

HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλων



Παραδείγματα

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$$

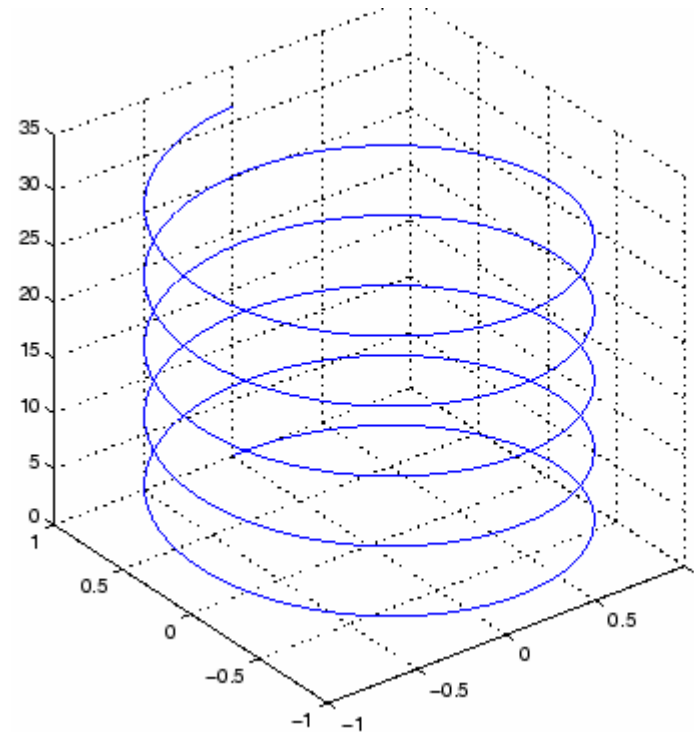
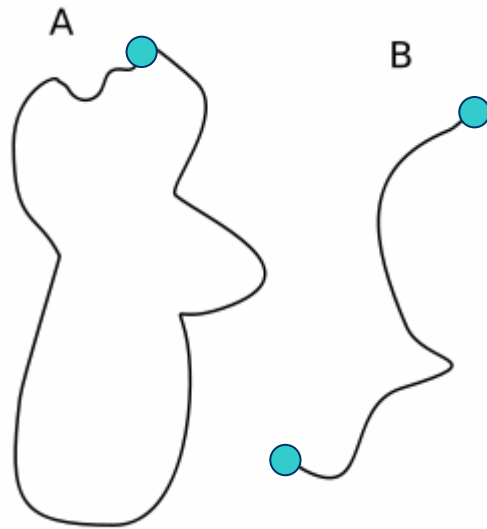
$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Θέσης – χρόνου

