

HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

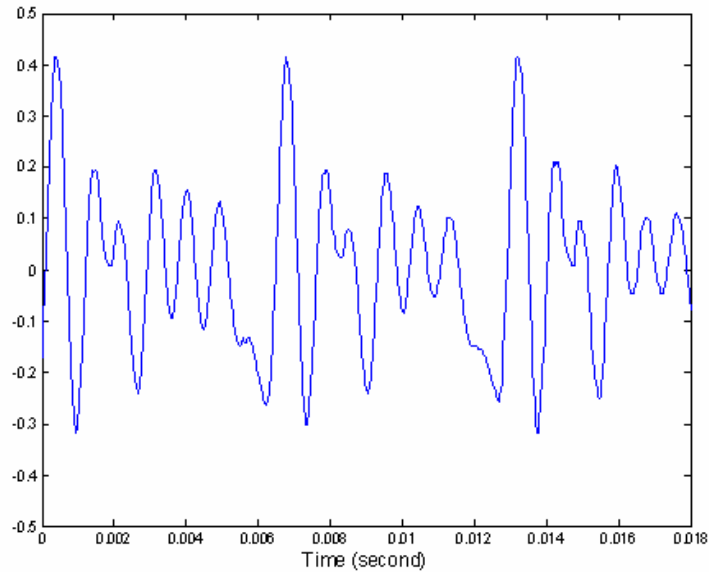


Παραδείγματα (συνεχή/διακριτά)

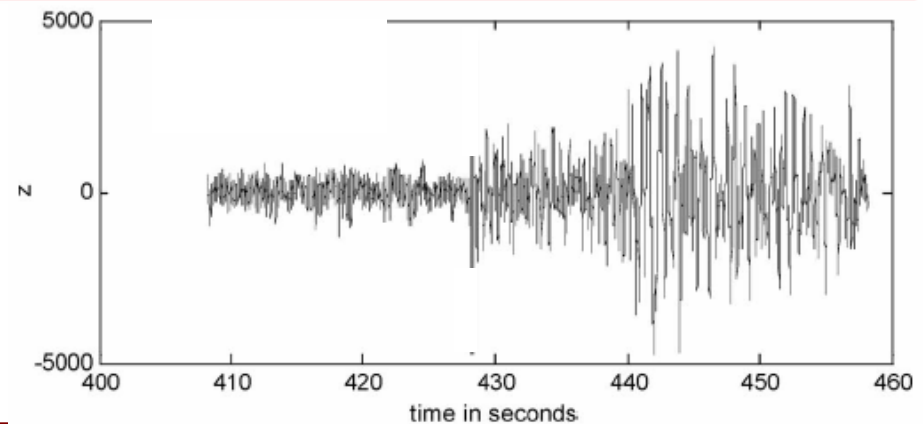
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow f(t)$$

Σήμα φωνής



Καρδιογράφημα



Παραδείγματα

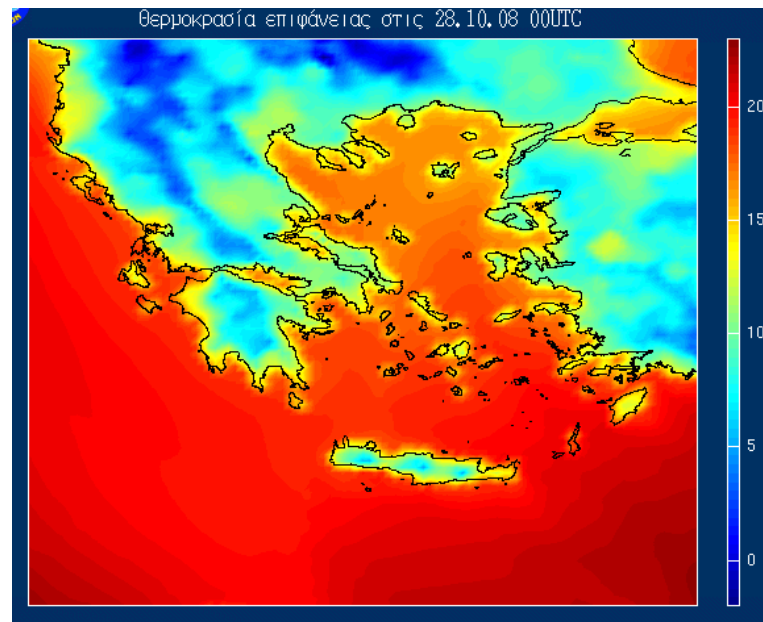
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Ασπρόμαυρες Εικόνες



Χάρτης Θερμοκρασίας



Ακτινογραφία

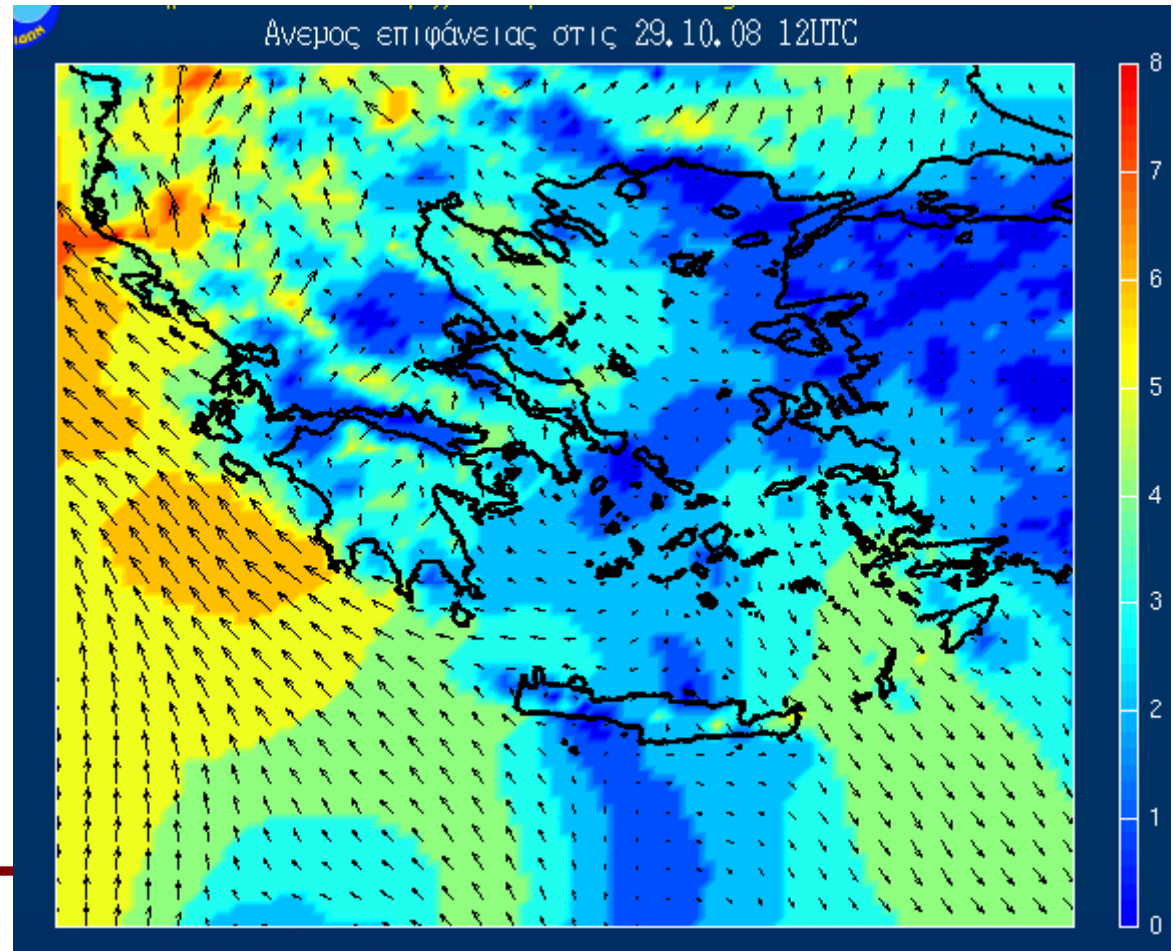


Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

Χάρτης Ανέμου

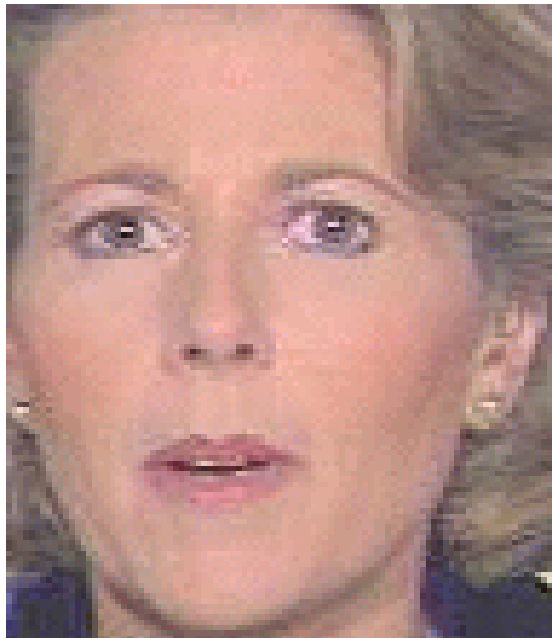


Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

Έγχρωμες Εικόνες

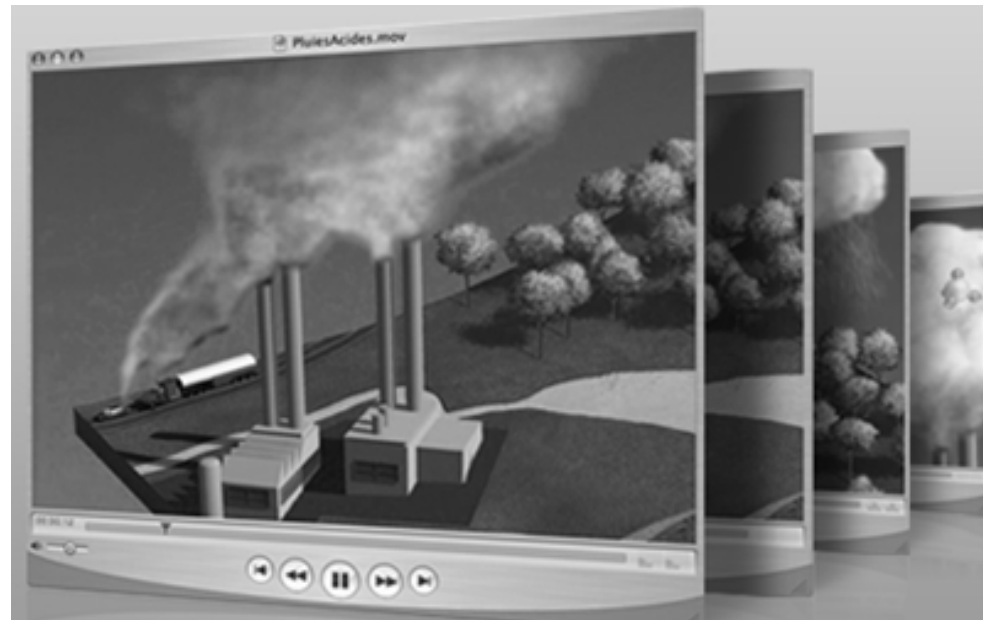


Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, t) \rightarrow f(x, y, t)$$

Ασπρόμαυρο Video



Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, t) \rightarrow (f_r(x, y, t), f_g(x, y, t), f_b(x, y, t))$$

Έγχρωμο Video



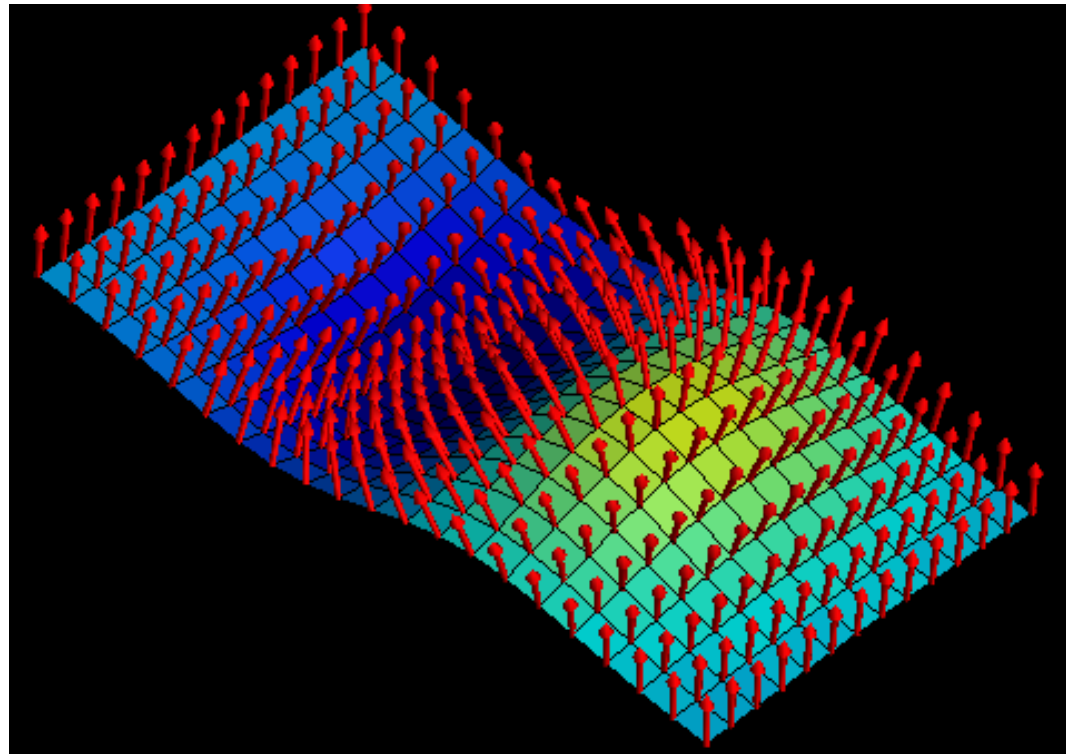
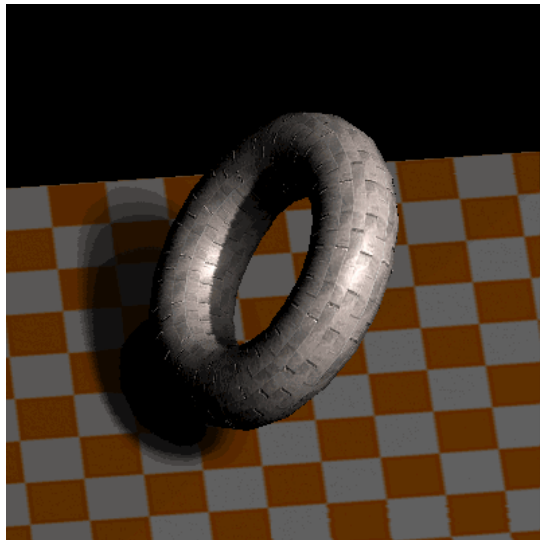
Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

