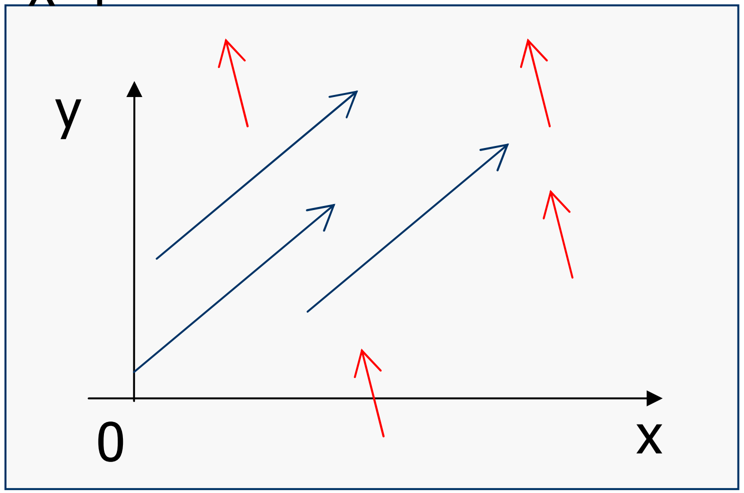
ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Διανύσματα

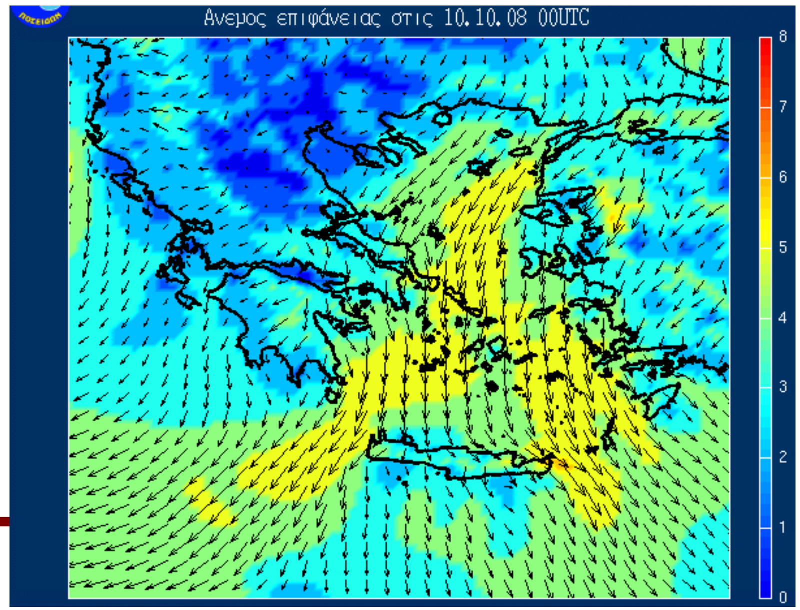
Διανύσματα (vectors)

- Ορισμός: Προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα που έχω την ελευθερία να το μεταφέρω σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου.



- Έχουν τρία στοιχεία:
  - Μήκος
  - Διεύθυνση
  - Φορά

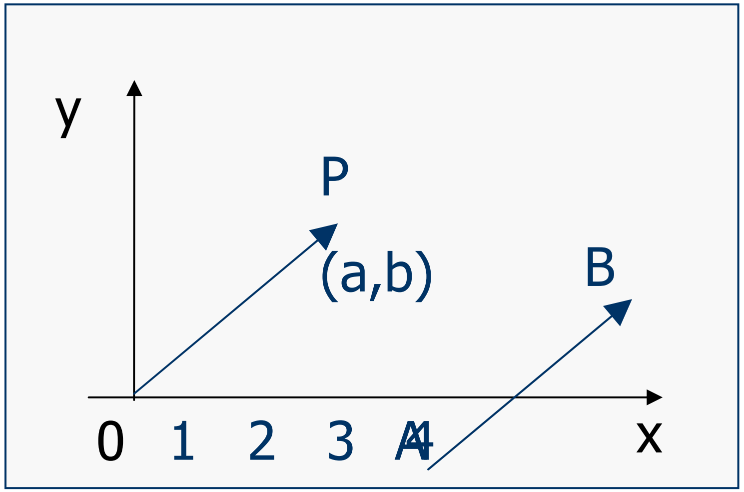
- Παραδείγματα
  - Ταχύτητα
  - Δύναμη
  - Animations



