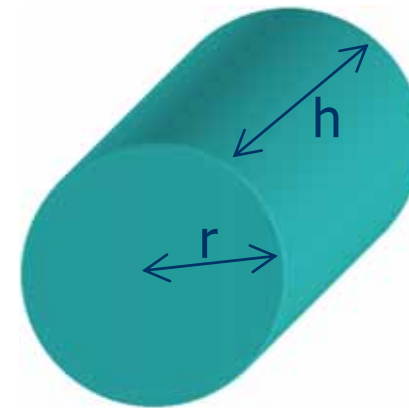
$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = c$$

$$\nabla V = \langle 2\pi rh, \pi r^2 \rangle$$

$$\nabla S = \langle 4\pi r + 2\pi h, 2\pi r \rangle$$

$$\begin{cases} \nabla V(p) = \lambda \nabla S(p) \\ 2\pi r^2 + 2\pi rh = c \end{cases}$$



Ακρότατα υπό συνθήκη

Να μεγιστοποιηθεί ο όγκος κυλίνδρου εγγεγραμμένου στη μοναδιαία σφαίρα.

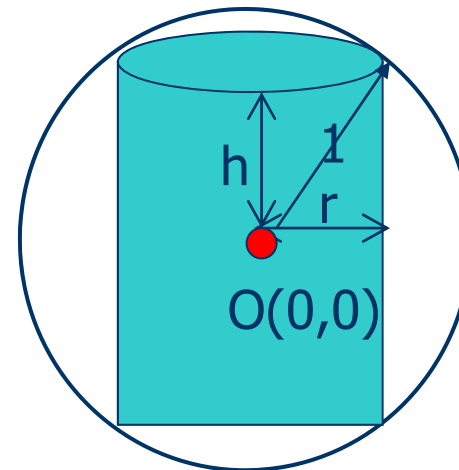
$$V(r, h) = 2\pi r^2 h$$

$$g(r, h) = h^2 + r^2 - 1 = 0$$

$$\nabla V = \langle 4\pi rh, 2\pi r^2 \rangle$$

$$\nabla g = \langle 2r, 2h \rangle$$

$$\begin{cases} \nabla V(p) = \lambda \nabla g(p) \\ h^2 + r^2 = 1 \end{cases}$$

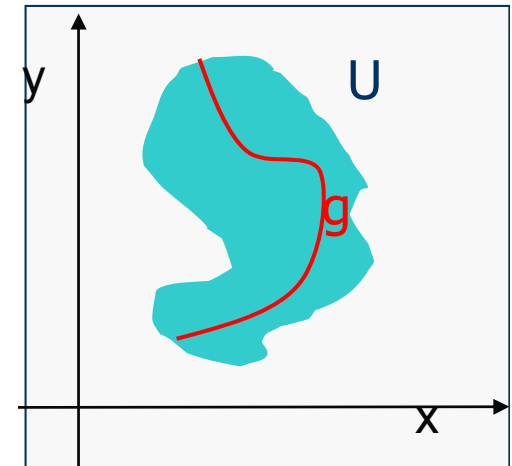


Ακρότατα υπό 2 συνθήκες

Αν $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f επί των

$g_1(x,y,z)=0$ και $g_2(x,y,z)=0$ (τομή 2 επιφανειών δίνει καμπύλη).



Ερώτημα: Περιορίστε την f στην g_1 βρείτε τα κρίσιμα σημεία.

Προηγουμένως P κρίσιμο σημείο όταν $\nabla f(p) \perp$ στην εφαπτομένη της καμπύλης.

Τα $\nabla g_1(p)$ και $\nabla g_2(p)$ είναι κάθετα στην εφαπτομένη της καμπύλης.

Επομένως, το $\nabla f(p)$ αρκεί να ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα $\nabla g_1(p)$ και $\nabla g_2(p)$,

$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p)$, (λ_1, λ_2 πολλαπλασιαστές lagrange)



Ακρότατα υπό συνθήκη

Να βρεθεί το σημείο τομής των επιπέδων που είναι πιο κοντά στο $O(0,0,0)$ $x+3z=10$, $2x+y+z=1$.

$$\min \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \quad d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla d = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$$

$$\nabla g_1 = \langle 1, 0, 3 \rangle$$

$$\nabla g_2 = \langle 2, 1, 1 \rangle$$

$$\begin{cases} \nabla d(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p) \\ 2x+y+z=1 \\ x+3z=10 \end{cases}$$



Ακρότατα υπό συνθήκη

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2, D = \{(x, y) \mid x^4 + y^2 \leq 1\}$$

Βρείτε τα ακρότατα της f .

$$\alpha) \text{ κρίσιμα σημεία στο } D^\circ = \{(x, y) : x^4 + y^2 < 1\}$$

$$\nabla f = \langle 2x + y, 2y + x \rangle$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \rightarrow x = y = 0 \in D^\circ \quad f(0,0) = 0$$

$$\beta) \text{ κρίσιμα σημεία στο } \partial D = \{(x, y) : x^4 + y^2 = 1\}$$

$$g(x, y) = x^4 + y^2 - 1$$

$$\begin{cases} \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p) \\ x^4 + y^2 = 1 \end{cases}$$