ταχύτητας χρόνου

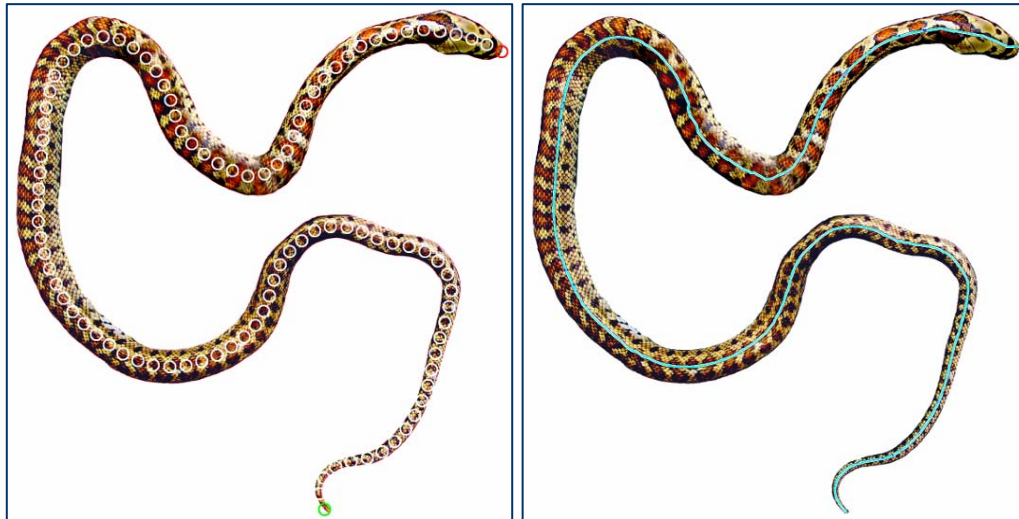
Χαρακτηριστικού-χρόνου



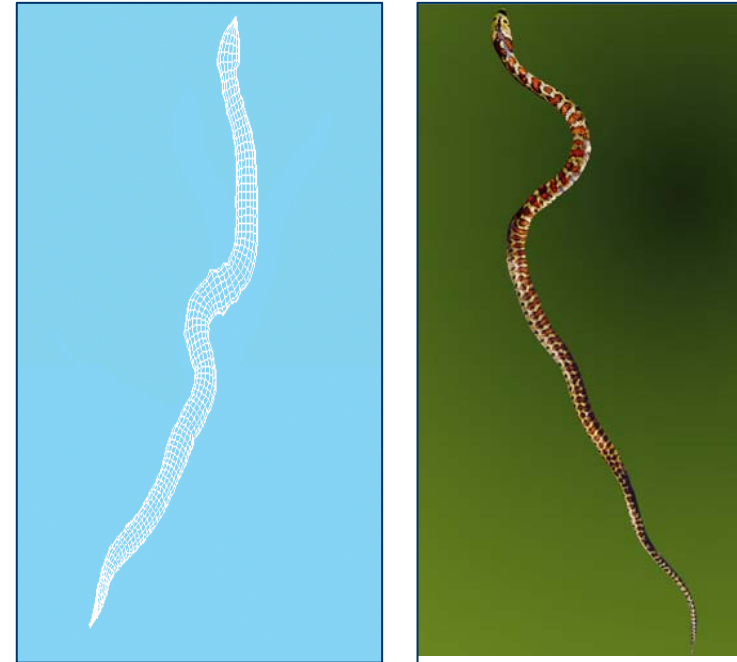
Παραδείγματα από Γραφική

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$$



3D Μοντέλα



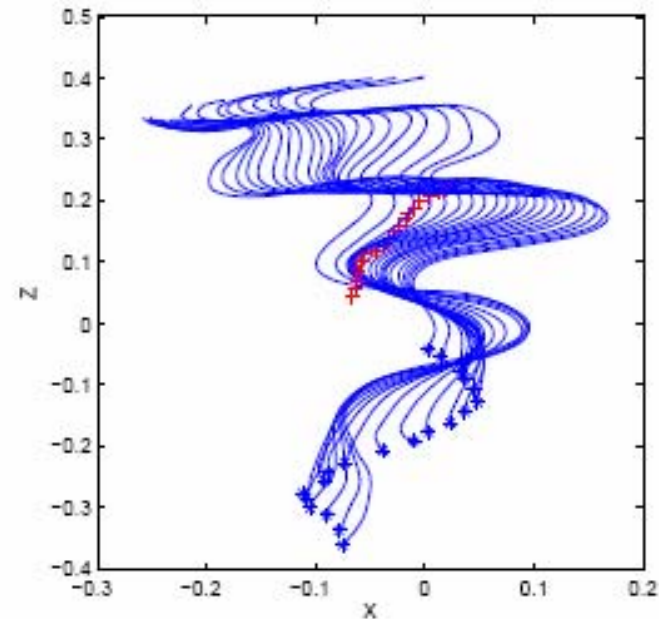
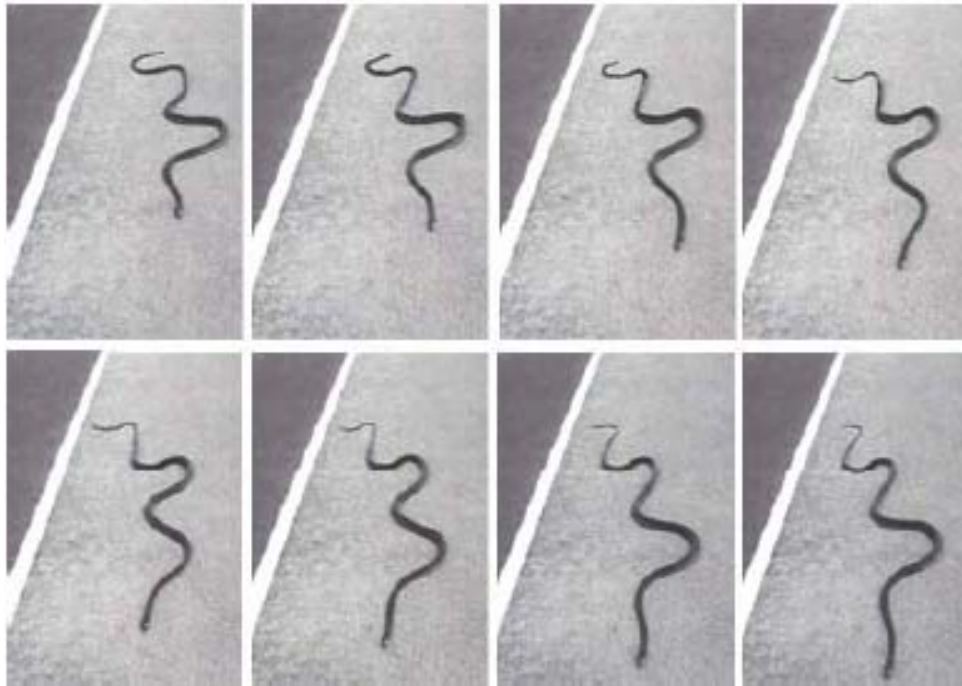
Με τη βοήθεια της καμπύλης $c(t)$ του σκελετού του φιδιού έχουμε πετύχει 3D ανακατασκευή του.



Παραδείγματα από κινηματική/γραφική

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$$



+ : τροχιά κέντρου μάζας

* : τροχιά κεφαλιού

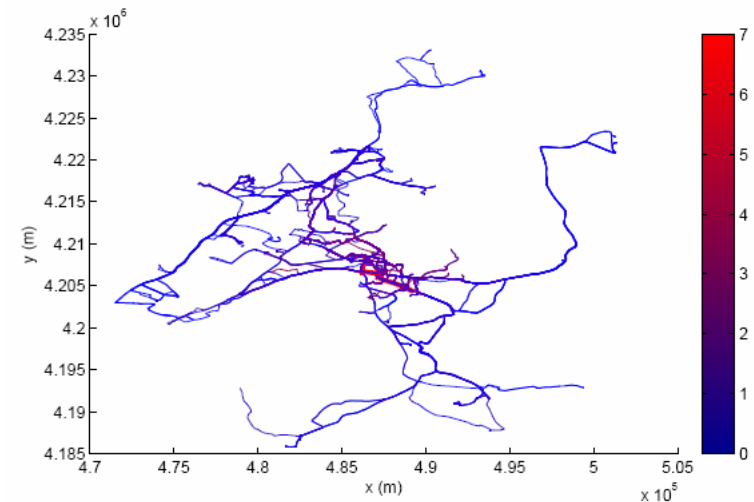
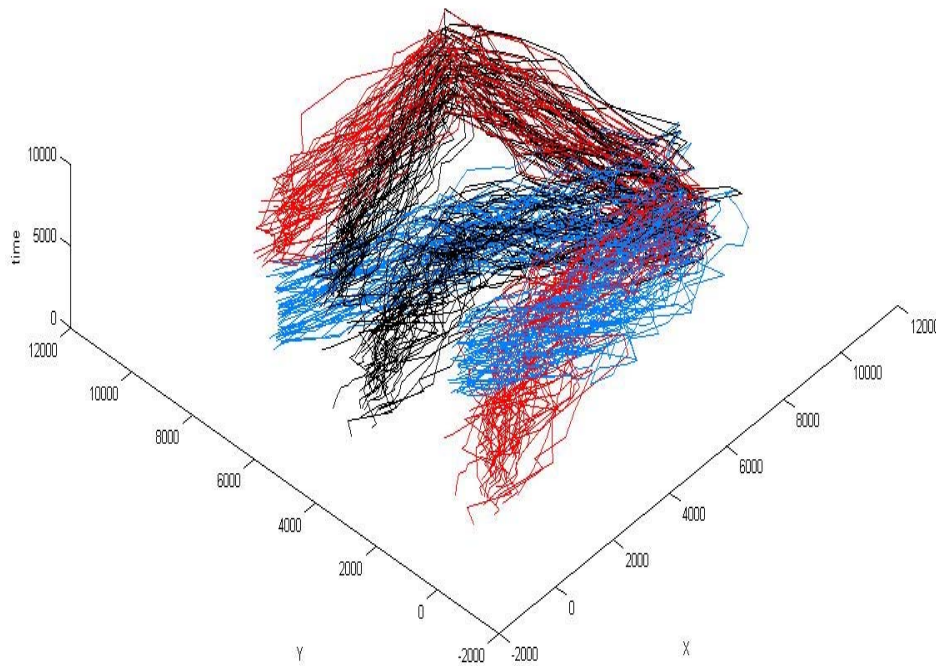
Από την ανάλυση των καμπύλων κίνησης διαφόρων σημείων μπορούμε να προχωρήσουμε σε ανακατασκευή της κίνησης και σε σύνθεση 3D animation