- Δισδιάστατα (2Δ) – (2D)
- Τρισδιάστατα (3Δ) – (3D)
- Πολυδιάστατα

Διανύσματα στο επίπεδο

- Συμβολισμός
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$
  - $\vec{v}$ = <a,b> (a:τετμημένη,b:τεταγμένη)
    - Διάνυσμα που όταν τοποθετηθεί στην αρχή των αξόνων καταλήγει στο P = (a,b)



- Ιδιότητες
  - <a,b> = <a′,b′> ⇔ a = a′ και b = b′
  - Έστω $\vec{v}$ = <a,b> τότε το μήκος του $\vec{v}$, $|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2}$
  - Παράδειγμα:
    - Αν $\vec{v}$ = <3,4> => $|\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

Διανύσματα στο επίπεδο

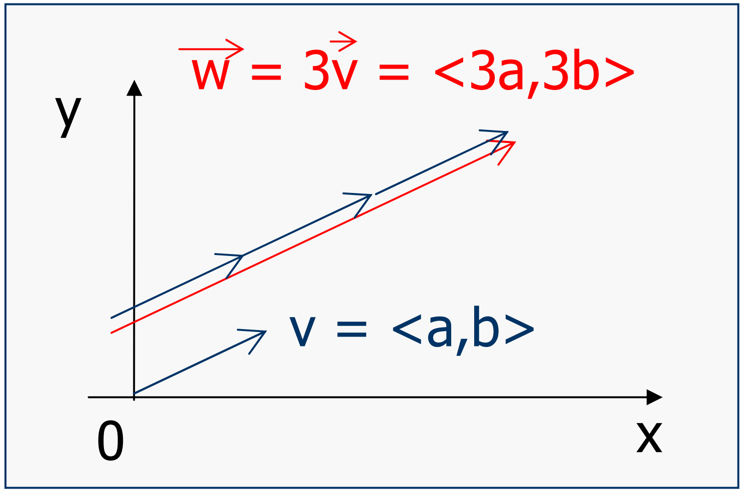
- Πλεονεκτήματα χρήσης διανυσμάτων: Αλγεβρικές πράξεις με γεωμετρική ερμηνεία

  1. Πολλαπλασιασμός με αριθμό

  $\vec{v} = \langle a,b \rangle,\ \lambda \in \mathbb{R}$:

  $\lambda \vec{v} = \langle \lambda \cdot a,\ \lambda \cdot b \rangle$

  $|\lambda \vec{v}| = |\lambda|\ |\vec{v}|$



*Αν $\lambda > 0$, το $\lambda \vec{v}$ έχει ίδια φορά, δ/νση, μέτρο με το $|\lambda|\vec{v}$

*Αν $\lambda < 0$, το $\lambda \vec{v}$ έχει αντίθετη φορά, ίδια δ/νση, ίδιο μέτρο με το $|\lambda|\vec{v}$

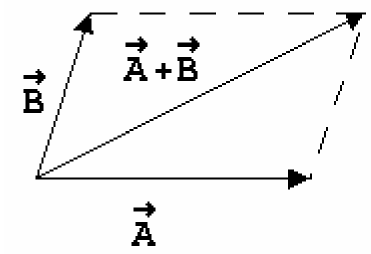
*Το $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ έχει ίδια δ/νση με το v ($\vec{v} \,//\, \vec{w}$)