Normal Vectors Map

- Εφαρμογή στη γραφική για την αντανάκλαση του φωτός



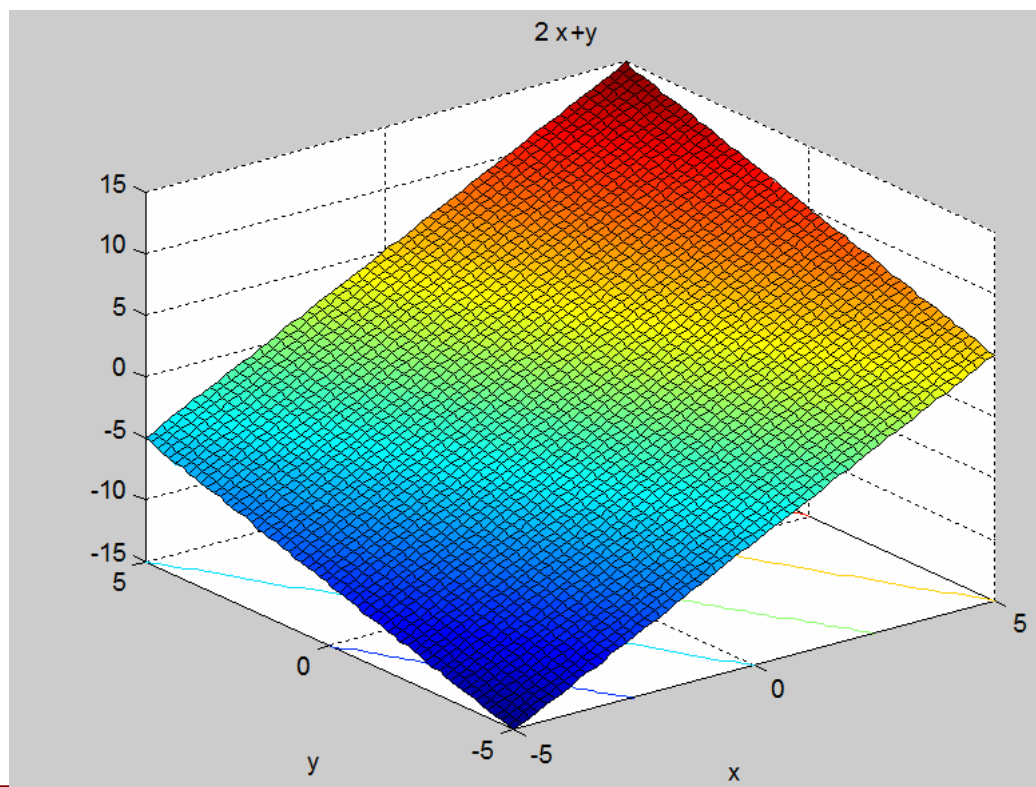
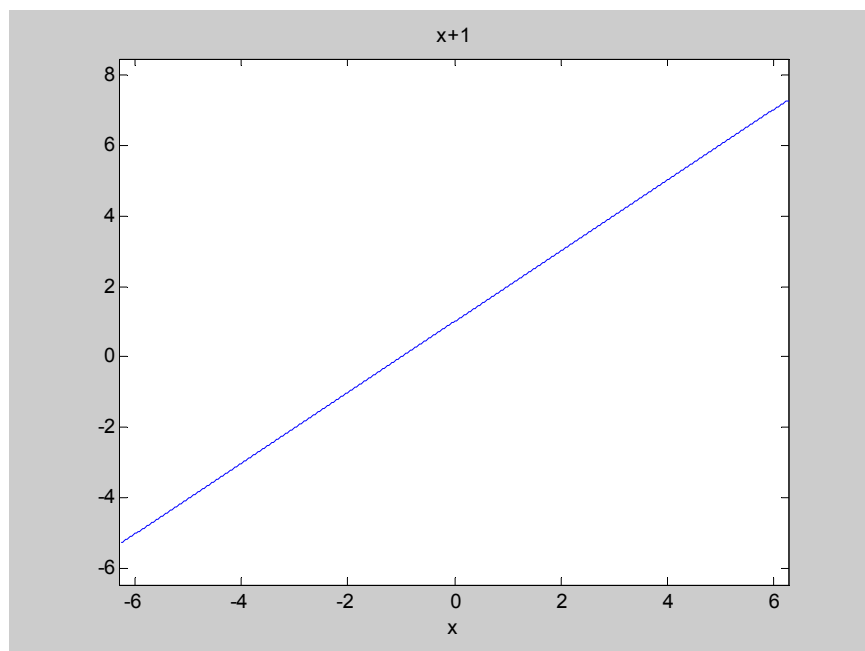
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x, y) = 2x + y + 1$$

Matlab: `ezplot('2*x+1')`

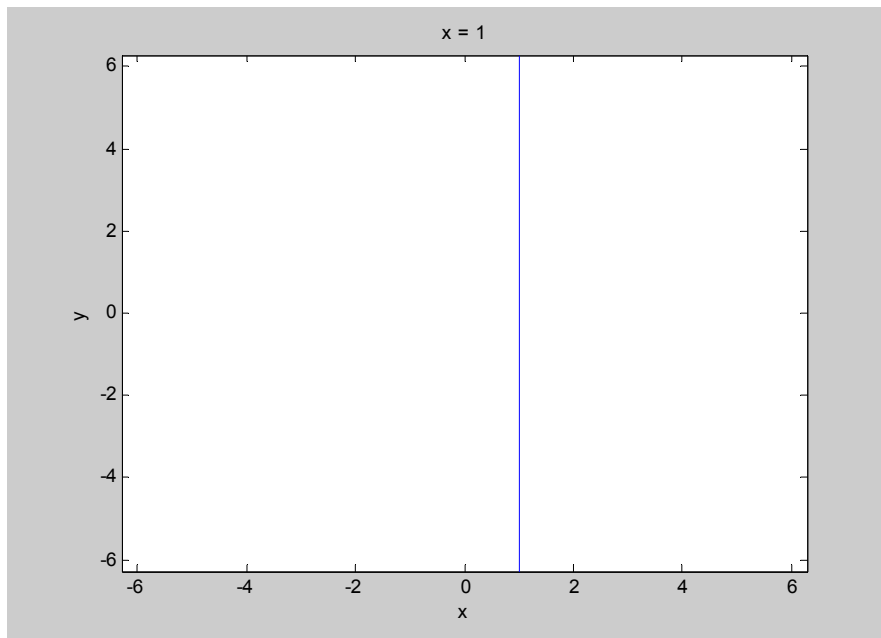


Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

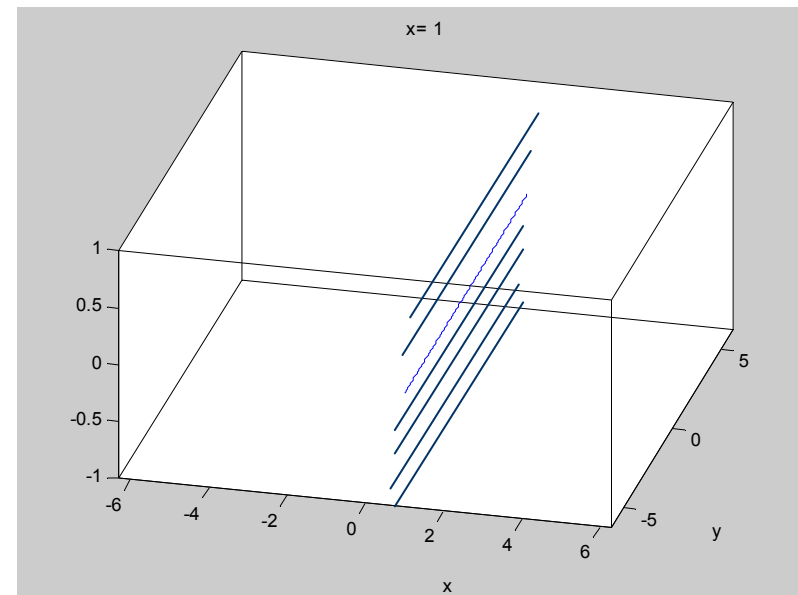
$$x = 1$$

ευθεία



$$x = 1$$

επίπεδο



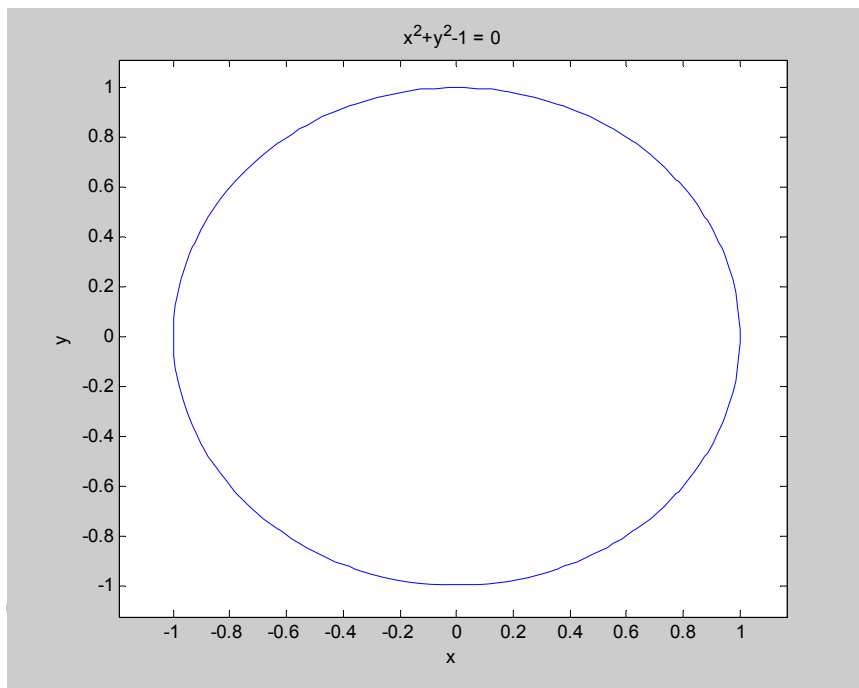
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

$$x^2 + y^2 = 1$$

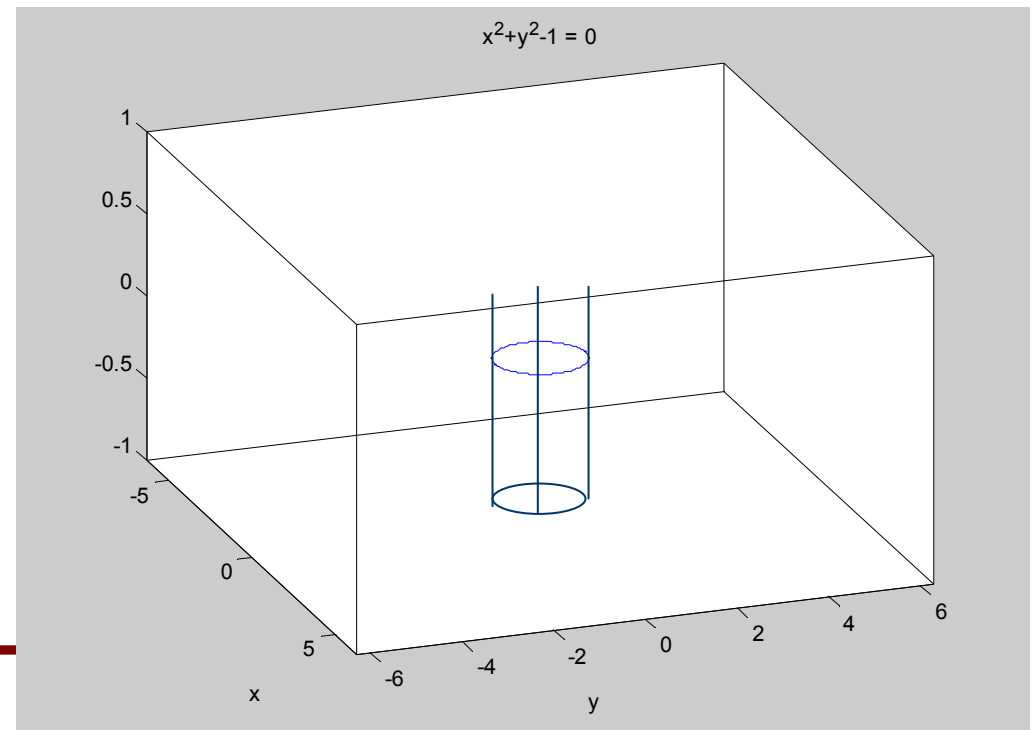
κύκλος

Matlab: `ezplot('x^2+y^2-1')`



$$x^2 + y^2 = 1$$

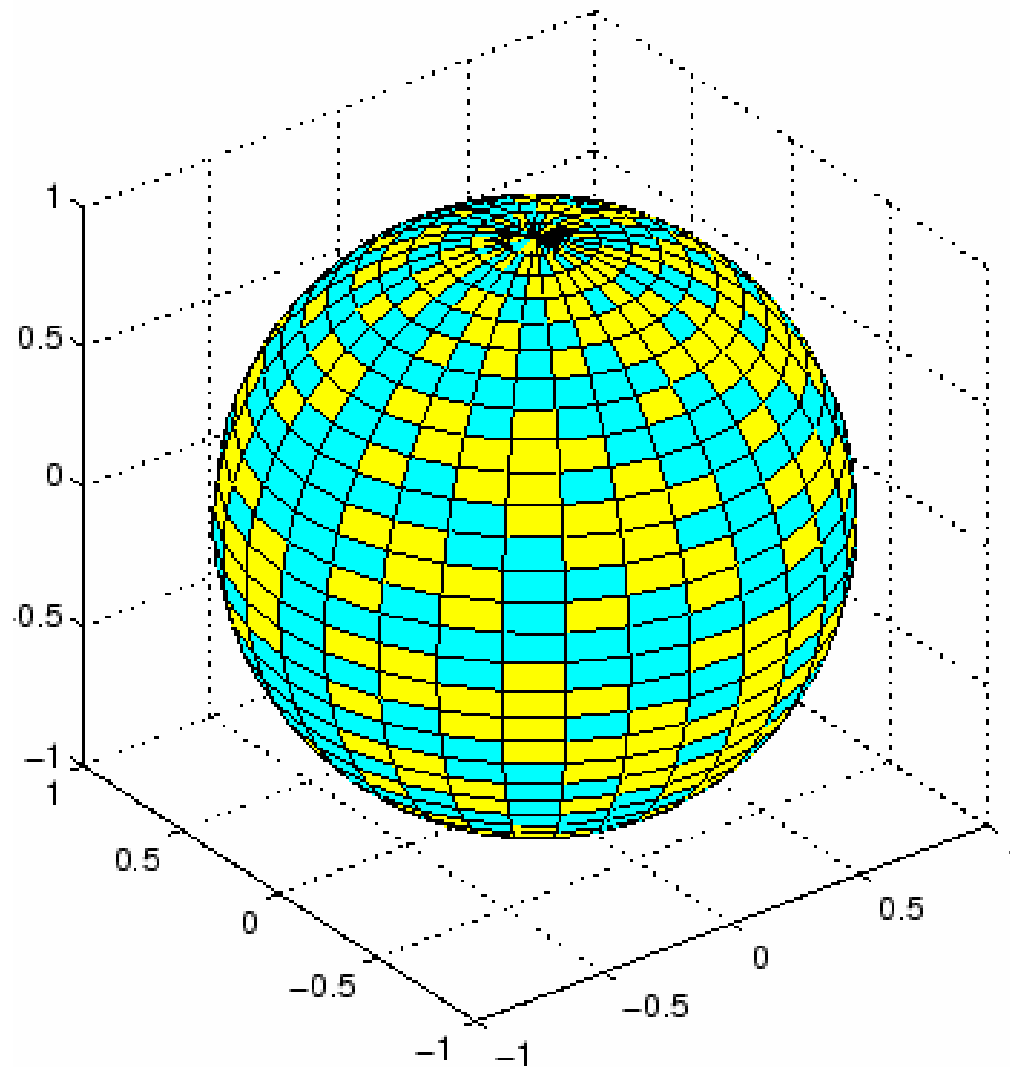
κύλινδρος



Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Σημεία που απέχουν
από το $O(0,0,0)$ 1