HY-111

Απειροστικός Λογισμός II

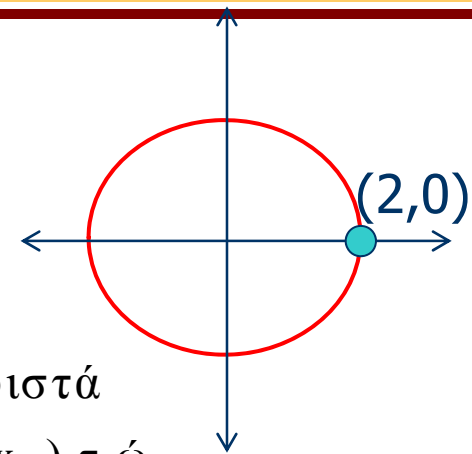
Πεπλεγμένες Συναρτήσεις



Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

$$\text{π.χ. } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 : G$$



Ερώτημα: Γύρω από ποια σημεία $P=(x_0, y_0)$ η καμπύλη παριστά γράφημα συνάρτησης ως προς x , δηλαδή υπάρχει γειτονιά $\Delta(x_0)$ τ.ώ.

$$\Delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

Πρόβλημα έχω στα σημεία Q όπως το $(2,0)$ για τα οποία η εφαπτομένη του γραφήματος στο Q είναι // με τον y άξονα ή ισοδύναμα η κάθετη της καμπύλης στο Q είναι \perp στον y άξονα.

Αν η G δίδεται από μια εξίσωση $g(x,y)=0$ τότε η \perp στο $P=(x_0, y_0)$ είναι $\nabla g(x_0, y_0)$



Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

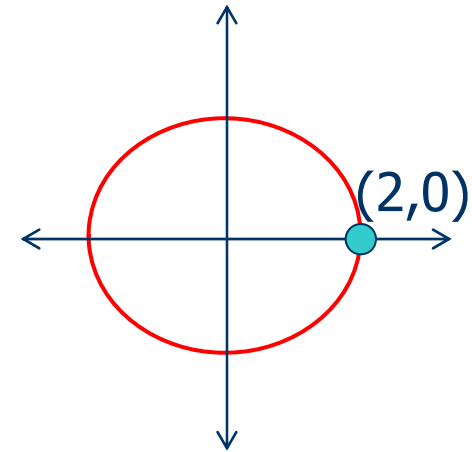
Αν η $g(x,y)$ παριστά καμπύλη G στο επίπεδο τότε τα σημεία $Q(x_0,y_0)$ γύρω από τα οποία η G δε παριστά γράφημα συνάρτησης είναι αυτά που το $\nabla g(x_0,y_0) \perp$ στον y άξονα.

$$\nabla g(x_0,y_0) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \right\rangle$$

Άρα υπάρχει πρόβλημα με τα σημεία $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

$$\text{π.χ. } g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 : G$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 2, (x, y) = (\pm 2, 0)$$



Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Έστω $f(x,y)=0$ καμπύλη και $P(x_0,y_0)$ τ.ώ. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Έστω $y=y(x)$ σε γειτονιά του P . Βρες $\frac{dy}{dx}$;

$$\left. \begin{array}{l} z=f(x,y) \\ y=y(x) \end{array} \right\} \text{Θεωρώντας } f(x,y(x))=0 \Rightarrow 0 = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Στο παράδειγμα $\frac{dy}{dx} = \frac{-x/2}{y} = -\frac{x}{2y}$

Γενικότερα αν $f(x,y,z)=0$ ορίζει επιφάνεια S πάρε $P(x_0,y_0,z_0)$, θέλω να βρω

$z=Z(x,y)$, πρόβλημα έχω στα σημεία Q για τα οποία $\nabla f(Q)$ είναι κάθετο στο z άξονα $\frac{\partial f}{\partial z}(Q)=0$.



Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

$z^3 - xy + yz + y^3 = 0$ (1). Σε ποια σημεία έχω πρόβλημα

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow 3z^2 + y = 0 \Rightarrow y = -3z^2 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} z=0 \text{ και } y=0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a, 0, 0), a \in \mathbb{R} \\ x = \frac{27z^4 + 2z}{3}, \left(\frac{27a^4 + 2a}{3}, -3a^2, a \right), a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$z = z(x, y)$$

$$f(x, y, z(x, y)) = 0$$

Γενικά αν $f(x_1, \dots, x_n, z) = 0 \Rightarrow f(X, z) = 0$ και $P = (X_0, z)$ με $f(P) = 0$.