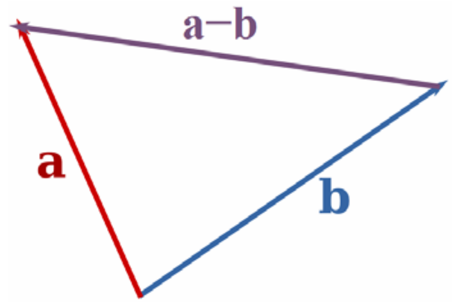
  2. Πρόσθεση/Αφαίρεση

  – $\vec{v} = \langle a,b \rangle,\ \vec{w} = \langle a',b' \rangle$

  – $\vec{v}+\vec{w} = \langle a+a', b+b' \rangle$

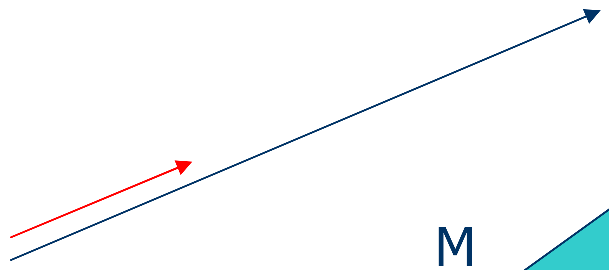
  – $\vec{v}-\vec{w} = \langle a-a', b-b' \rangle$





Διανύσματα στο επίπεδο

3. Διάνυσμα μοναδιαίου μέτρου

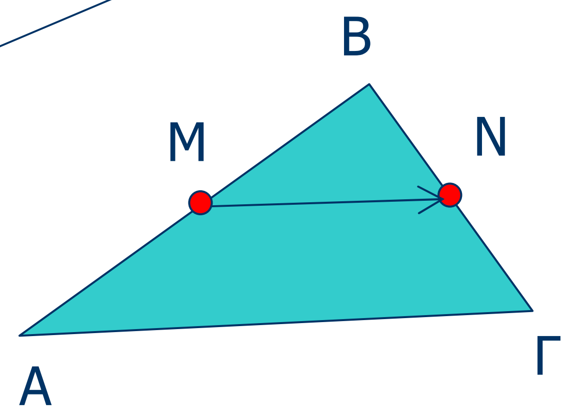


$\vec{v} = \langle a,b \rangle, \vec{v} \neq 0$

$\vec{v}/|\vec{v}|$

Μέτρο 1

ίδια δ/νση και φορά με το v



4. Συνοπτικά

$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$

$\vec{AB} - \vec{A\Gamma} = -\vec{BA} - \vec{A\Gamma} =$

$-(\vec{BA}+\vec{A\Gamma}) = -\vec{B\Gamma}$

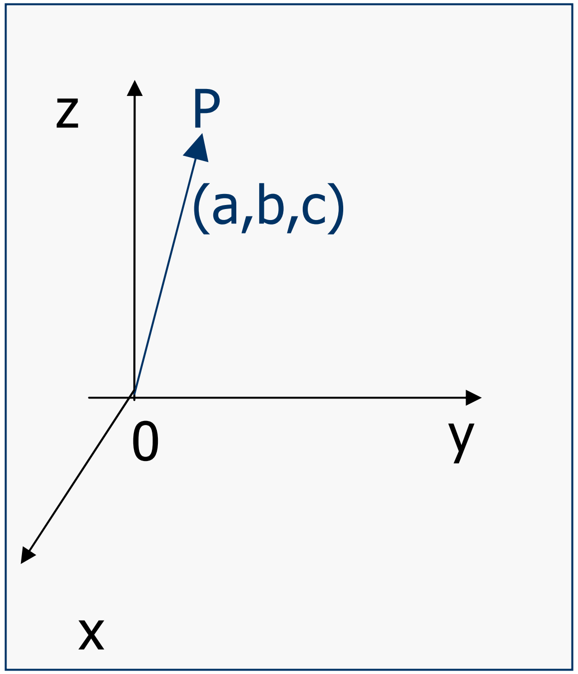
Ν.δ.ο $\vec{MN} // \vec{A\Gamma}$, όπου M,N μέσα πλευρών

$\vec{MN} = \vec{MB}+\vec{BN} = \frac{1}{2} (\vec{AB}+\vec{B\Gamma}) = \frac{1}{2} \vec{A\Gamma}$

Διανύσματα στο χώρο

- Επέκταση του ορισμού στο επίπεδο
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$
  - $\vec{v} = <a,b,c>$