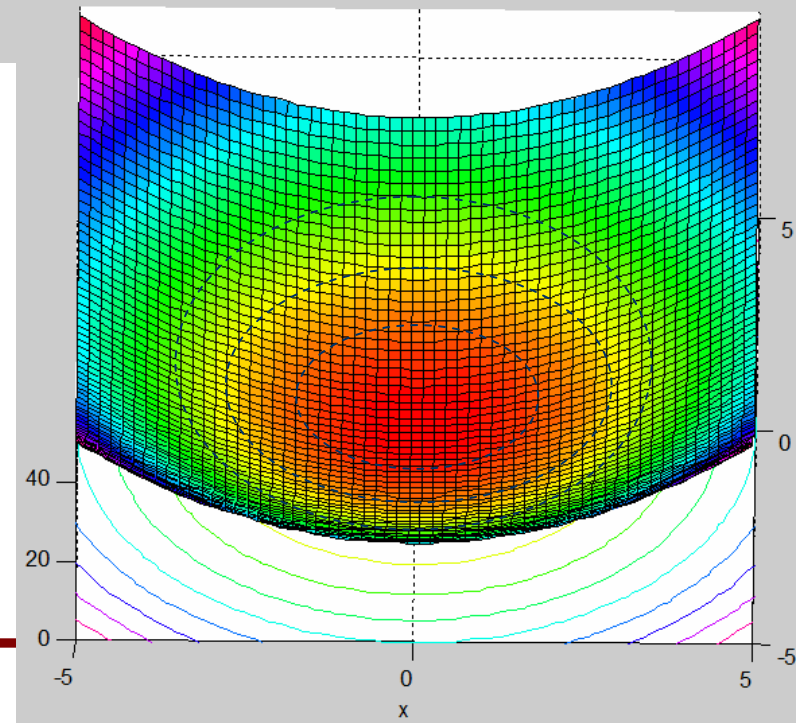
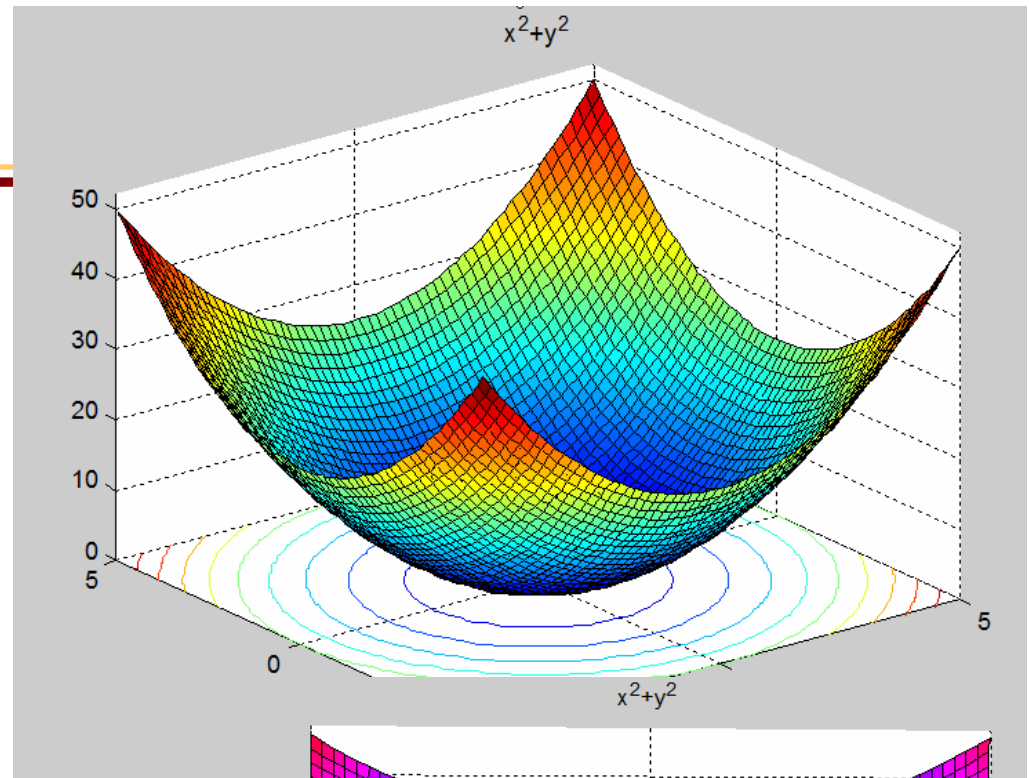


Συναρτήσεις

$$z = x^2 + y^2$$

- Για να μελετήσω 3D γραφήματα προσπαθώ να κάνω αναγωγή σε 2D
- Αν περιοριστώ στο επίπεδο $z = c$,
Βρες τα (x,y) τ.ώ
$$x^2 + y^2 = c$$
- Αν περιοριστώ στο yz επίπεδο ($x = 0$),
Βρες τα (y,z) τ.ώ $z = y^2$

```
Matlab:  
syms x y;  
ezsurf('x^2+y^2',[-5 5],[-5 5]);
```



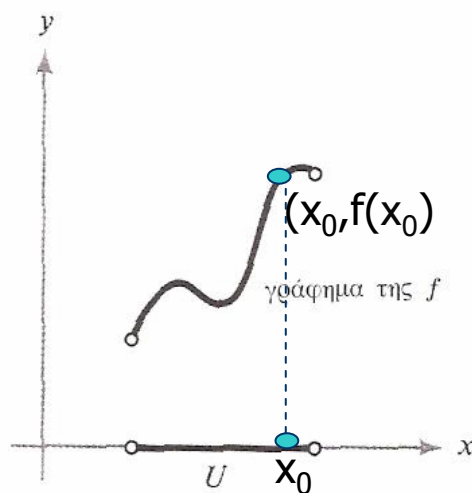
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- Σύγκριση 2Δ και 3Δ χώρο

$$f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f(x)$$

Γράφημα

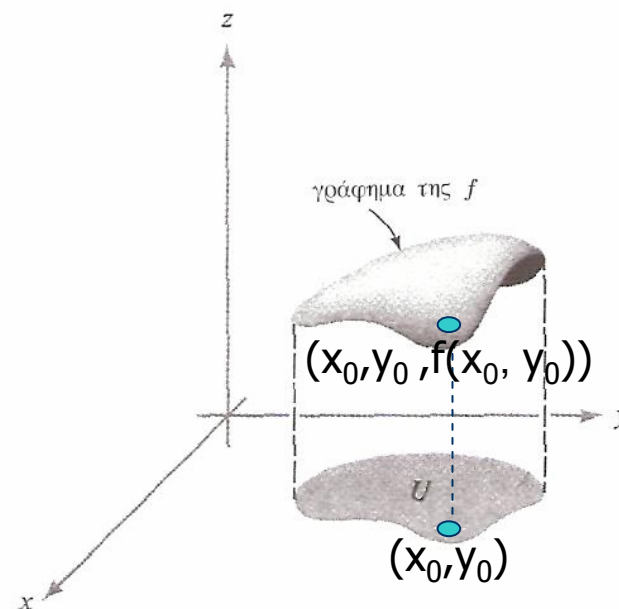
$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U\}$$



$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

Γράφημα

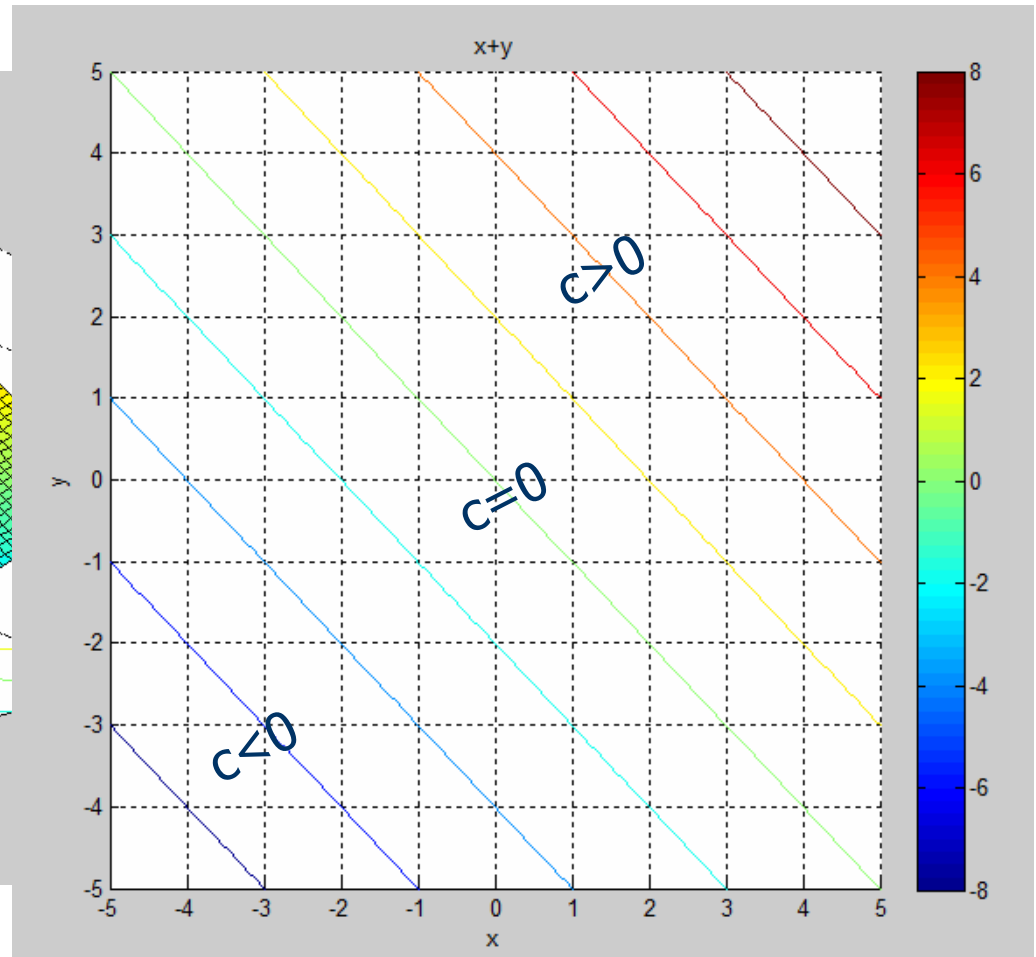
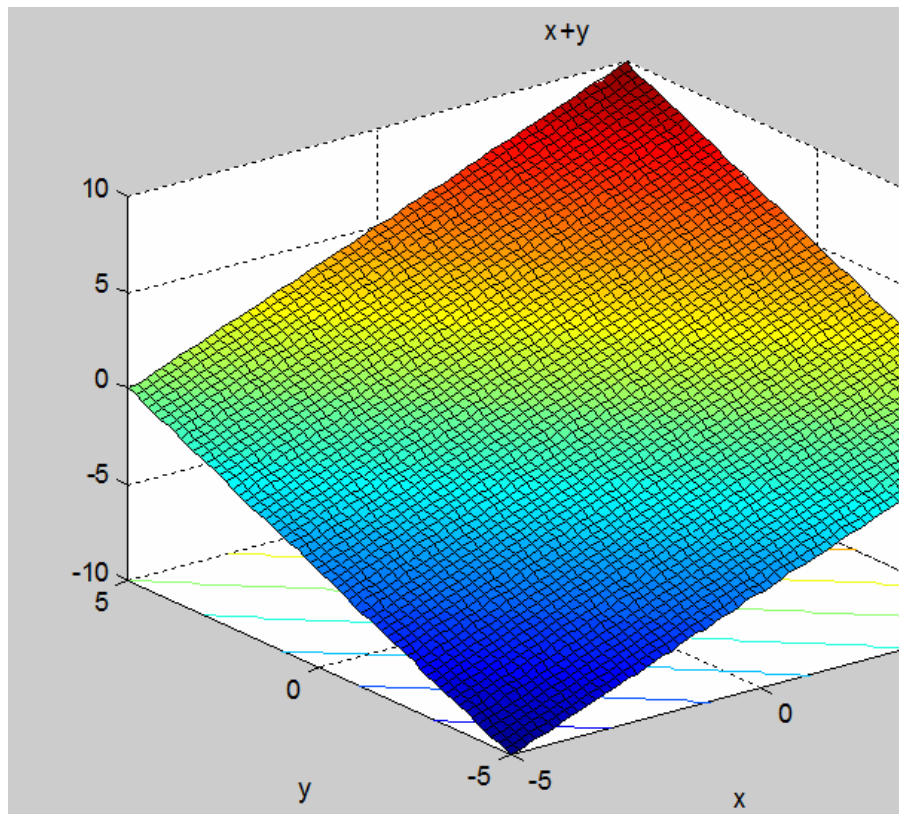
$$\Gamma = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\}$$