Παραδείγματα με χωροχρονικές βάσεις δεδομένων

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow (t, x(t), y(t))$$



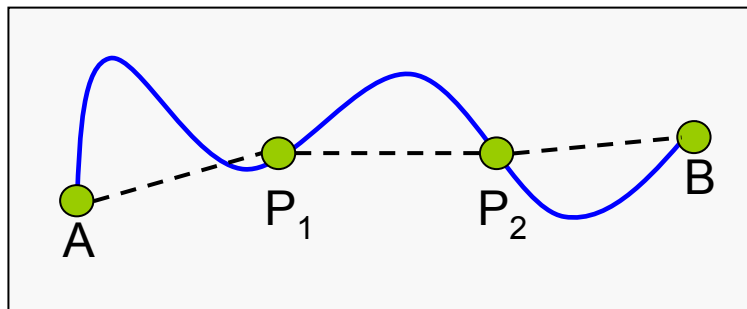
Ομαδοποίηση τροχιών- Εντοπισμός τροχιών που αναπαριστούν τη βάση



Ισοδιαμέριση Καμπύλης

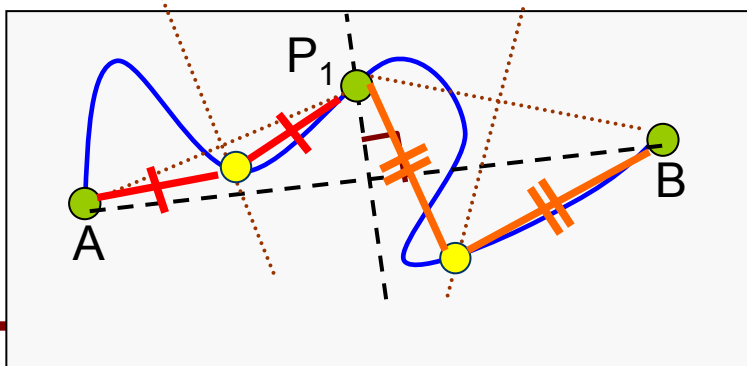
The Curve Equipartition (EP) Problem

Problem Definition: It is given a continuous curve $\mathbf{C}(t)$, $t \in [0,1]$ starting at point \mathbf{A} and ending at point \mathbf{B} . The goal is to locate $\mathbf{N}-1$ consecutive curve points $\mathbf{P}_i = \mathbf{C}(t_i)$, $i = 1, \dots, \mathbf{N}-1$, so that the curve can be divided into \mathbf{N} segments with equal length chords, $|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i+1}| = |\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{i+2}|$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{A}$, $\mathbf{P}_N = \mathbf{B}$.



An EP example for $N=3$, $|\mathbf{AP}_1| = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = |\mathbf{P}_2\mathbf{B}|$

- When N is higher than two, there is not a trivial method to compute the equal length line segments.



An EP example for $N=2$, $|\mathbf{AP}_1| = |\mathbf{P}_1\mathbf{B}|$

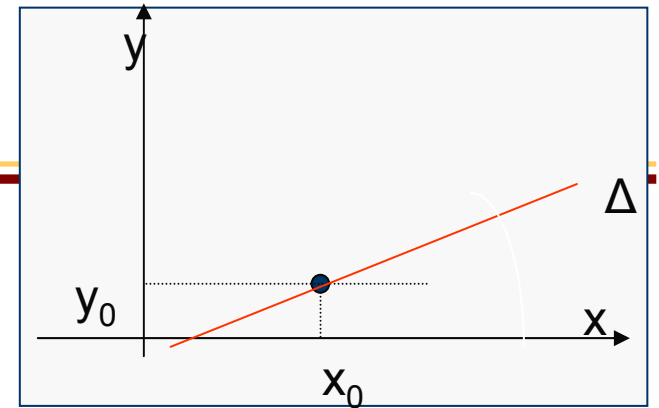
- When $N = 2$, we have to locate a curve point \mathbf{P}_1 , so that $|\mathbf{AP}_1| = |\mathbf{P}_1\mathbf{B}|$. This point can be given as the intersection of the curve with the AB segment bisector.
- We can not apply this method inductively.



Παραδείγματα

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$$



Ευθεία στο \mathbb{R}^2 που περνάει από το (x_0, y_0) και έχει τη διεύθυνση του $\vec{v} = \langle a, b \rangle$

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Ευθεία \mathbb{R}^n που περνάει από το (x_1, \dots, x_n) και έχει τη διεύθυνση του $\vec{v} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow (x_1 + a_1 t, \dots, x_n + a_n t)$$



Παραδείγματα

$$c(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$$

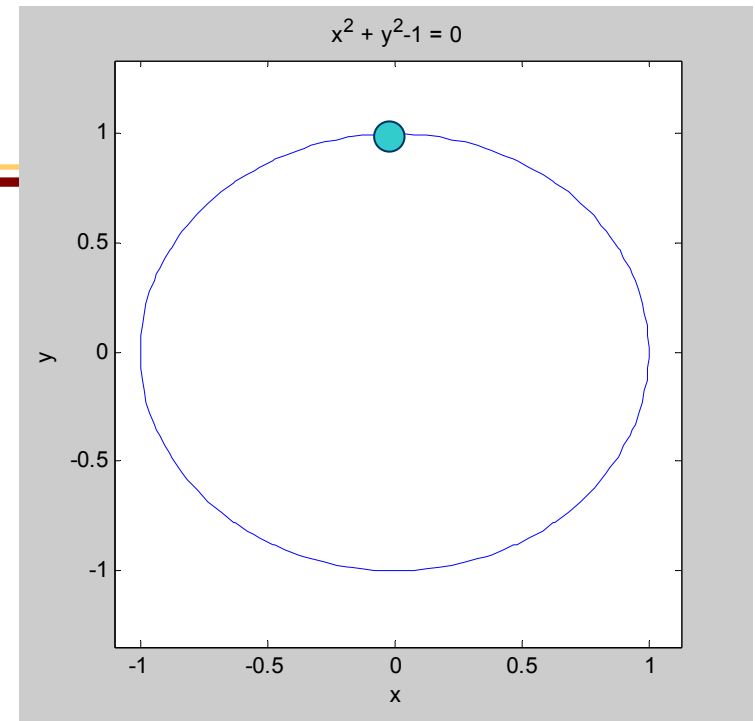
$$c(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (\cos(2t), \sin(2t))$$

$$c(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (\cos(2t), \sin(2t))$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