Τότε γύρω από το P μπορώ να παραστήσω συνάρτηση $z = z(x_1, \dots, x_n)$ αν $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$



Υπενθύμιση από γραμμική άλγεβρα

$$A \mathbf{x} = \mathbf{c}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Αν $\det(A) \neq 0$ τότε έχω μοναδική λύση που εξαρτάται από το \mathbf{c} , A .

Έστω το σύστημα $A \mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, \mathbf{y} μεταβλητή

Αν $\det(A) \neq 0$ τότε έχω μοναδική λύση

Γενικότερα αν $\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{array} \right\}$ Εάν $P(X_0, Y_0)$ ικανοποιεί το σύστημα, τότε γύρω από το P μπορώ να επιλύσω ως προς x_1, \dots, x_n αν $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) \neq 0$



Παράδειγμα

$$\text{π.χ. } \left\{ \begin{array}{l} x + xyz = u \\ y + xy = v \\ z + 2x + 3z^2 = w \end{array} \right\} \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 + yz & xz & xy \\ y & 1 + x & 0 \\ 2 & 0 & 1 + 6z \end{pmatrix}$$

Έστω $P = (1, 1, 1)$, $y = (2, 2, 6)$

$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) = 17$. Άρα υπάρχει γειτονιά $\Delta(2, 2, 6)$ ώστε για $(u_0, v_0, w_0) \in \Delta$

μπορώ να γράψω $x = x(u_0, v_0, w_0)$, $y = y(u_0, v_0, w_0)$, $z = z(u_0, v_0, w_0)$

και να λύσω το σύστημα



Υπενθύμιση από γραμμική άλγεβρα

Γενικότερα αν $\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{array} \right\}$ Εάν $P(X_0, Y_0)$ ικανοποιεί το σύστημα, τότε γύρω από το P μπορώ να επιλύσω ως προς x_1, \dots, x_n αν $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right) \neq 0$

$$\text{π.χ. } \left\{ \begin{array}{l} x^3 u + xy^2 v + w = 0 \\ x^2 w + 2yv = 0 \end{array} \right\} \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) = \det\begin{pmatrix} 3x^2 u + y^2 v & 2xyv \\ 2xw & 2v \end{pmatrix}$$

Εστω $P = (1, 1, 1, -2)$

$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right) = 16$. Άρα υπάρχει γειτονιά $\Delta(1, 1, -2)$ ώστε για $(x, y) \in \Delta$

μπορώ να γράψω $x = x(u_0, v_0, w_0), y = y(u_0, v_0, w_0), z = z(u_0, v_0, w_0)$

και να λύσω το σύστημα



HY-111

Απειροστικός Λογισμός II

Επίλυση Συστημάτων με χρήση
Matlab



Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

$$A x = b$$

Παράδειγμα

$$x+2y+3z = 1$$

$$2x+y+3z = 2$$

$$4x+5y+z = 3$$

$$A = [1 \ 2 \ 3; 2 \ 1 \ 3; 4 \ 5 \ 1];$$

$$b = [1 \ 2 \ 3]';$$

$$\det(A)$$

$$x = \text{inv}(A)*b$$



Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

- Λύσεις εξίσωσης (π.χ. από συστήματα με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange)

Πρόβλημα: Υπολόγισε τις λύσεις της εξίσωσης $\cos(2x)+\sin(x)=1$.

Λύση:

```
s = solve('cos(2*x)+sin(x)=1')
```

```
s =
```

```
[ 0]
```

```
[ pi]
```

```
[ 1/6*pi]
```

```
[ 5/6*pi]
```



Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

Υπολόγισε τις λύσεις του συστήματος

$$x^6 + y^6 = 1$$

$$x + 2y = 1$$

Λύση:

```
figure;  
ezplot('x^6+y^6 - 1',[-2 2],[-2 2]);  
hold on;  
ezplot('x+2*y- 1',[-2 2],[-2 2]);
```

```
A = solve('x^6 + y^6= 1 ', 'x + 2*y = 1')
```

```
A =  x: [6x1 sym]  
      y: [6x1 sym]
```

```
A.x
```

```
A.y
```



Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

Υπολόγισε τις λύσεις του συστήματος

$$z+x^6+y^6 = 1$$

$$z+x+2y = 1$$

$$2*z-x-y = 1$$

Λύση:

```
figure;  
ezmesh('-x^6-y^6 + 1',[-1 1],[-1 1]);  
hold on;  
ezmesh('-x-2*y+ 1',[-1 1],[-1 1]);  
hold on;  
ezmesh('0.5*(+x+y+ 1)',[-1 1],[-1 1]);
```

```
A = solve('z+x^6 + y^6= 1 ', 'z+x + 2*y = 1','2*z-x-y=1')
```

```
A = x: [6x1 sym]
```

```
y: [6x1 sym]
```



Επίλυση συστημάτων με χρήση Matlab

● Αθροίσματα

Πρόβλημα: Υπολόγισε το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Λύση:

```
syms x k
```

```
s1 = symsum(1/k^2,1,inf)
```

```
s1 = 1/6*pi^2
```