Ισοσταθμικές καμπύλες

- στο xy επίπεδο: Προβολή στο xy επίπεδο της τομής του γραφήματος με τα επίπεδα $z = c$.

$$z = x + y$$

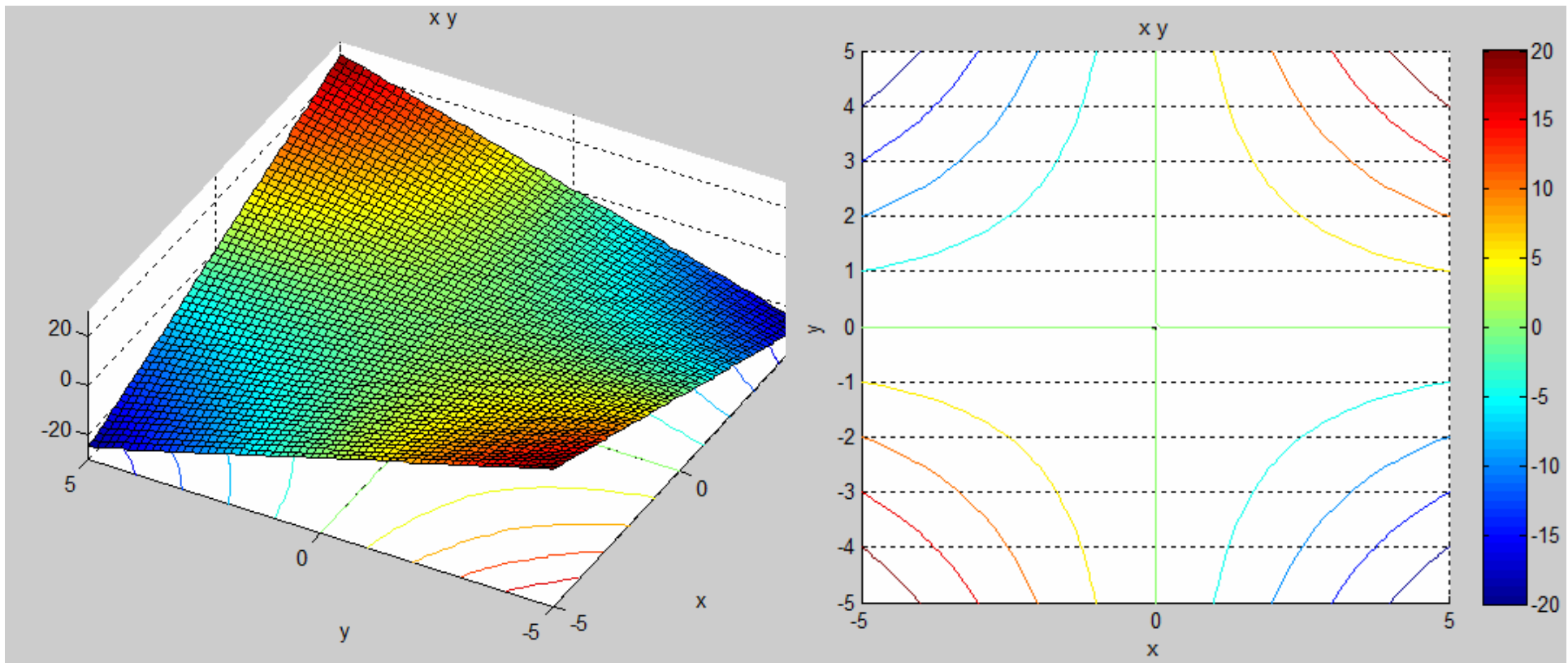


Ισοσταθμικές καμπύλες

- στο xy επίπεδο: Προβολή στο xy επίπεδο της τομής του γραφήματος με τα επίπεδα $z = c$.

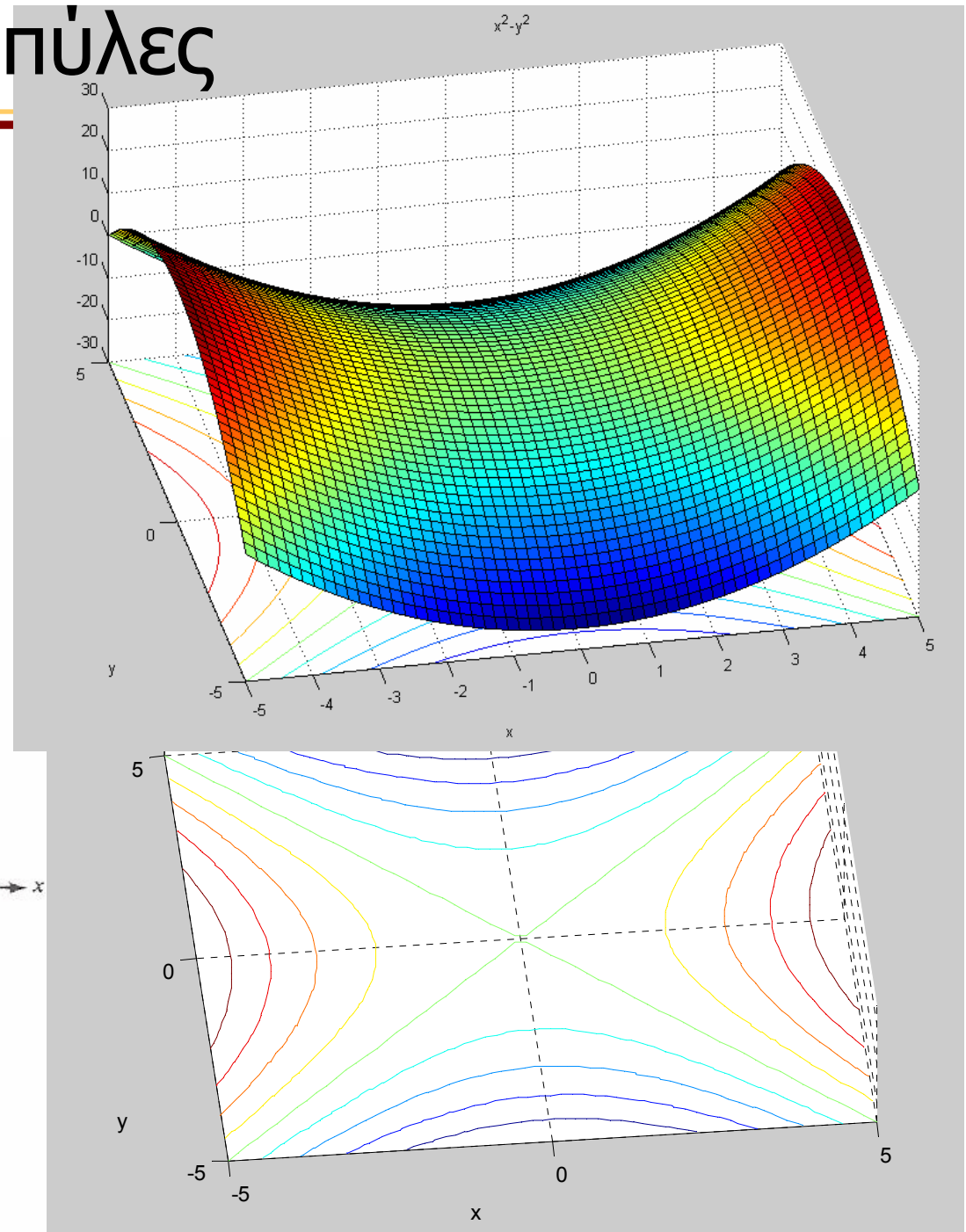
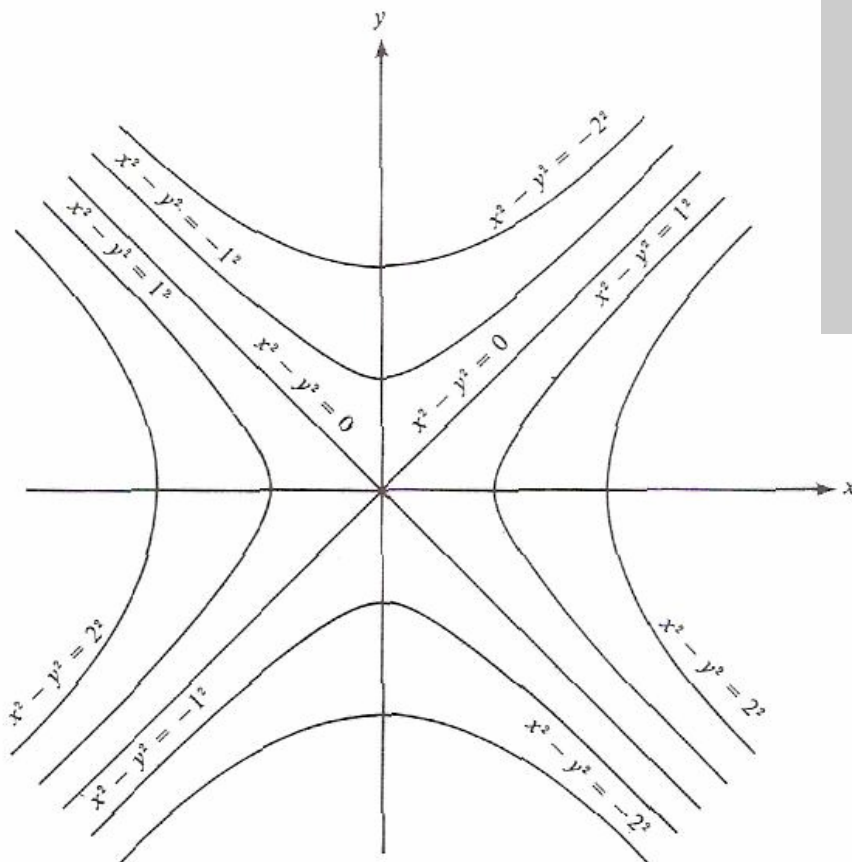
$$z = x \cdot y$$

Matlab:`ezsurf('x*y',[-5 5],[-5 5]);`



Ισοσταθμικές καμπύλες

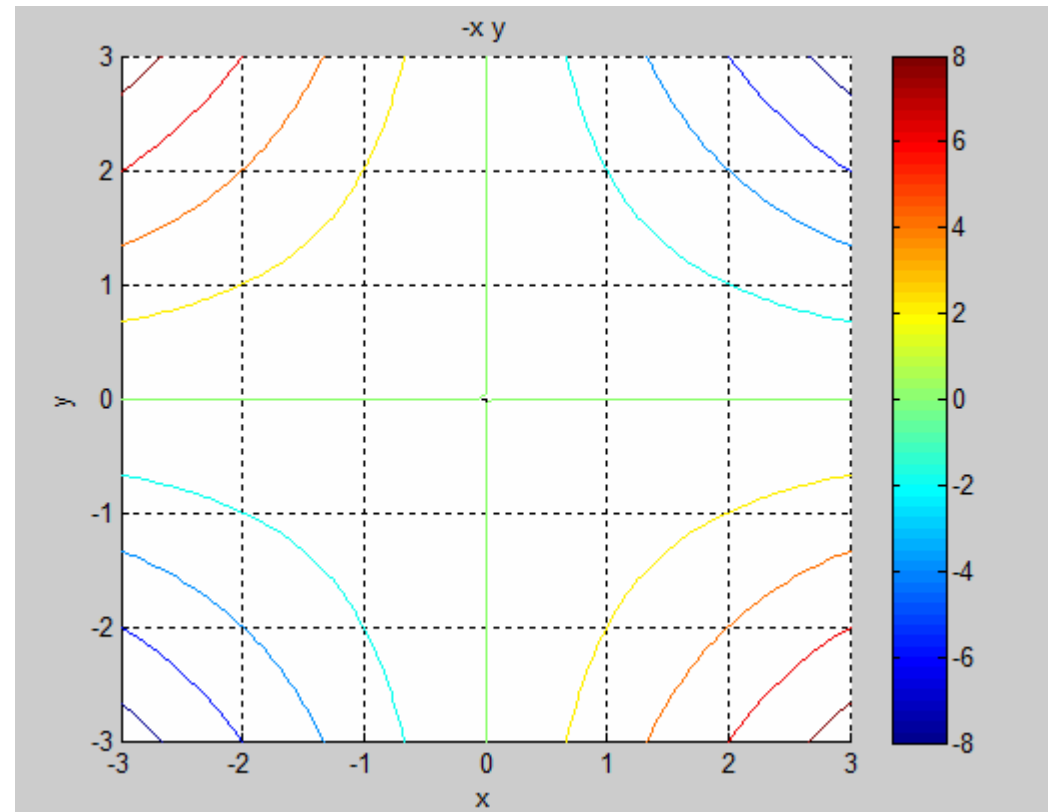
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