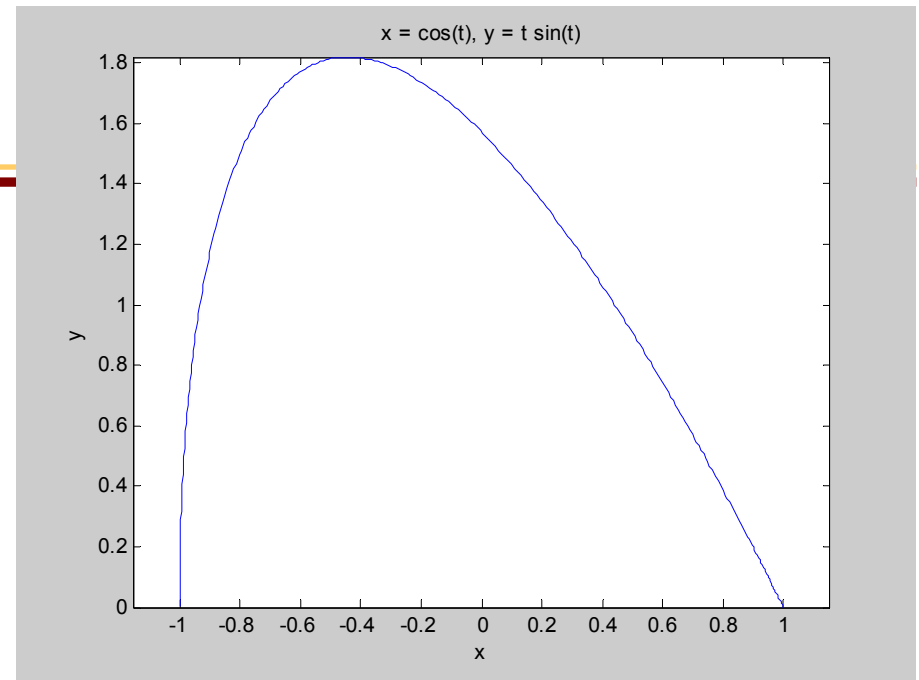
Matlab: `ezplot('x^2 + y^2 - 1');`



Παραδείγματα

$$c(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (\cos(t), t \sin(t))$$



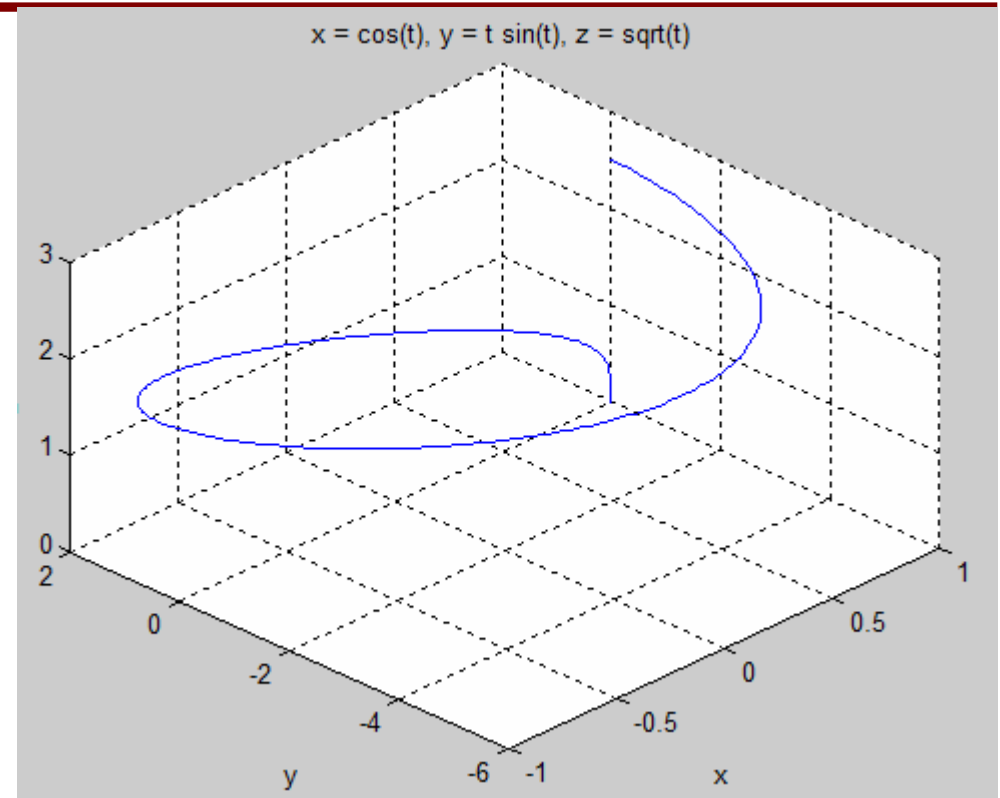
Matlab: `ezplot('cos(t)', 't.*sin(t)', [0 pi]);`



Παραδείγματα

$$c(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow (\cos(t), t \sin(t), \sqrt{t})$$