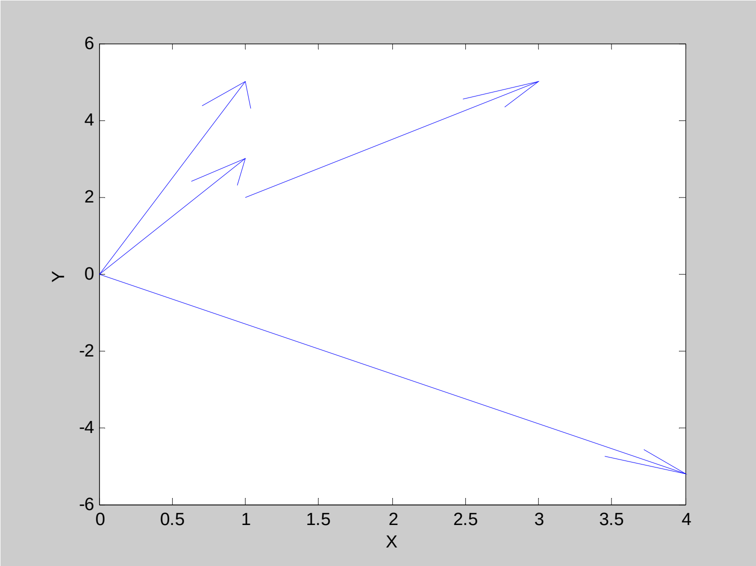
- Ιδιότητες
  - Έστω $\vec{v} = <a,b,c>$ τότε το μέτρο του v, $|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
  - Πράξεις : w = <a′,b′,c′>
    $\lambda \vec{v} + \vec{w} = <\lambda \cdot a+a', \lambda \cdot b+b', \lambda \cdot c+c'>$
  - Μοναδιαία διανύσματα
    (διανύσματα κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$)
    - $\vec{i} = <1,0,0>$
    - $\vec{j} = <0,1,0>$
    - $\vec{k} = <0,0,1>$



Απεικόνιση διανυσμάτων με Matlab

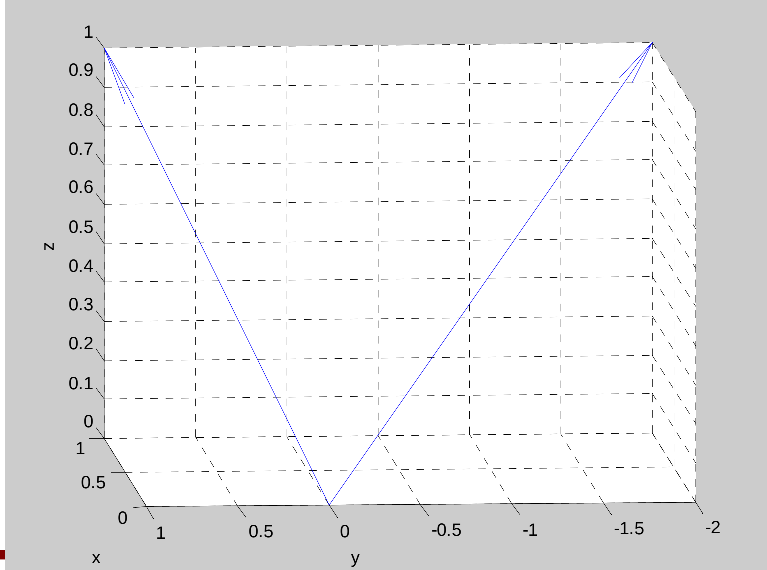
- **Παράδειγμα στις 2Δ:**
  Απεικόνιση στο Matlab των διανυσμάτων, <1,3>, <1,5> <4, -5.2>, <2,3> στην αρχή των αξόνων, εκτός από το <2,3> που θα τοποθετηθεί στο σημείο <1,2>:

```
x = [1 1 4 2];
y = [3 5 -5.2 3];
quiver([0 0 0 1],[0 0 0 2],x,y,0);
xlabel('X');
ylabel('Y');
```



- **Παράδειγμα στις 3Δ:**
  Απεικόνιση στο Matlab των διανυσμάτων, <1,1,1> , <1,-2,1> στην αρχή των αξόνων:

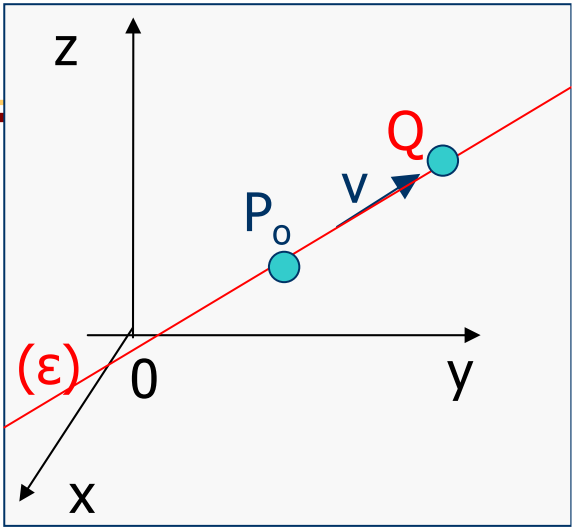
```
x = [1 1 ];
y = [1 -2 ];
z = [1 1];
quiver3([0 0],[0 0], [0 0],x,y,z,0);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```



ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Ευθεία στο χώρο/
Εσωτερικό Γινόμενο

Ευθεία στο χώρο



- Βρες την εξίσωση της ευθείας (ε) στο χώρο που περνάει από δοσμένο σημείο $P_o(x_0,y_0,z_0)$ και έχει την δ/νση του διανύσματος v = <a,b,c>:

Λύση

Έστω Q = (x,y,z) ∈ (ε) ⇔ Τα διανύσματα $\overrightarrow{P_oQ}$ και $\vec{v}$ έχουν την ίδια δ/νση:

Υπάρχει $t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{P_oQ} = t\,\vec{v} \Leftrightarrow \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle = t\,\langle a,b,c\rangle \Leftrightarrow$

$$\boxed{\langle x,y,z\rangle = \langle x_0,y_0,z_0\rangle + t\,\langle a,b,c\rangle} \quad (1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t\,a \\ y &= y_0 + t\,b \\ z &= z_0 + t\,c \end{aligned}} \quad (2)$$

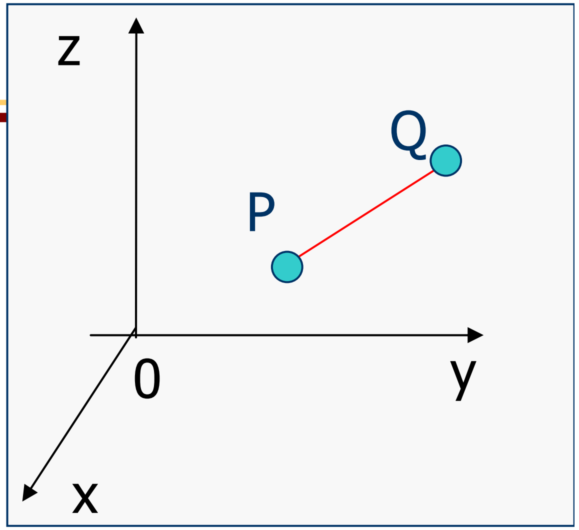
(1),(2) παραμετρικές εξισώσεις.

Για t= 0 => Q = Po

Αν a ≠0 και b ≠0 και c ≠0 μπορούμε να απαλείψουμε το t

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}} \quad (3)$$

Ευθύγραμμο τμήμα στο χώρο



- Έστω (ε) η ευθεία που ορίζεται από το σημείο P και το διάνυσμα $\overrightarrow{PQ}$.
- Το ευθύγραμμο τμήμα PQ είναι γεωμετρικός τόπος των σημείων που ανήκουν στην ευθεία (ε) και βρίσκονται ανάμεσα στα P και Q.

Έστω $X = (x,y,z) \in (PQ)$ με $P(x_0,y_0,z_0)$ και $Q(x_1,y_1,z_1)$

Υπάρχει $t \in [0,1] \; : \overrightarrow{PX} = t\,\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow$

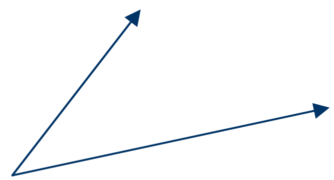