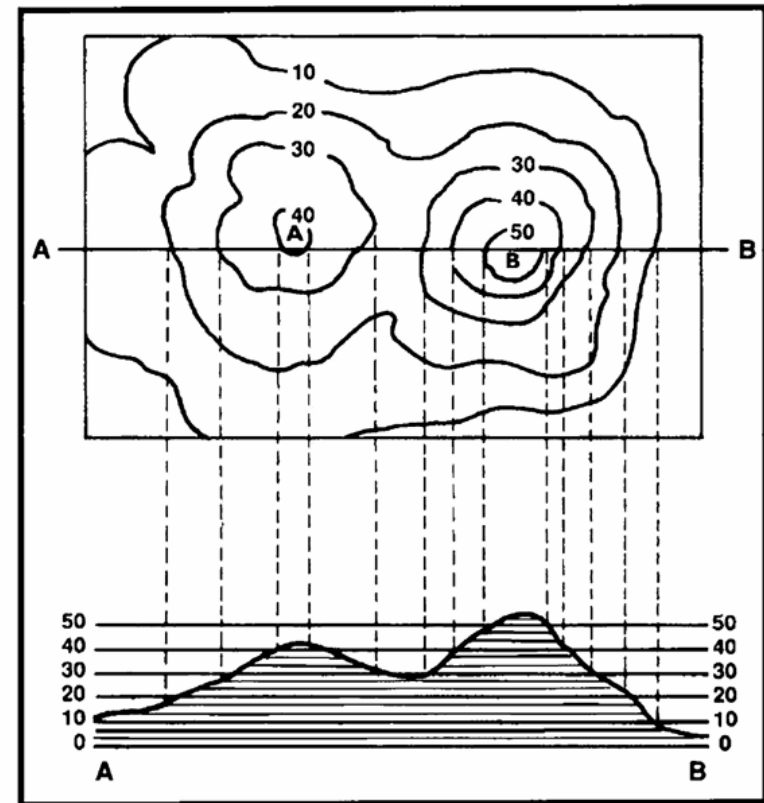
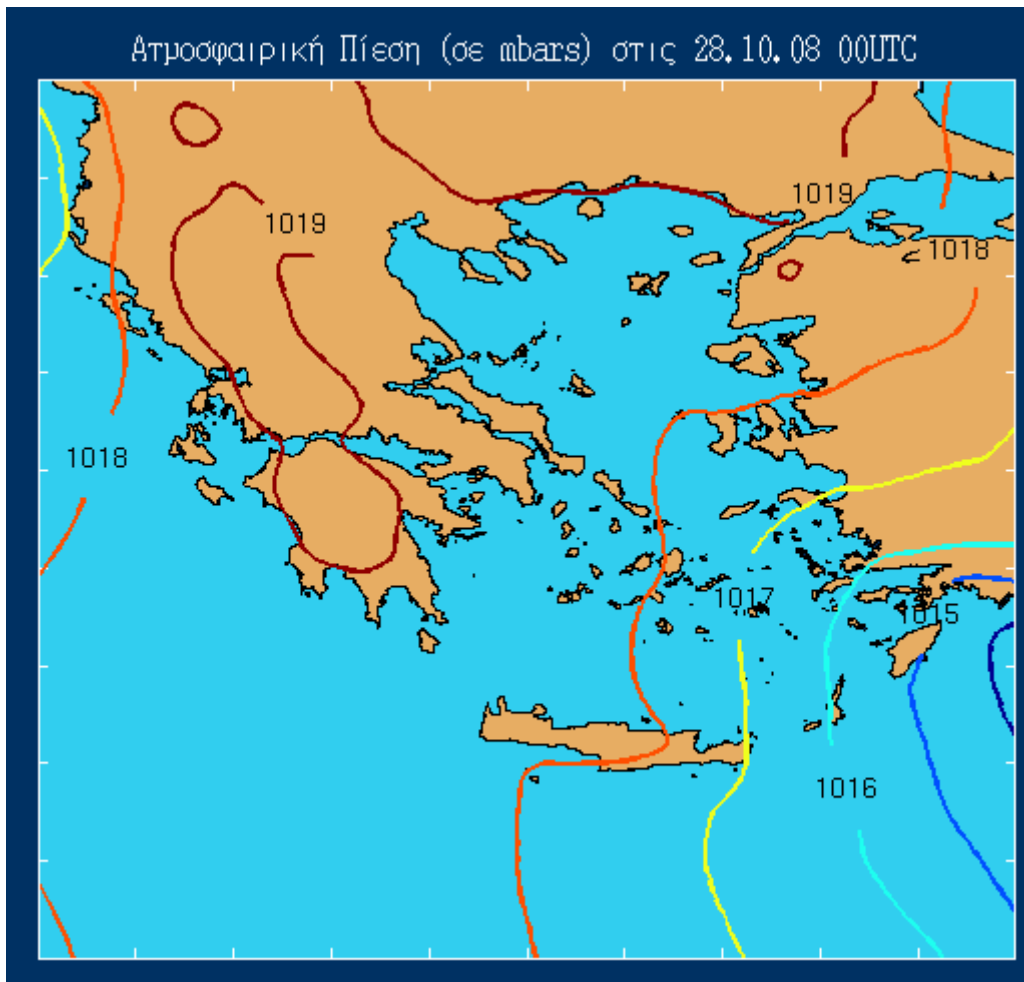
Ισοσταθμικές καμπύλες

$$f(x, y) = -xy$$

$$z = 1 \Rightarrow y = -1/x$$



Ισοσταθμικές καμπύλες - Παράδειγμα



HY-111

Απειροστικός Λογισμός II

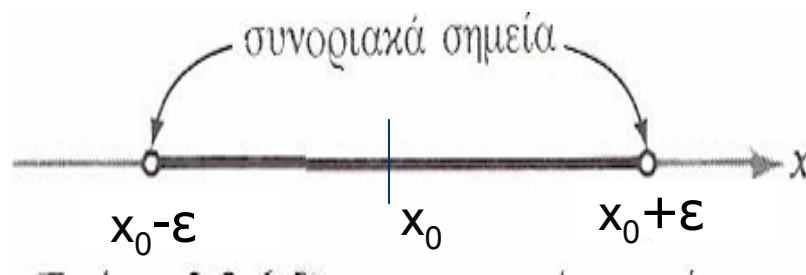
Όρια



Γειτονιά στο \mathbb{R}

- Βασική γειτονιά του x_0 : Συμμετρικό διάστημα (ανοικτό ως προς x_0) ακτίνας $\varepsilon > 0$.

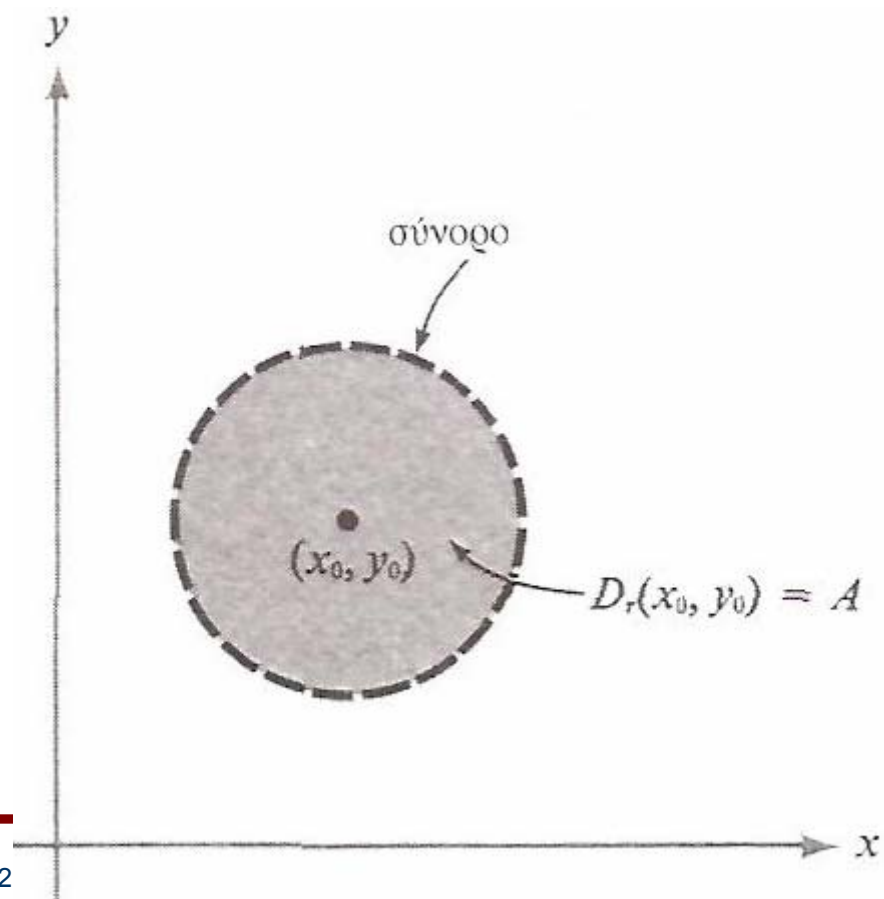
$$\Delta(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$



Γειτονιά στο \mathbb{R}^2

- Βασική γειτονιά του (x_0, y_0) : Ανοικτός Δίσκος με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα $\varepsilon > 0$.

$$\Delta((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$



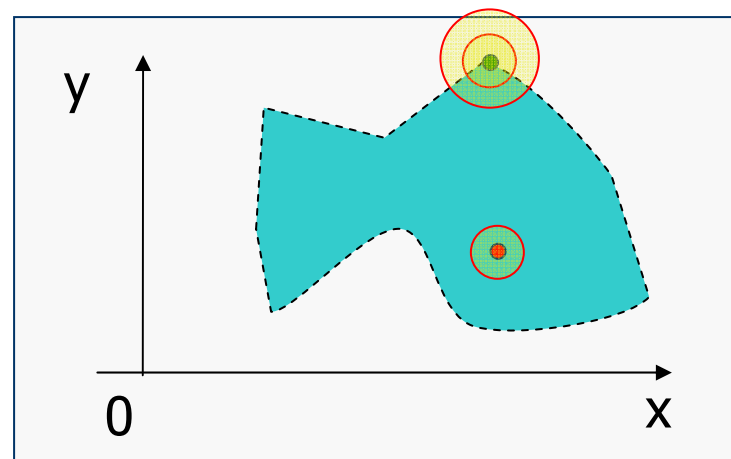
Σύνορο

- Στο \mathbb{R}^2 το $(x_0, y_0) \in U$ θα λέγεται εσωτερικό σημείο αν υπάρχει βασική γειτονιά $\Delta((x_0, y_0), \varepsilon)$ υποσύνολο του U

$$\Delta((x_0, y_0), \varepsilon) \cap U = \Delta((x_0, y_0), \varepsilon)$$

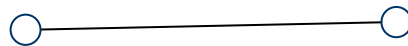
- Στο \mathbb{R}^2 το $(x_0, y_0) \in U$ θα λέγεται συνοριακό του U για οποιαδήποτε γειτονιά $\Delta((x_0, y_0), \varepsilon)$ θα έχουμε

$$\Delta((x_0, y_0), \varepsilon) \cap U \neq \emptyset \quad \text{και} \quad \Delta((x_0, y_0), \varepsilon) \cap U^c \neq \emptyset$$



Γειτονιά στο \mathbb{R}^2

- Σύνορο του U είναι το σύνολο των συνοριακών σημείων του U
- Ένα σύνορο θα το λέμε ανοικτό αν κάθε σημείο του είναι ανοικτό \Leftrightarrow το σύνορο δε τέμνει το $U \Leftrightarrow$ τα συνοριακά σημεία του δεν ανήκουν στο U .



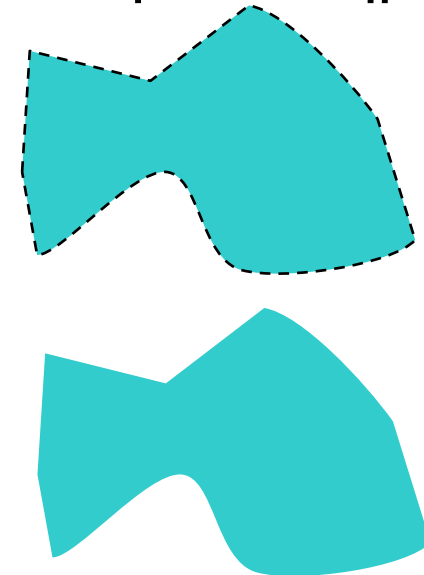
- Ο ορισμός του κλειστού είναι αντίστοιχος



- $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

Βασική γειτονιά του $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}$

$$\Delta((a_1, \dots, a_n), \varepsilon) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \varepsilon^2\}$$



Όρια Συναρτήσεων με μία μεταβλητή

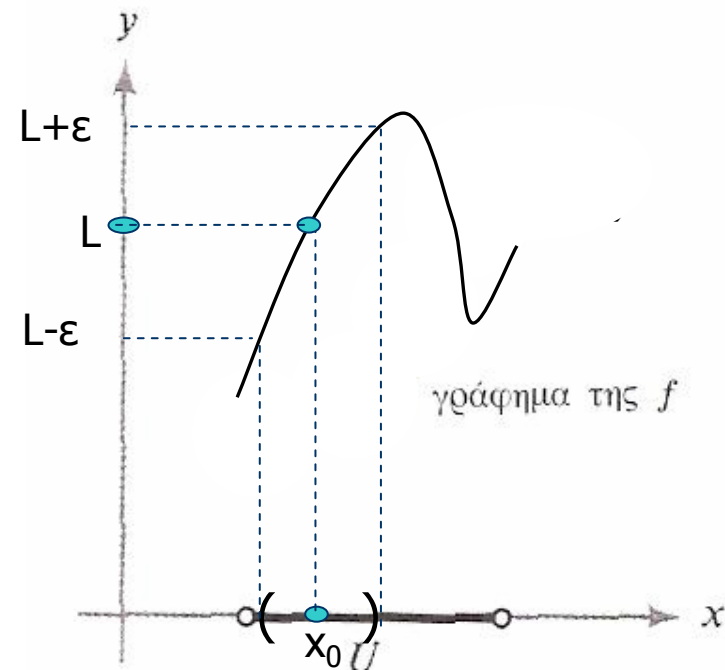
$$f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

- Για κάθε $\varepsilon > 0$ (δοσμένο), υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. για κάθε x , $|x - x_0| < \delta$ και $x \neq x_0$ το $|f(x) - L| < \varepsilon$

\Leftrightarrow

- Για κάθε $\Delta(L, \varepsilon)$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. για κάθε $x \in \Delta(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ το $f(x) \in \Delta(L, \varepsilon)$



Όρια Συναρτήσεων δύο μεταβλητών

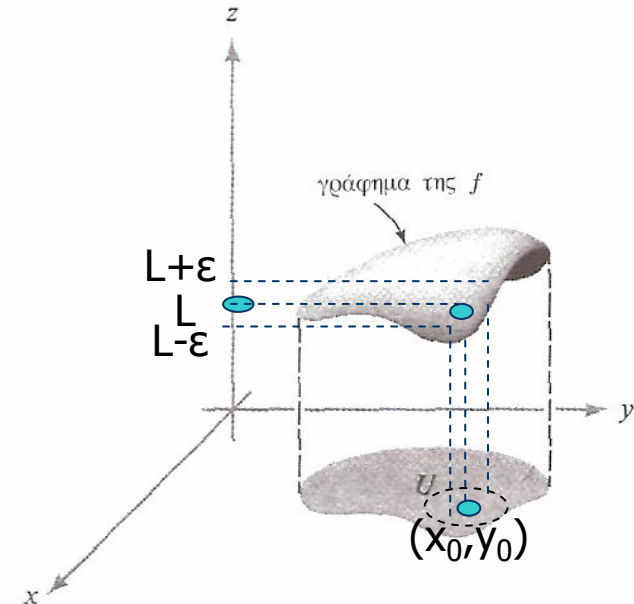
$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow$$