Matlab: `ezplot3('cos(t)', 't.*sin(t)', 'sqrt(t)');`

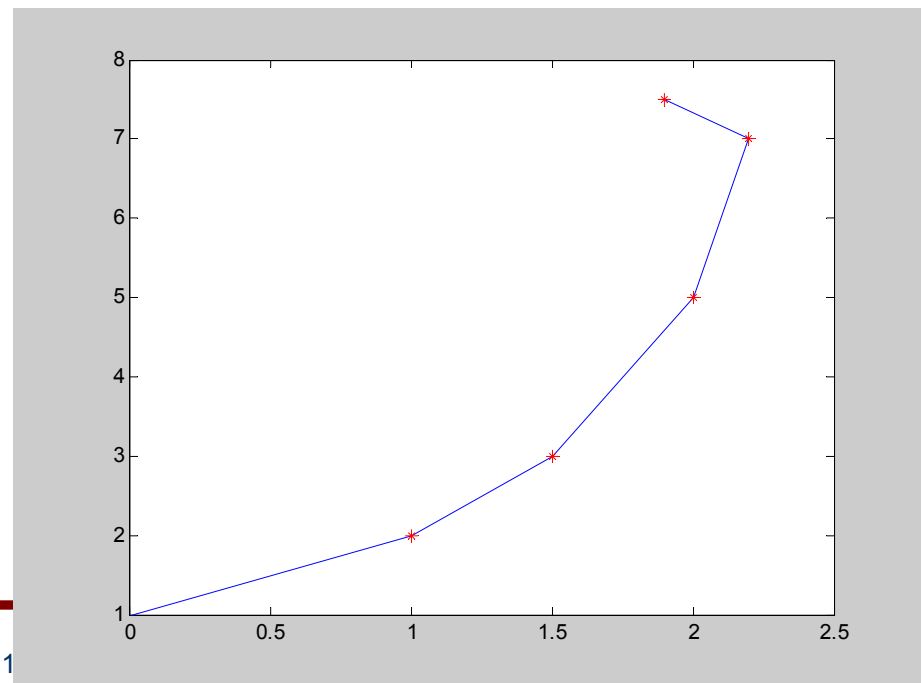
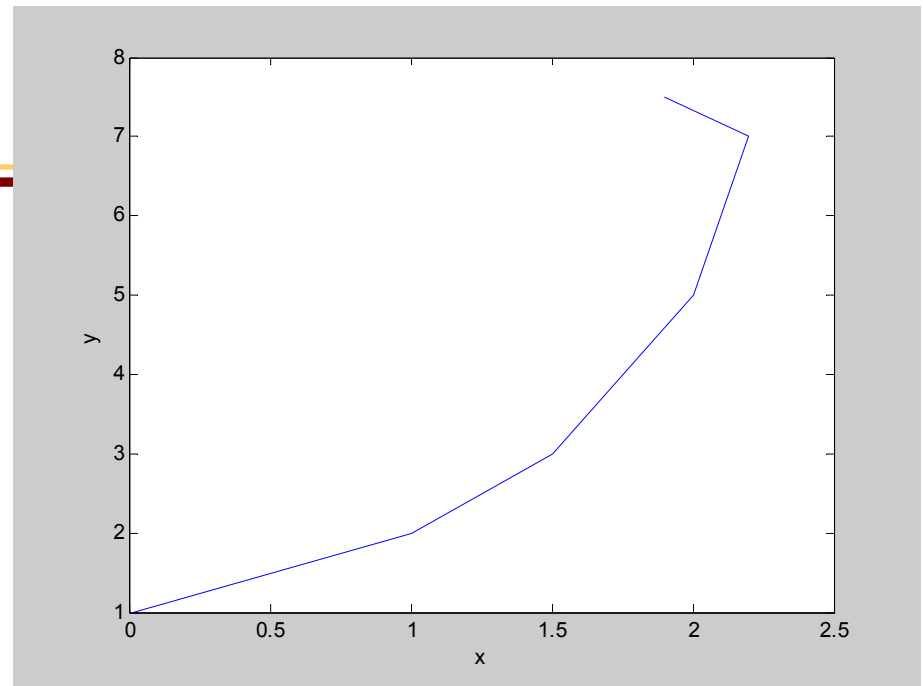


Παραδείγματα

Εκτύπωση καμπύλης με γραμμική παρεμβολή διαδοχικών σημείων (από διακριτό σε συνεχές)

A1(0,1)
A2(1,2)
A3(1.5,3)
A4(2,5)
A5(2.2,7)
A6(1.9,7.5)

```
Matlab:  
x = [0 1 1.5 2 2.2 1.9];  
y = [1 2 3 5 7 7.5];  
plot(x,y);  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
  
figure;  
plot(x,y);  
hold on;  
plot(x,y,'r*');
```



Παραδείγματα

Εκτύπωση 3D καμπύλης με γραμμική παρεμβολή διαδοχικών σημείων
(από διακριτό σε συνεχές)

A1(0,1,2)
A2(1,2,3)
A3(1.5,3,4)
A4(2,5,4)
A5(2.2,7,3.3)
A6(1.9,7.5,3.1)