$$\boxed{\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle = t \langle x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0 \rangle \quad (1)}$$

Για $t = 0$, $X = P$

Για $t = ½$, $X =$ μέσο του PQ

Για $t = 1$, $X = Q$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων



- Είναι ένας πραγματικός αριθμός που το πρόσημο του σχετίζεται με την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα και το μέτρο τους (μέτρο ταιριάσματος διανυσμάτων).
- Αλγεβρικός ορισμός

  $\vec{v} = \langle a,b,c \rangle \quad \vec{w} = \langle a',b',c' \rangle$

  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$

  Παράδειγμα

  $\vec{v} = \langle 1,0,3 \rangle \quad \vec{w} = \langle 2,4,0 \rangle, \ \vec{v} \cdot \vec{w} = \ldots$

- Ιδιότητες
  - $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$
  - $\vec{v} \cdot (\lambda_1 \vec{w} + \lambda_2 \vec{u}) = \lambda_1 \vec{v} \cdot \vec{w} + \lambda_2 \vec{v} \cdot \vec{u}$
  - $\lambda \vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot (\lambda \vec{v})$

  Δεν ισχύει $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (\vec{w} \cdot \vec{u})$

Απόδειξη…

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

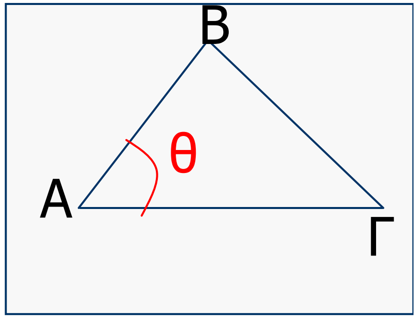
- Προβολή
  - Νόμος συνημίτονων:

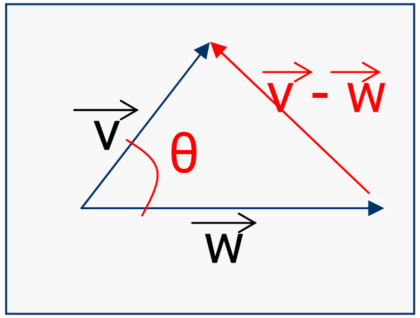
$$|\mathrm{B\Gamma}|^2 = |\mathrm{AB}|^2 + |\mathrm{A\Gamma}|^2 - 2|\mathrm{AB}||\mathrm{A\Gamma}|\cos(\theta)$$

$$0 < \theta < \pi/2 \rightarrow |\mathrm{B\Gamma}|^2 < |\mathrm{AB}|^2 + |\mathrm{A\Gamma}|^2$$

$$\theta = \pi/2 \rightarrow |\mathrm{B\Gamma}|^2 = |\mathrm{AB}|^2 + |\mathrm{A\Gamma}|^2$$

$$\pi/2 < \theta < \pi \rightarrow |\mathrm{B\Gamma}|^2 > |\mathrm{AB}|^2 + |\mathrm{A\Gamma}|^2$$