- Για κάθε $\varepsilon > 0$ (δοσμένο), υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. για κάθε (x, y) , $|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 < \delta^2$ και $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ το $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

\Leftrightarrow

- Για κάθε $\Delta(L, \varepsilon)$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ώ. για κάθε $(x, y) \in \Delta((x_0, y_0), \delta) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ το $f(x, y) \in \Delta(L, \varepsilon)$



Ιδιότητες Ορίων

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) + g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)$$

- Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 3y^2) = 1^2 + 3 \cdot 2^2 = 13$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x + y) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^y \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{0}{2} = 0$$



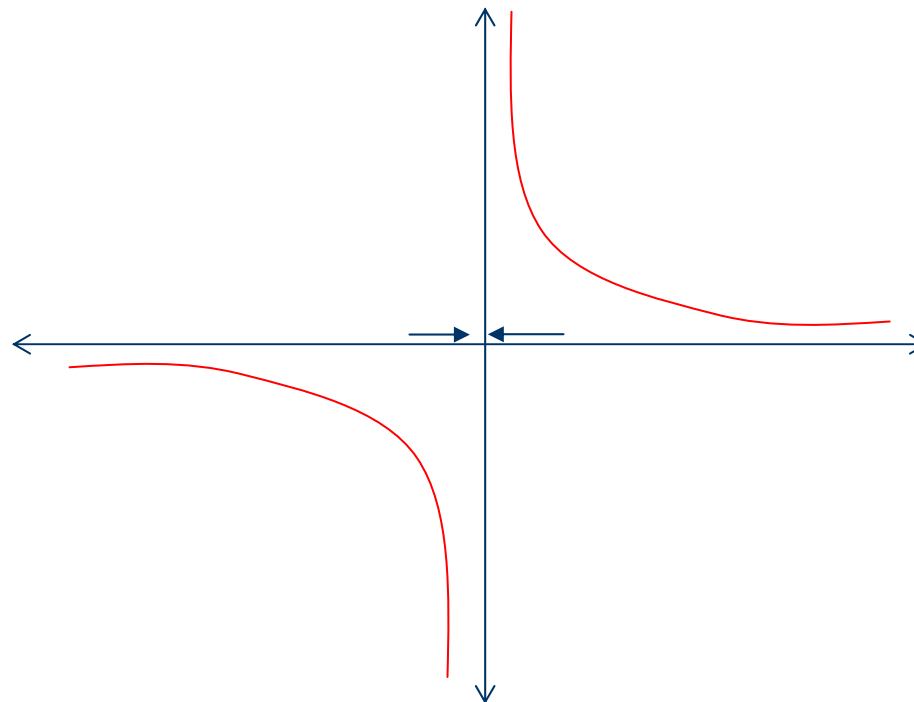
Παραδείγματα Ορίων

$$f(x) = 1/x, x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$



Το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει (τα πλευρικά όρια της συνάρτησης δεν είναι ίσα μεταξύ τους)



Παραδείγματα Ορίων

$$f(x, y) = y/x, x \neq 0$$

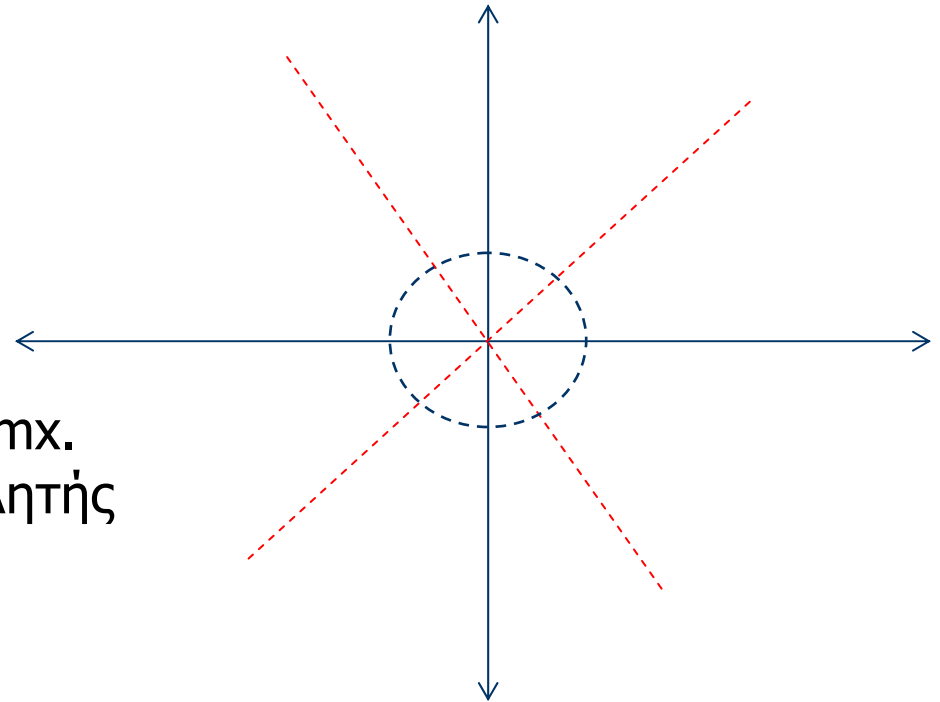
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Περιορίζω τη συνάρτηση στις ευθείες $y=mx$.
Οπότε η f γίνεται συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$f_m(x) = f(x, mx) = \frac{mx}{x} = m$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L;$$

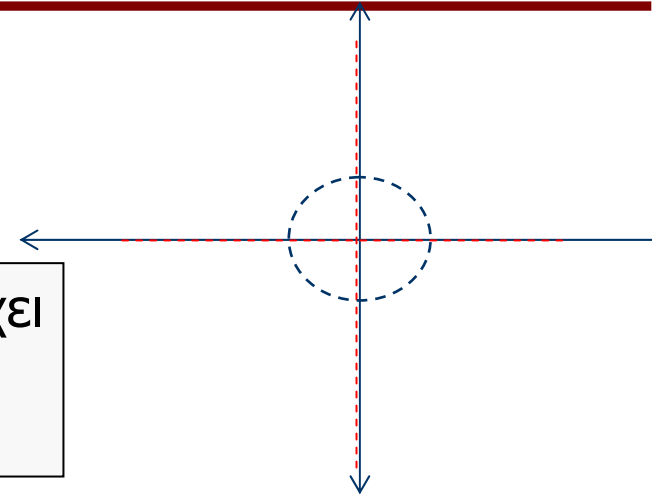
Δεν ισχύει. Πάρε $m \neq L$. Τότε σε οποιοδήποτε δίσκο $\Delta((0,0), \delta)$ η συνάρτηση παίρνει τιμή m .



Παραδείγματα Ορίων

$$f(x, y) = \frac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4 + y^4} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Μεθοδολογία: Για να δείξω πως ένα όριο δεν υπάρχει πλησιάζω με 2 διαφ. τρόπους και βρίσκω 2 διαφ. αποτελέσματα.



Για $y = 0$ και $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4} \stackrel{0/0(L'Hospital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x}{4x^3} \stackrel{0/0(L'Hospital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - 1}{12x^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Για $x = 0$ και $y \neq 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_2(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0$$



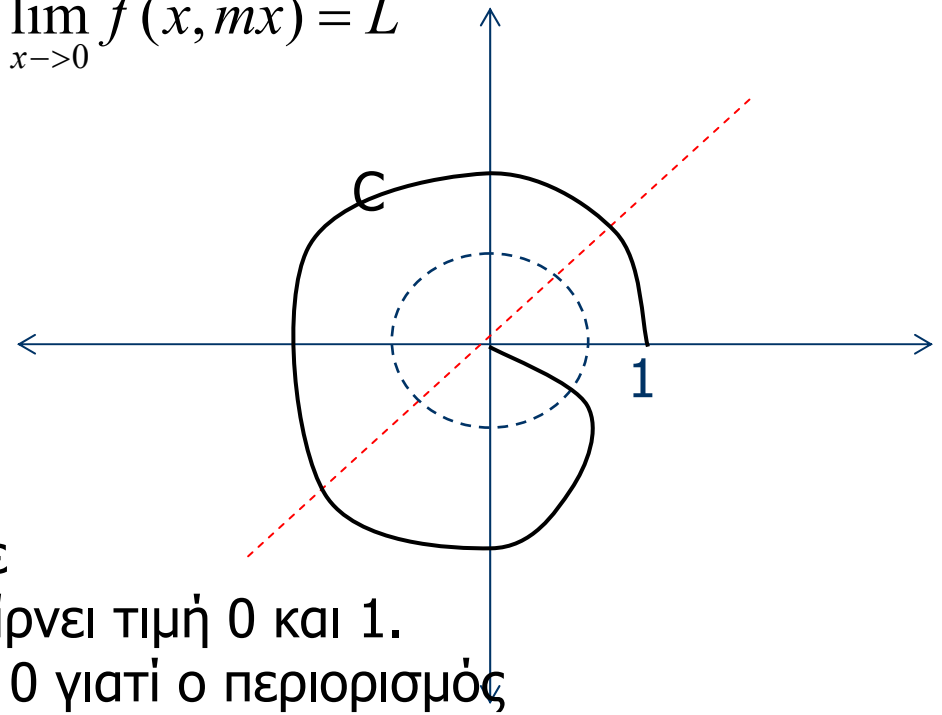
Παραδείγματα Ορίων

Πρόταση: Αν $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = L$

Αντίστροφο ισχύει;; ΟΧΙ

Αντιπαράδειγμα

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in C \\ 0, & (x,y) \notin C \end{cases}$$



Το όριο δεν υπάρχει γιατί σε οποιαδήποτε μικρή γειτονιά του $(0,0)$ η συνάρτηση παίρνει τιμή 0 και 1. Ο περιορισμός της f στην $y=mx$ έχει όριο 0 γιατί ο περιορισμός της f στη γειτονιά του 0 είναι 0.



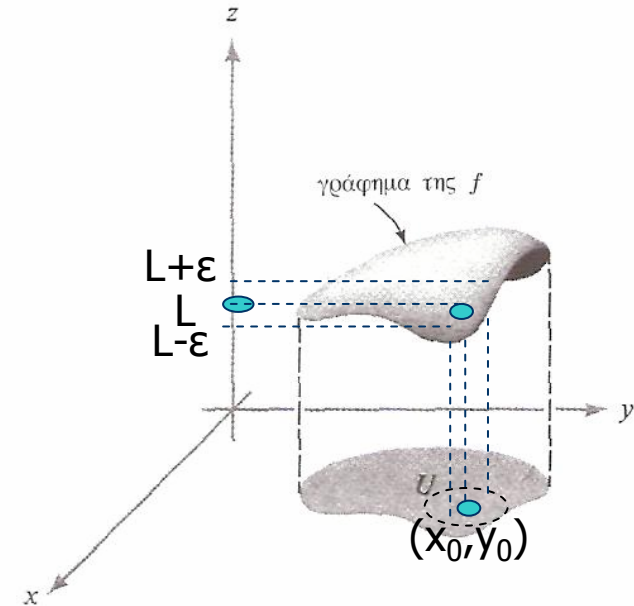
Συνέχεια

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

Ορισμός: Η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0) αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Το γράφημα είναι συνεχές.



HY-111

Απειροστικός Λογισμός II

Μερικές Παράγωγοι



Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

- Γεωμετρικός ορισμός: Η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
- Εξίσωση εφαπτόμενης

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

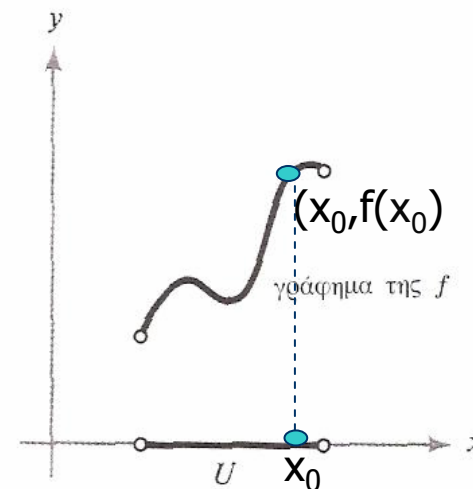
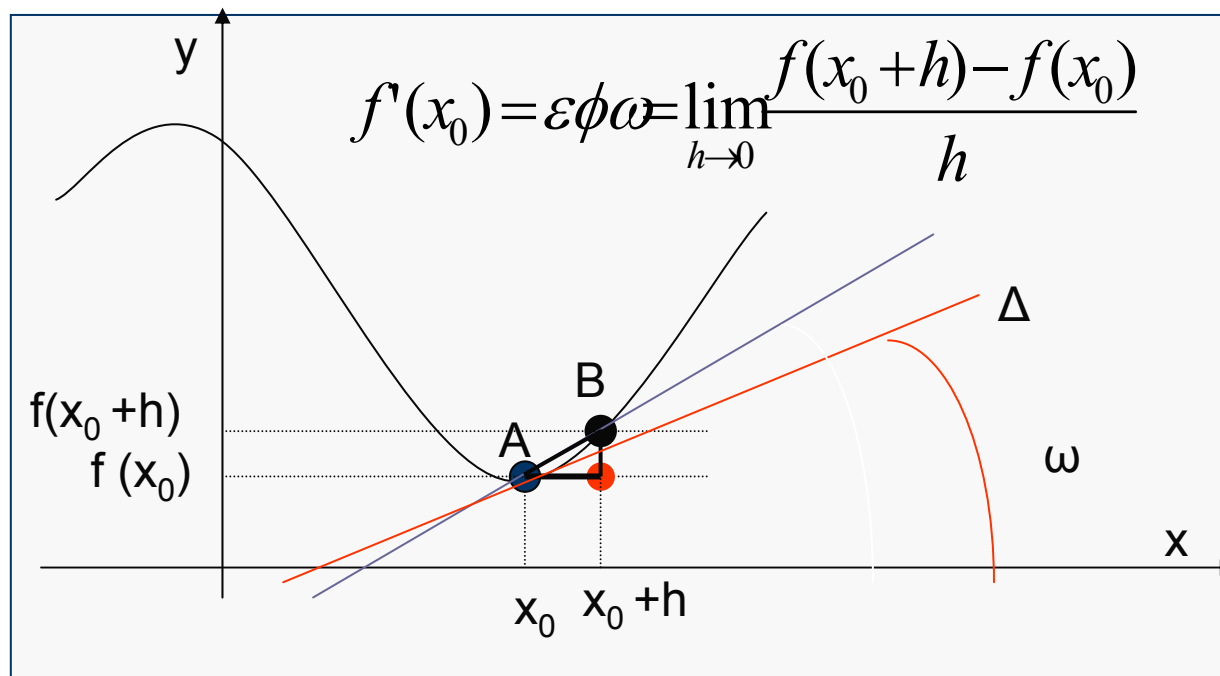
$$f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x) \longrightarrow f(x)$$

$$f' : \bar{U} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x) \longrightarrow f'(x)$$

Όσο το B πλησιάζει το A δηλαδή το h μικραίνει ($h \rightarrow 0$) η AB τείνει να συμπίσει με την AD. Η οριακή θέση που παίρνει η AB είναι η εφαπτομένη της F στο x_0 , και έχει συντελεστή διεύθυνσης :



Η οποία υποδηλώνει και τον ρυθμό (το πόσο αργά η γρήγορα) , με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές της f όταν το $x \rightarrow x_0$.