Matlab:

```
x = [0 1 1.5 2 2.2 1.9];
```

```
y = [1 2 3 5 7 7.5];
```

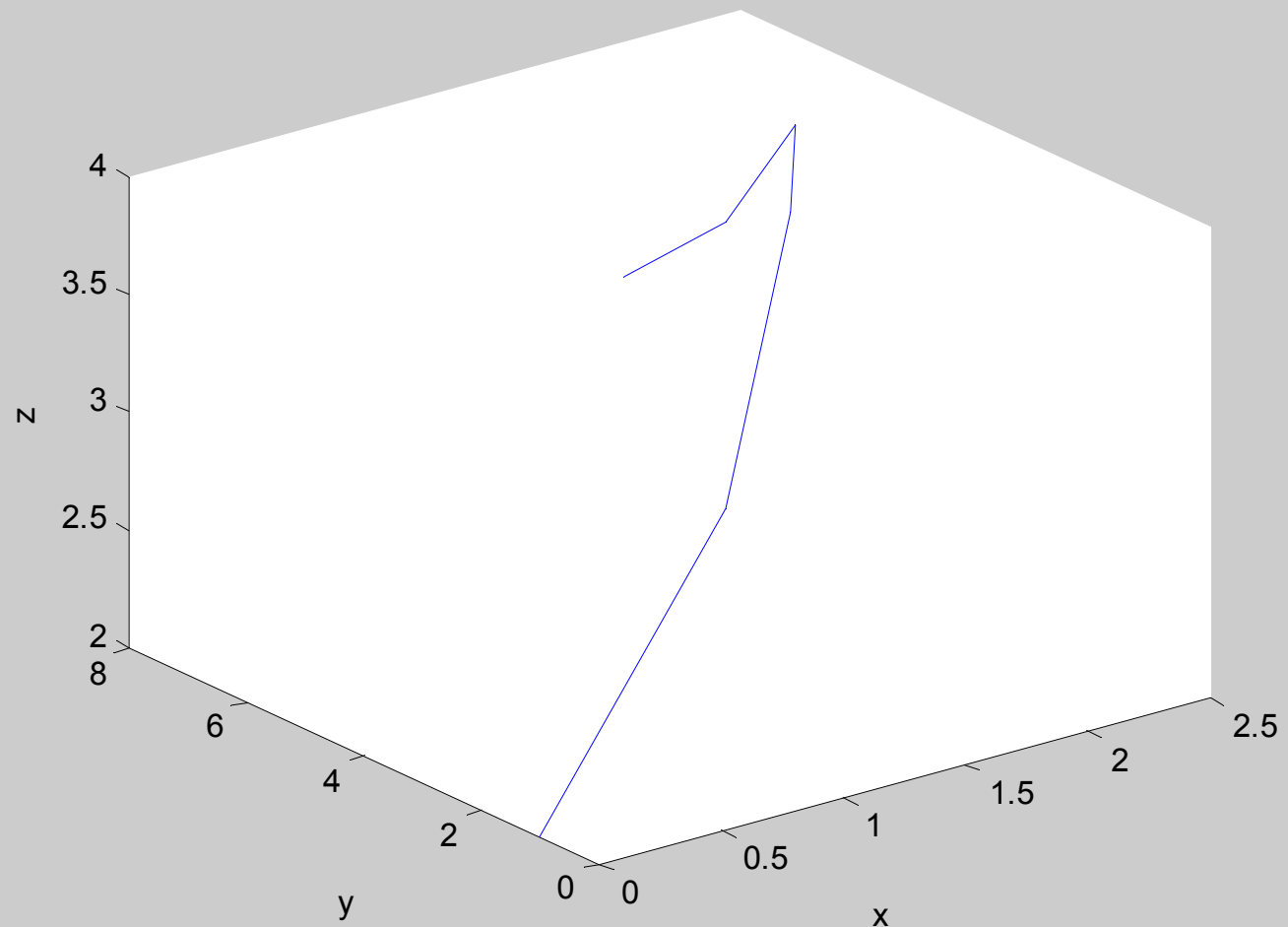
```
z = [2 3 4 4 3.3 3.1];
```

```
plot3(x,y,z);
```

```
xlabel('x');
```

```
ylabel('y');
```

```
zlabel('z');
```



Παραμετρικές εξισώσεις

Οι παραμετρικές εξισώσεις δίνουν

1. τη καμπύλη ως σύνολο σημείων
2. τον τρόπο με οποίο διαγράφεται η καμπύλη

$$c(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

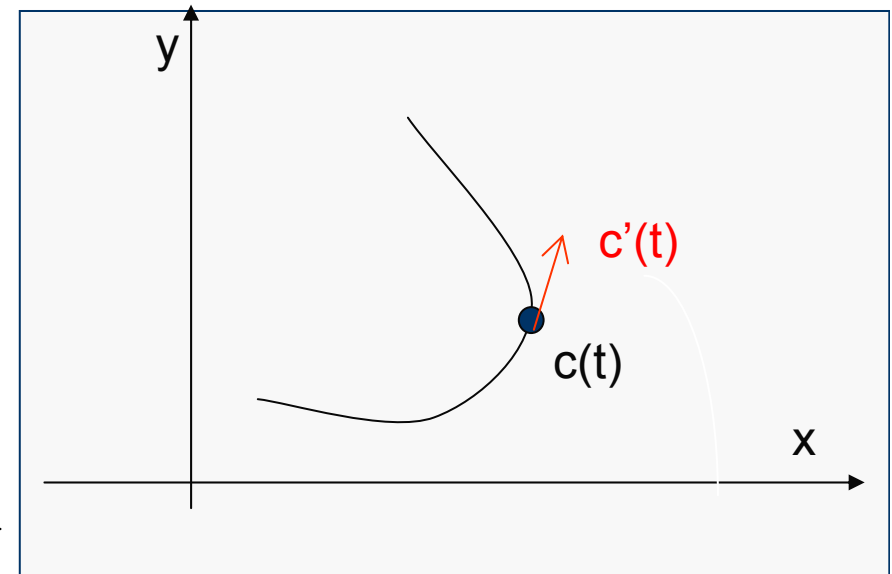
$$t \rightarrow c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Παράγωγος Καμπύλης

$$c' : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow c'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

$$c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \langle x_1'(t), \dots, x_n'(t) \rangle$$



Το $c'(t)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο $c(t)$.



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της
καμπύλης



Παραμετρικές εξισώσεις

Οι παραμετρικές εξισώσεις δίνουν

1. τη καμπύλη ως σύνολο σημείων
2. τον τρόπο με οποίο διαγράφεται η καμπύλη

$$c(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

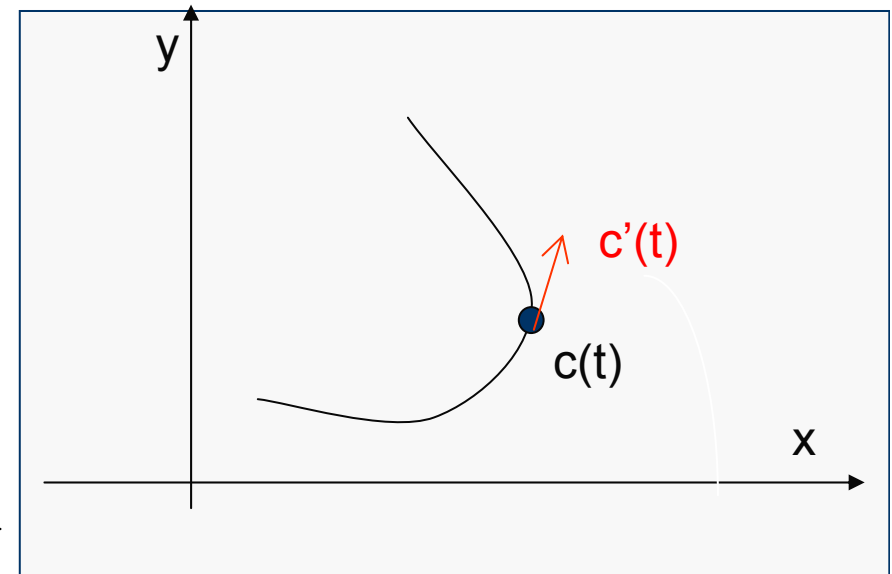
$$t \rightarrow c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Παράγωγος Καμπύλης

$$c' : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow c'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

$$c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \langle x_1'(t), \dots, x_n'(t) \rangle$$



Το $c'(t)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο $c(t)$.



Παραμετρικές εξισώσεις

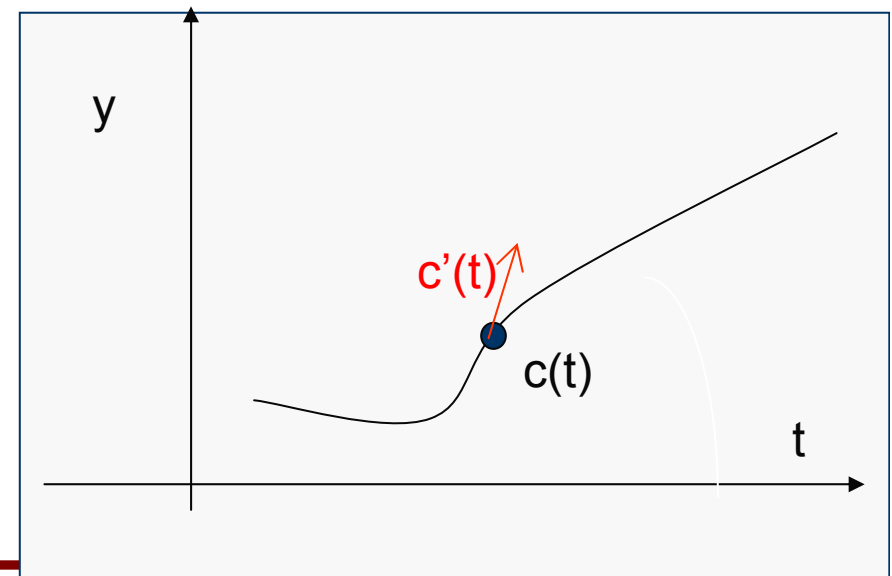
Το γράφημα της συνάρτησης $y=f(t)$ δίδεται παραμετρικά από την καμπύλη:

$$c(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (t, f(t))$$

$$c'(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (1, f'(t))$$



Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Εξίσωση της ε : $e(\lambda) = c(t_0) + \lambda c'(t_0)$

π.χ.

$$c(t) = (\cos^2(t), 3t)$$

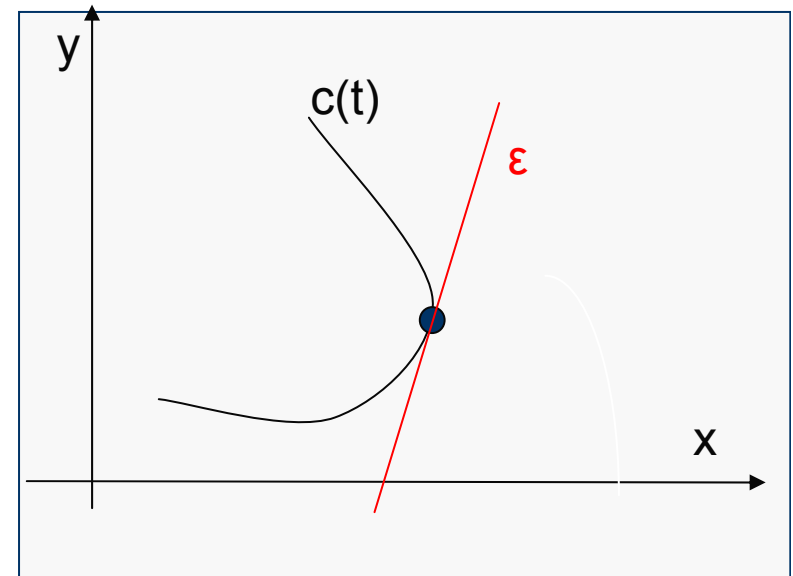
$$c'(t) = (-2 \cos(t) \sin(t), 3)$$

$$c(0) = (1, 0)$$

$$c'(0) = \langle 0, 3 \rangle$$

Εφαπτόμενη ευθεία:

$$\langle x(\lambda), y(\lambda) \rangle = \langle 1, 0 \rangle + \lambda \langle 0, 3 \rangle$$



Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Έστω G η καμπύλη που ορίζεται από την $f(x,y) = 0$ και $P \in C$.
Υποθέτω πως στο P μπορώ να παραμετροποιήσω την καμπύλη

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad C(t_0) = P, C(t) \in C$$
$$t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$$

Εφαπτόμενο διάνυσμα: $C'(t_0) = \langle x_1'(t_0), x_2'(t_0) \rangle$

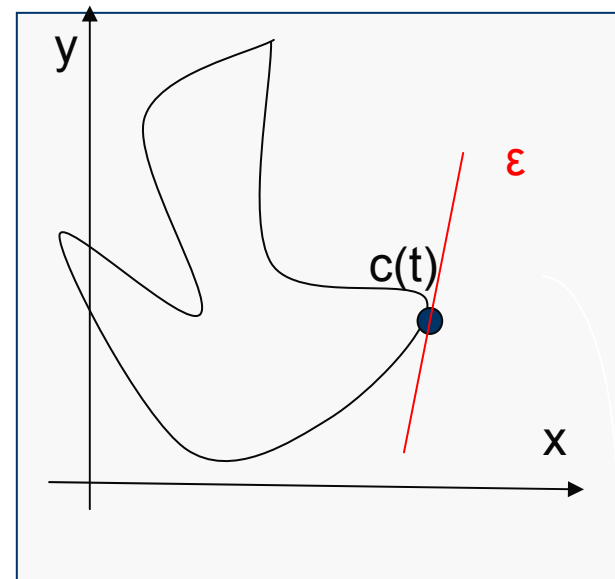
$$z = f(x, y) = 0 \quad g(t) = f(x_1(t), x_2(t)) = 0$$

$$0 = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \Rightarrow \nabla f \cdot C'(t_0) = 0 \Rightarrow$$

Το $C'(t_0)$ είναι κάθετο στο $\nabla f(P)$

Άρα το $v = \langle -\frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial x}(P) \rangle$ είναι εφαπτόμενο της G στο $P(x_0, y_0)$.

$$\text{Εξίσωση εφαπτομένης: } x(t) = x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot t, \quad y(t) = y_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot t,$$



Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Παράδειγμα $f(x, y) = x^3 + 3xy + 2y^5 - 27 = 0$ $P(3, 0)$
Εξίσωση εφαπτομένης στο P .