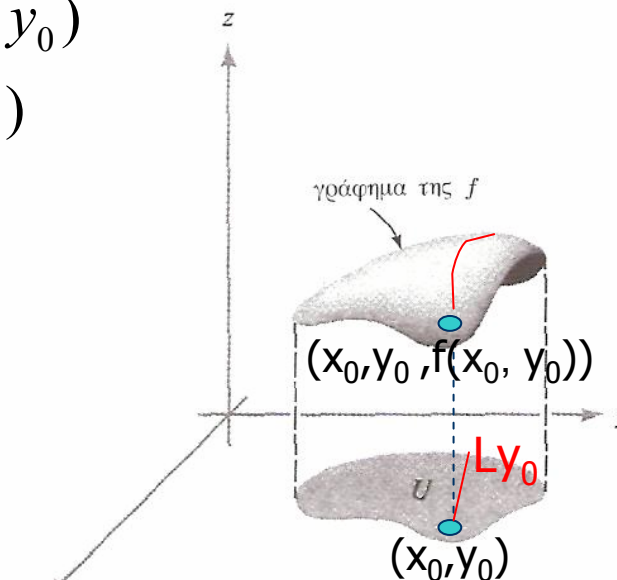


Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) \quad P = (x, y_0, f(x, y_0))$$

$$f : \bar{U} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y_0) \longrightarrow f(x, y_0)$$

- Στην L_{y_0} υπολογίζω την $f'(x, y_0)$. Αυτό μπορώ να το κάνω για κάθε $y=y_0$.
- Συμβολίζω $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή f_x τη μερική παράγωγο της ως προς x .
- Θεωρώ την f ως συνάρτηση του x μόνο (δηλ. θεωρώ το y σταθερά) και παραγωγίζω ως προς x .



Παραδείγματα

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

$$f(x, y) = xy + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 0 = y$$

$$f(x, y) = e^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (xy)' e^{xy} = ye^{xy}$$



Μερικές Παράγωγοι

Γενικά οι $\frac{\partial f}{\partial x}, f_x$ θα είναι συναρτήσεις των x, y .

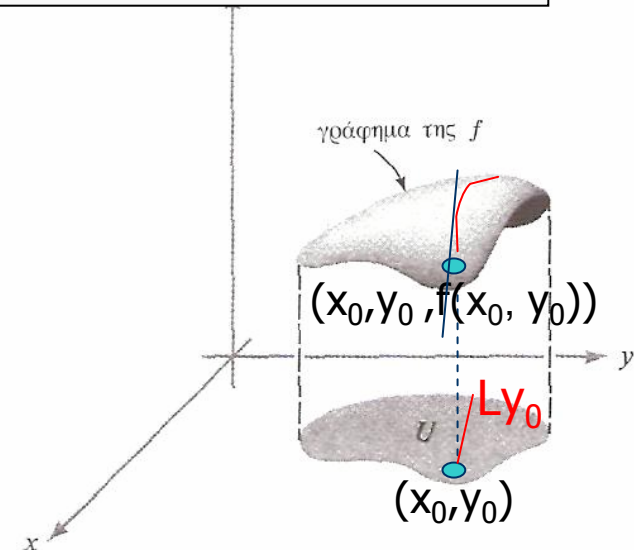
Η τιμή $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Τα ίδια ακριβώς αντίστοιχα ισχύουν και για τις συναρτήσεις 2 μεταβλητών $\frac{\partial f}{\partial y}, f_y$

$$f(x, y) = e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = e$$

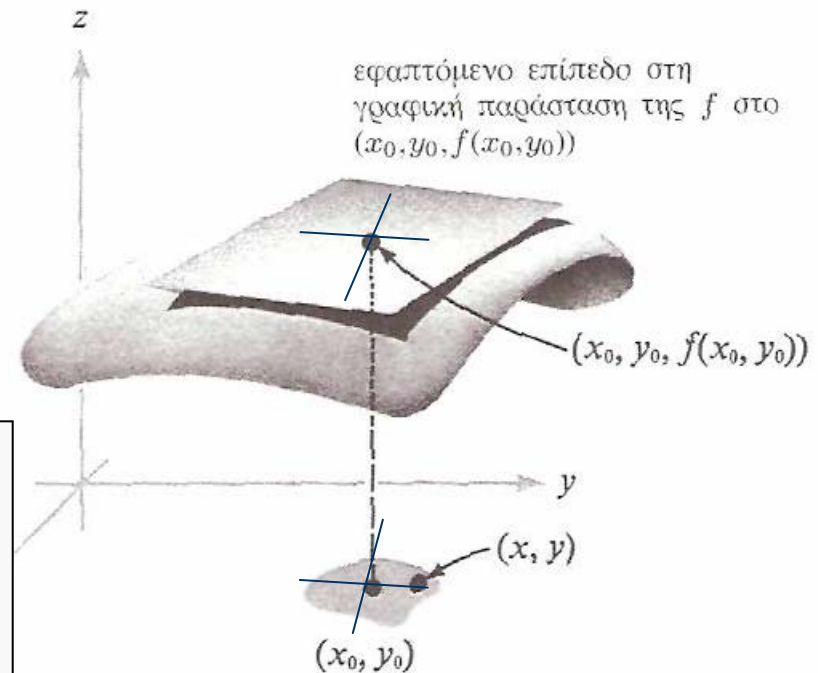


Εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f(x,y)$ στο P_0

Το επίπεδο που ορίζεται από τις 2 εφαπτόμενες ευθείες $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ στις $f(x,y_0), f(x_0,y)$ στο P_0 . Περνάει από το σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Διάνυσμα // στην ε_x : $\langle 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \rangle$
Διάνυσμα // στην ε_y : $\langle 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \rangle$

Διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο: $\vec{n} = \langle 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \rangle \times \langle 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \rangle =$
 $= \dots = \langle -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \rangle$

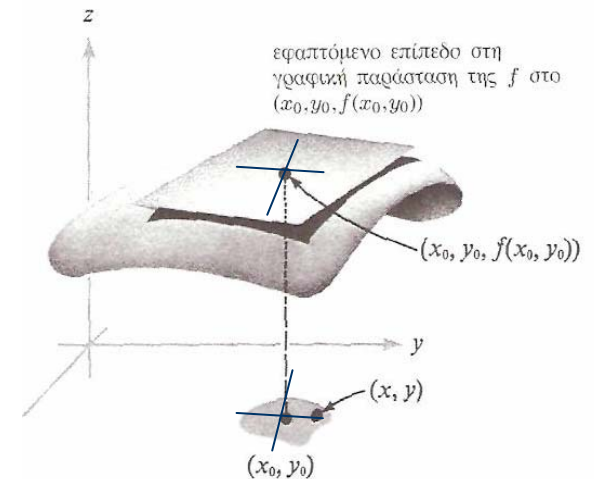


Εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f(x,y)$ στο P_0

Εξίσωση επιπέδου

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0) \rangle \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow$$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0)$$



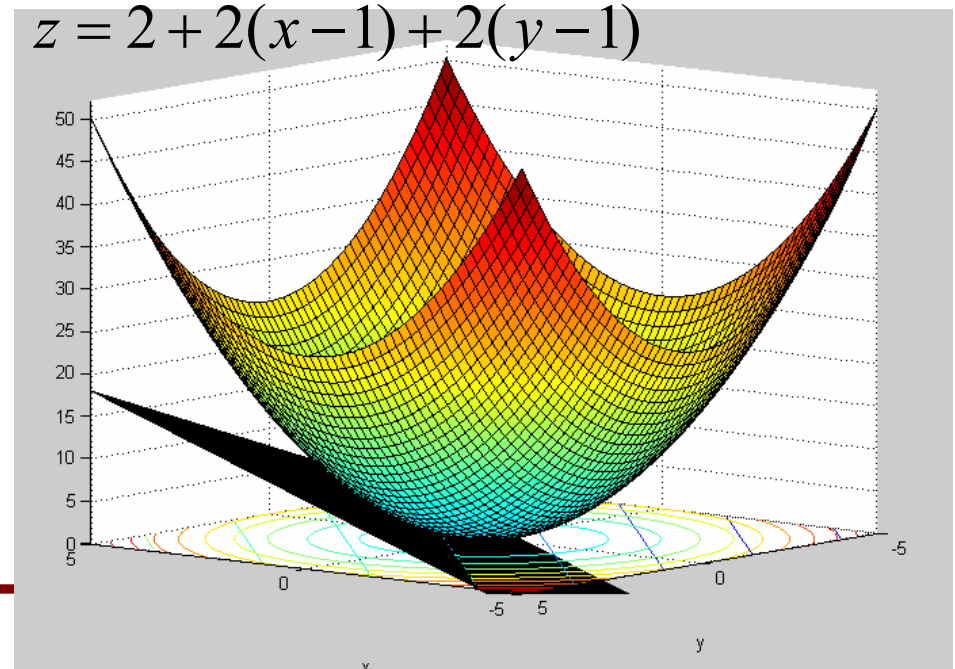
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

Παράδειγμα: Εφαπτόμενο επίπεδο στο $(1,1,2)$

$$z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

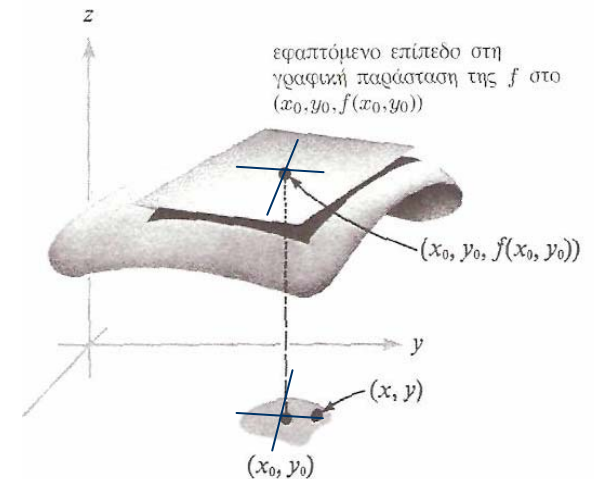


Εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f(x,y)$ στο P_0

Ορισμός

$$Df(x_0, y_0) = \left\langle \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right\rangle$$

$$\text{Εφαπτόμενο επίπεδο : } z - f(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

Παράδειγμα: Εφαπτόμενο επίπεδο στο $(3, 1, 10)$

$$z - 10 = \langle 6, 2 \rangle \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Παραγωγισιμότητα Συνάρτησης



Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

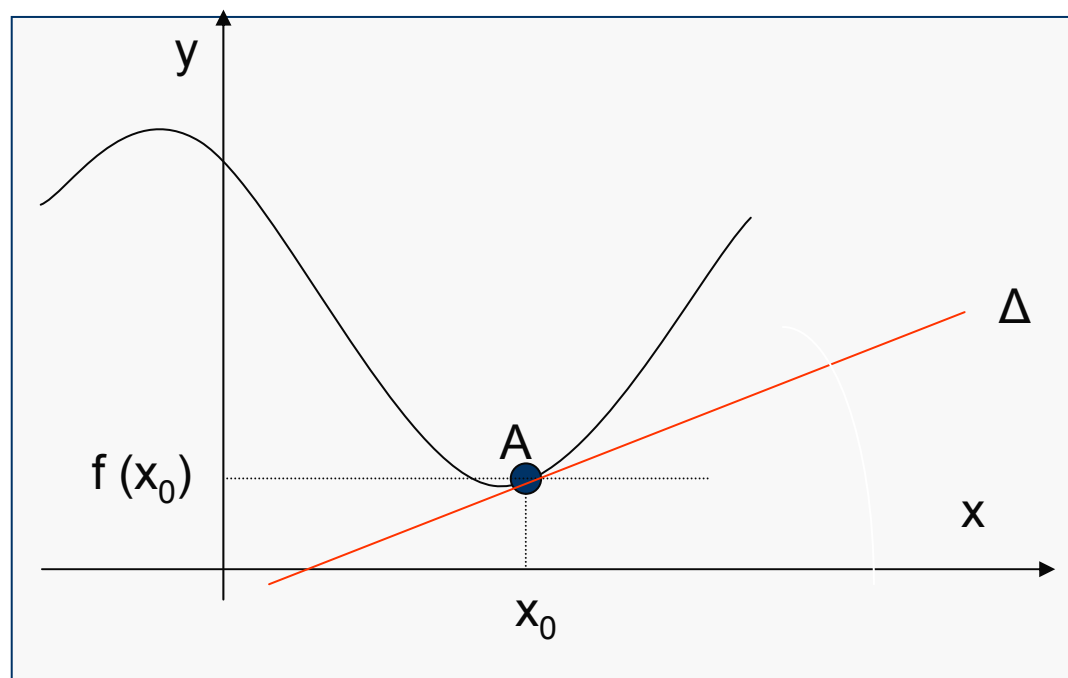
- Γεωμετρικός ορισμός: Η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

$$f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f(x)$$

$$f' : \bar{U} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x) \longrightarrow f'(x)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$



$$y - f(x_0) = f'(x_0) \bullet (x - x_0)$$



Κανόνες Παραγώγισης

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} (cx) = c$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \log_c x = \frac{\log_c e}{x}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} c^x = c^x \ln c$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$



Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

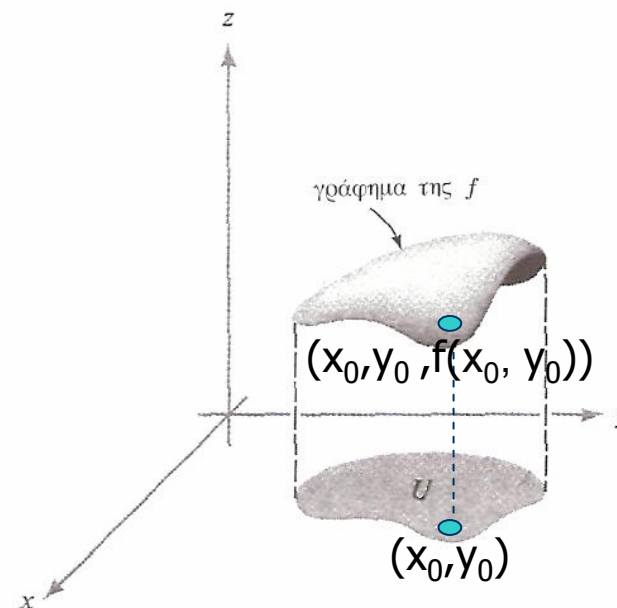
- Έστω $(x_0, y_0) \in U$ με τις $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ να υπάρχουν.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

- Τότε η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - (f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0))}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

- **Γεωμετρικά:** το όριο υπάρχει \Leftrightarrow το γράφημα είναι ομαλό στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

- Ενδέχεται οι $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ να υπάρχουν όμως f όχι παρ. στο (x_0, y_0)

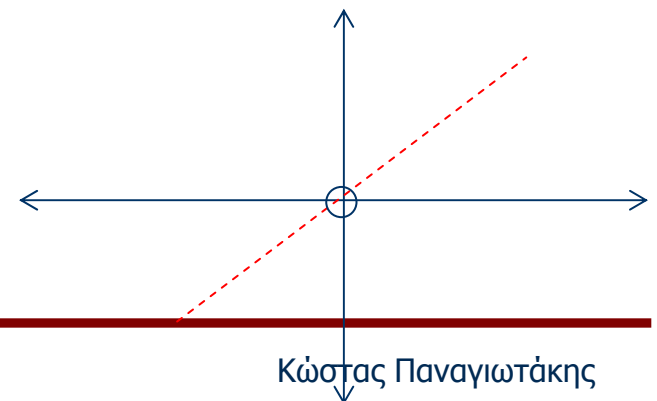
- Παράδειγμα $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x=0 \text{ ή } y=0 \\ 1, & - \end{cases}$ στο $(0,0)$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - (f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}(y-0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - (0 + 0(x-0) + 0(y-0))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Το όριο δεν υπάρχει, περιορίσου στην (ε) $f(x,y) = 1$, μας δίνει $+\infty \dots$ δεν υπάρχει.



Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεώρημα: Έστω $f, \quad f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ και $(x_0, y_0) \in U$. Αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
υπάρχουν και είναι συνεχείς σε γειτονιά του (x_0, y_0) .
Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Στο προηγούμενο π.χ. παρόλο που υπήρχαν οι μερικές παράγωγοι
δεν υπήρχε συνέχεια των μερικών παραγώγων στο $(0,0)$.

Δεύτερες Παράγωγοι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ (για καλές συναρτήσεις)}$$

$$f(x, y) = x^2 y^5 + y \cos(x) + \sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^5 - y \sin(x) + 0) = 2y^5 - y \cos(x)$$



Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Η συνάρτηση n μεταβλητών γενικεύονται οι μερικές παράγωγοι, θεωρώντας ως συνάρτηση του x_i και τα υπόλοιπα σταθερά

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_2^5 + \sin(x_3 + x_4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2^5 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 5x_1^2 x_2^4$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \quad : \text{Ανάδελτα της } f$$



Απεικονίσεις πολλών μεταβλητών

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$D(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, m \times n \text{ πίνακας μερικών παραγώγων της } f$$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τότε $Df(x_0)$ είναι πίνακας αριθμών.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$$

$$Df = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$Df(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται παραγωγίσιμη αν $Df(x_0)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - (f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0$



HY-111

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Κανόνας Αλυσίδας



Κανόνας Αλυσίδας – 1 μεταβλητή

Έστω $y=y(x)$ και έστω $x=x(t)$ άρα τελικά $y=y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ t \rightarrow g(t) \rightarrow f(g(t)) \end{array} \quad \frac{dfog}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Παράδειγμα

$$f(x) = \cos(x)$$

$$x(t) = t^2 + 1$$

$$\frac{dfog}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = -\sin(x)(2t) = -2t \sin(t^2 + 1)$$



Κανόνας Αλυσίδας – 2 μεταβλητές

Έστω $z=z(x,y)$ και έστω $x=x(t)$ άρα τελικά $y=y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Παράδειγμα

$$z(x, y) = x \cos(y) \quad x(t) = t^2 + 1 \quad y(t) = t^3 + t$$

$$z(t) = (t^2 + 1) \cos(t^3 + t)$$

$$\frac{dz}{dt} = 2t \cos(t^3 + t) - (t^2 + 1)(3t^2 + 1) \sin(t^3 + t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \dots$$



Κανόνας Αλυσίδας – 2 μεταβλητές

Έστω $z=z(x,y)$ και έστω $x=x(s,t)$ άρα τελικά $y=y(s,t)$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Παράδειγμα

$$z(x, y) = x \cos(y) \quad x(t) = t^2 + s \quad y(t) = s^3 + t$$

$$z(s, t) = (t^2 + s) \cos(s^3 + t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2t \cos(s^3 + t) - (t^2 + s)(1) \sin(s^3 + t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \dots$$



Κανόνας Αλυσίδας σε απεικονίσεις

Έστω $z=z(x_1, \dots, x_n)$ και έστω $x_i=x(s_1, \dots, s_m)$ άρα τελικά $z=z(s_1, \dots, s_m)$

$$\frac{\partial z}{\partial s_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial s_i} = \nabla Z \cdot \left\langle \frac{\partial x_1}{\partial s_i}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial s_i} \right\rangle$$

$$f : z(x_1, \dots, x_n)$$

$$f \circ g : z=z(s_1, \dots, s_m)$$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial s_i} = \nabla f \cdot \frac{\partial g}{\partial s_i}$$

$$\nabla f \circ g = \nabla f \cdot Dg$$

$$1 \times m \quad 1 \times n \quad n \times m$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (s_1, \dots, s_m) \rightarrow (g_1(s_1, \dots, s_m), \dots, g_n(s_1, \dots, s_m)) \rightarrow f((g_1(s_1, \dots, s_m), \dots, g_n(s_1, \dots, s_m))) \end{array}$$

Κανόνας Αλυσίδας για απεικονίσεις

$$D(f \circ g) = Df \cdot Dg$$

$$s \times m \quad s \times n \quad n \times m$$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^s$$



Κανόνας Αλυσίδας - Παραδείγματα

$$f(x, y, z) = (e^{x-z}, \cos(x+y))$$

$$g(u, v) = (e^u, \cos(v+u), e^{-v})$$

$$Df = \begin{pmatrix} e^{x-z} & 0 & -e^{x-z} \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \end{pmatrix}$$

2x3

$$Dg = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ -\sin(v+u) & -\sin(v+u) \\ 0 & -e^{-v} \end{pmatrix}$$

3x2

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

$$Df \circ g = Df \bullet Dg = \dots$$

2x2 2x3 3x2

$$Df \circ g(0, 0) = Df(1, 1, 1) \bullet Dg(0, 0) = \dots$$



Κανόνας Αλυσίδας - Παραδείγματα

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad c(0)=(0,0) \quad c'(0)=(1,1)$$
$$(x, y) \rightarrow (e^{x+y}, e^{x-y}) \quad t \rightarrow (c_1(t), c_2(t))$$

Ποιο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας της c μέσω της f για $t=0$;

$$\boxed{\mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2}$$

$$Df = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

2x2

$$Df \circ c(0) = Df(0,0) \bullet Dc(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Παράγωγος κατά κατεύθυνση

$$\mathbb{R} \rightarrow (\varepsilon)$$

$$t \rightarrow (x_0 + t \cdot a, y_0 + t \cdot b)$$

Περιορίζω τη f στην (ε) και την θεωρώ ως συνάρτηση μιας μεταβλητής

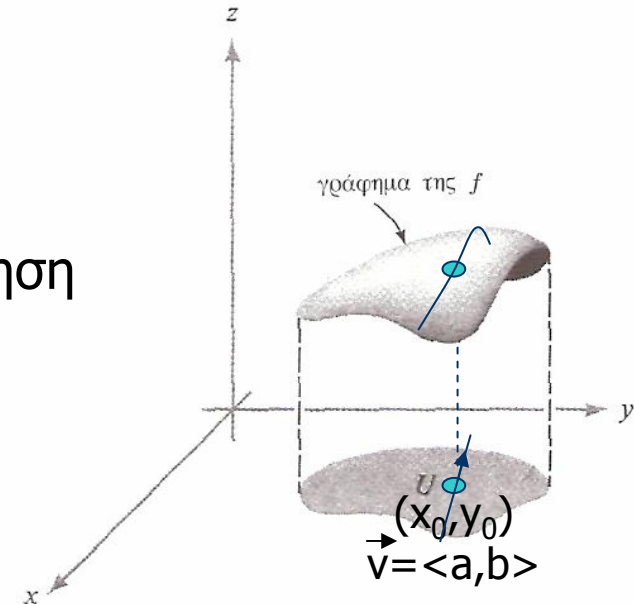
$$z = f(x, y)$$

$$x = x_0 + t \cdot a$$

$$y = y_0 + t \cdot b$$

$$z = f(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b = \nabla f \cdot \langle a, b \rangle = \nabla f \cdot \vec{v}$$



Παράγωγος κατά κατεύθυνση

$$z = f(x, y)$$

Ορισμός $\nabla f(P) \cdot \vec{v}$ παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο P ως προς την κατεύθυνση \vec{v} .

Γεωμετρικά $\nabla f(P) \cdot \vec{v} > 0$ συνάρτηση \nearrow κατά την κατεύθυνση \vec{v}
 $\nabla f(P) \cdot \vec{v} < 0$ συνάρτηση \searrow κατά την κατεύθυνση \vec{v}

Παράδειγμα

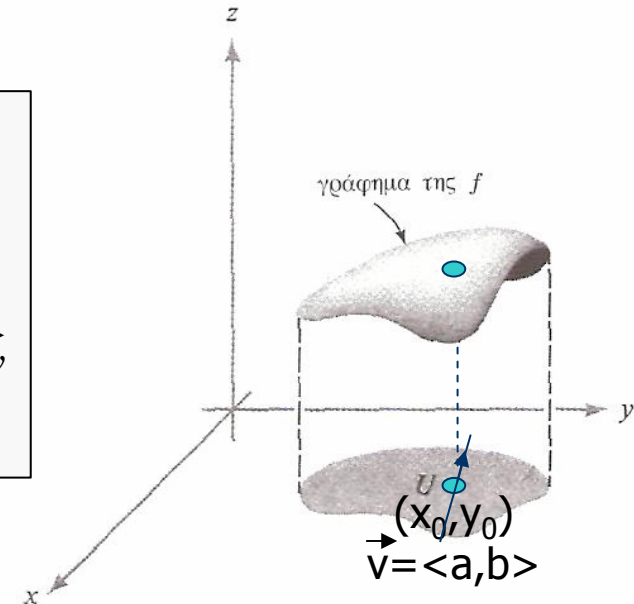
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = \langle 2x, 2y \rangle$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 1 \rangle$$

$$P(1, 0)$$

$$\nabla f(P) \cdot \vec{v} = \langle 2, 0 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 1 \rangle = \sqrt{2}$$



Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Προς ποια κατεύθυνση αυξάνεται πιο γρήγορα η f ;

$$\nabla f(P) \cdot \vec{v} = |\nabla f(P)| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$$

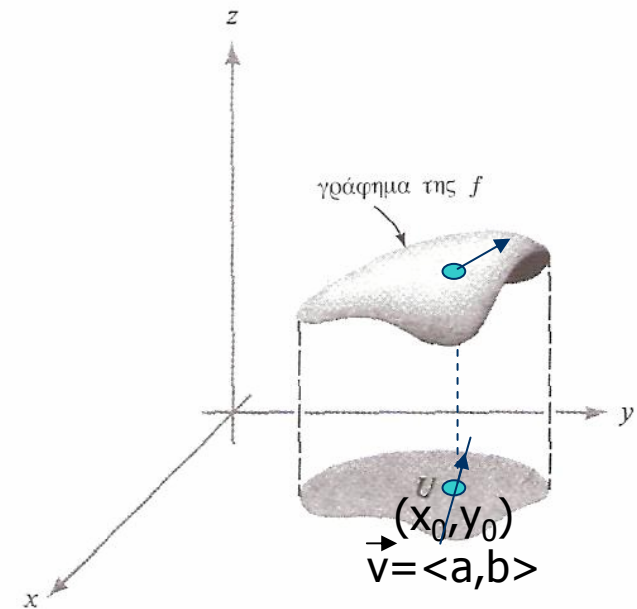
Αν θεωρήσουμε $|\vec{v}|=1$

Το $\nabla f(P) \cdot \vec{v}$ μεγιστοποιείται για $\theta=0$ άρα για $\vec{v} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$

Η κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης είναι του $\nabla f(P)$

Η κατεύθυνση της μεγαλύτερης μείωσης είναι του $-\nabla f(P)$

Η συνάρτηση παραμένει σταθερή ως προς τη κατεύθυνση που είναι κάθετη στο $\nabla f(P)$, $\nabla f(P) \cdot \vec{v} = 0$



Παράδειγμα $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $P(1,1,1)$

Ζητάμε τη κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης στο P .



Παραδείγματα

Η $y(x)$ ορίζεται πεπλεγμένα από τη $G(x, y(x))=0$.

Αν η G, y είναι παραγ. και $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ τότε ν.δ.ο $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$

Λύση

$$\boxed{\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} \mathbb{R}}$$

Έστω $F(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ οπότε η $G(x, y(x))=0 \Leftrightarrow G \circ F(x)=0 \Rightarrow$

$$D(G \circ F)(x) = 0 \Leftrightarrow DG \cdot DF = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$



Παραδείγματα

Εφαπτόμενο επίπεδο και κάθετο διάνυσμα της $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ στο $P(3,5,-4)$.

Λύση 1^{ος} τρόπος

Το υπερβολοειδές είναι η γραφική παράσταση των $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 18}$ και $z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 18}$.

Επειδή το P έχει $z < 0$ μας ενδιαφέρει ο $z = f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2 - 18}$.

Εφαπτόμενο επίπεδο: $z - f(3,5) = Df(3,5) \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix}$

....

Λύση 2^{ος} τρόπος

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 18 = 0$$

$$\text{Εξίσωση εφ. επιπέδου } \nabla f(3, 5, -4) \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z+4 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{Κάθετο διάνυσμα } \frac{\nabla f(3, 5, -4)}{\|\nabla f(3, 5, -4)\|}$$