Γενικότερα

Αν $f(x, y, z) = 0$ είναι η επιφάνεια S του χώρου
και $P(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Τότε $\nabla f(P)$ είναι το κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο στο P .

Απόδειξη: Όμοια με πριν (κανόνας αλυσίδας)

Παράδειγμα $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3xz = 0$ $P(1, 2, \frac{1}{3})$
Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας στο P .



Εφαπτόμενη Ευθεία σε σημείο της καμπύλης

Το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης που προκύπτει από τη τομή επιφανειών $f_1(x, y, z) = 0$ και $f_2(x, y, z) = 0$ στο P .

$$\vec{v} = \nabla f_1(P) \times \nabla f_2(P)$$

Παράδειγμα

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$P(1, 1, \sqrt{2})$$



Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης

Άσκηση

$$c(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin 2t)$$

Υπολογισμός εφαπτομένης, ταχύτητας και επιτάχυνσης για $t=0$.

Άσκηση 8 & 3.1

Ζητάμε τις καμπύλες $c(t)$ που περιγράφουν τις τροχιές:

(a) $\{(x,y) : y=e^x\}$

(b) $\{(x,y) : 4x^2 + y^2 = 1\}$

(c) Ευθεία που περνάει από το $(0,0,0)$ και το (a,b,c)



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

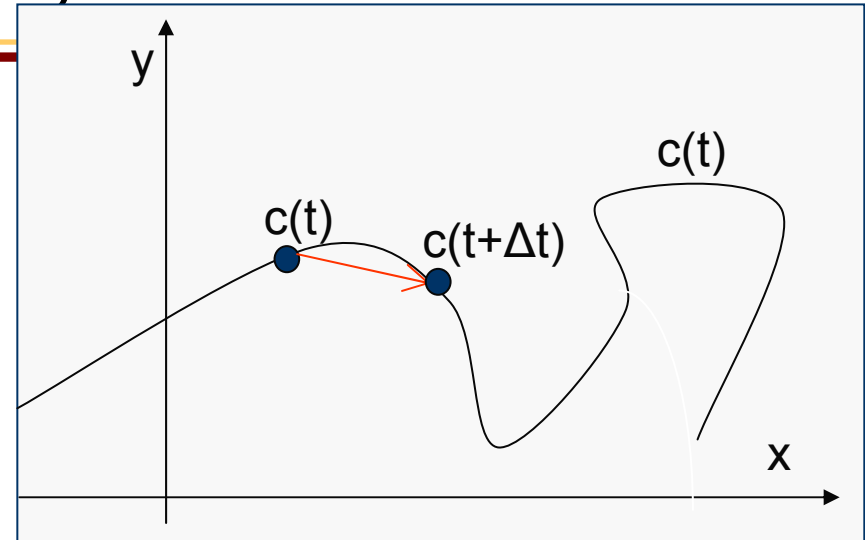
Μήκος Καμπύλων σε Παραμετρικές Εξισώσεις



Μήκος σε παραμετρικές εξισώσεις

$$c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x(t), y(t))$$



Το ΔS το προσεγγίζω από το $|\vec{C}(t+\Delta t) - \vec{C}(t)| =$

$$= \sqrt{(x(t+\Delta t) - x(t))^2 + (y(t+\Delta t) - y(t))^2} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{\Delta t}\right)^2} \right) \cdot \Delta t$$

$$\text{με } \Delta t \rightarrow dt \text{ τότε } ds = \left(\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2} \right) \cdot dt$$

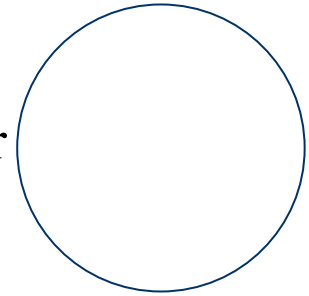
$$\text{Άρα αθροίζοντας τα } ds \text{ καθώς } a \leq t \leq b \text{ έχουμε } S = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$



Παράδειγμα: Μήκος σε παραμετρικές εξισώσεις

$$c(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (r \cos t, r \sin t) \quad \text{κύκλος κέντρου } (0,0) \text{ και ακτίνας } r$$



$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

Άσκηση 4 & 3.2

$$c(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow (t, t \sin t, t \cos t)$$

Μήκος τόξου ανάμεσα στα σημεία $(0,0,0)$ και $(\pi,0,-\pi)$.



Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης

Μέτρο Ταχύτητας $v = \frac{dS}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = |c'(t)|$

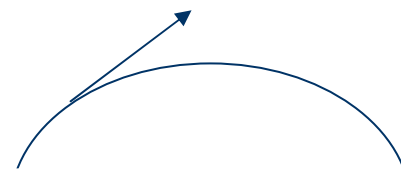
Αν $c(t) : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ η ταχύτητα $v = \frac{dS}{dt} = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t)} = |c'(t)|$

Διάνυσμα ταχύτητας: $c'(t)$

Μέτρο ταχύτητας: $|c'(t)|$

Διάνυσμα επιτάχυνσης: $c''(t)$

Μέτρο Επιτάχυνσης: $|c''(t)|$



Μήκος καμπύλης (διαδρομή) $S = \int_a^b |c'(t)| dt$



Ασκήσεις

Άσκηση 7 & 3.1

$$c'(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (t, e^t, t^2)$$

Υπολογισμός του $c(t)$ αν $c(0) = (0, -5, 1)$.



Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης

Άσκηση 11 &3.1

Ένα σώμα εγκαταλείπει τη τροχιά $s(t) = (t^2, t^3 - 3t, 0)$ για $t=2$. Υπολογισμός της θέσης του για $t=3$.

Άσκηση 6 &3.2

Έστω $\sigma:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\sigma'(t) \neq 0 \forall t$. Εφαπτόμενο μοναδιαίο

διάνυσμα της $\sigma(t)$: $T(t) = \frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|}$

$$(a) T(t) \cdot T'(t) = 0$$

$$(b) T'(t) = \dots$$

Άσκηση 2 &3.2

$$s(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \geq 0$$

Συνάρτηση μήκους=;