$$(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = |\vec{v}-\vec{w}|^2 \overset{(\nu.\sigma\upsilon\nu\eta\mu\iota\tau\acute{o}\nu\omega\nu)}{=} |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta)$$

$$(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta)$$

Πόρισμα

$$0 < \theta < \pi/2 \Rightarrow \cos(\theta) > 0 => \vec{v}\cdot\vec{w} > 0$$

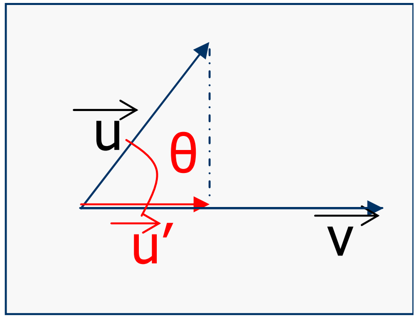
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$

$$\pi/2 < \theta < \pi \Rightarrow \cos(\theta) < 0 => \vec{v}\cdot\vec{w} < 0$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

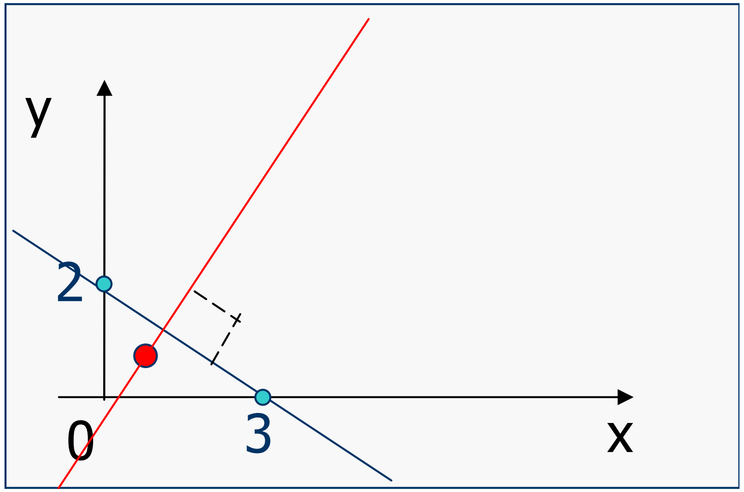
- Προβολή για θ < π/2

$$\vec{u}\,' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{u}\,'| = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{u}|\cos(\theta) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{u}|\frac{\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{u}}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{\mathrm{u}}|} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{u}}}{|\vec{v}|^2}\right)\cdot\vec{v}$$



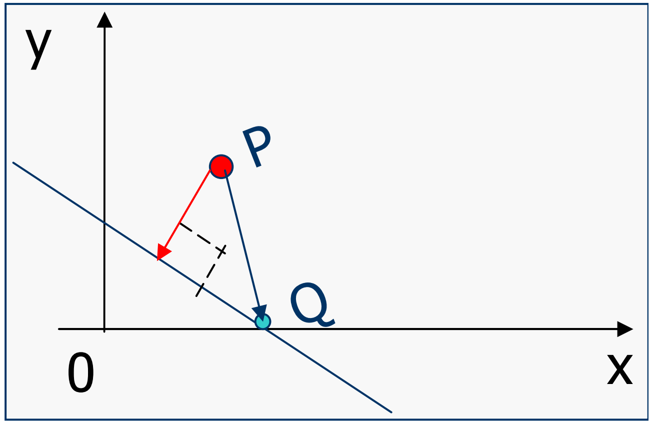
- Αριθμητικό παράδειγμα …

- Άσκηση
  - Ποια ευθεία του επιπέδου περνάει από το σημείο (1,1) και είναι κάθετη στην ευθεία 2x+3y=6.



Απόσταση σημείου από ευθεία

- Ποια είναι η απόσταση του $P(x_1,y_1)$ από ευθεία $ax + by = c$



Λύση

Το σημείο $Q(c/a,0)$ ανήκει στην (ε)

και το διάνυσμα $v = \langle a,b \rangle$ είναι κάθετο στην (ε).

Αρκεί να υπολογίσουμε τη προβολή του $\overrightarrow{PQ}$ στο διάνυσμα $\overrightarrow{v}$

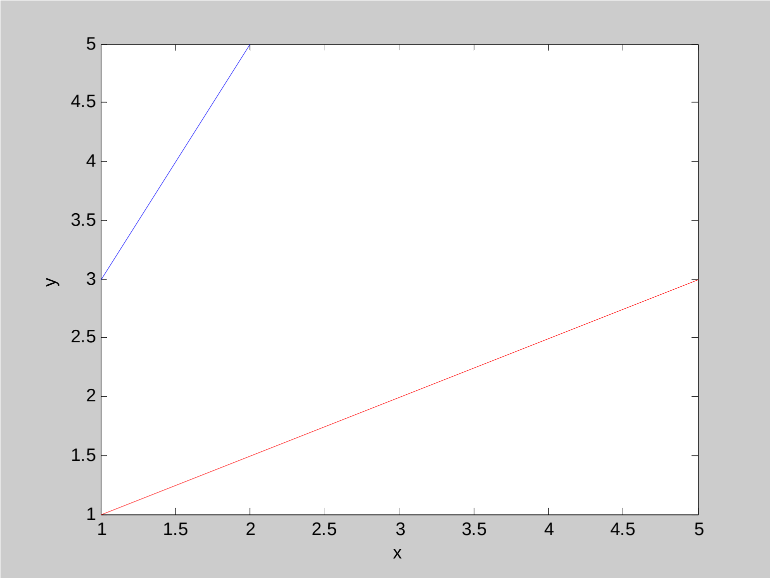
…

Απεικόνιση ευθείας με Matlab

- **Παράδειγμα στις 2Δ:**

  Απεικόνιση στο Matlab της ευθείας που περνάει από τα σημεία (1,3),(2,5) και της ευθείας (1,1) και (5,3)

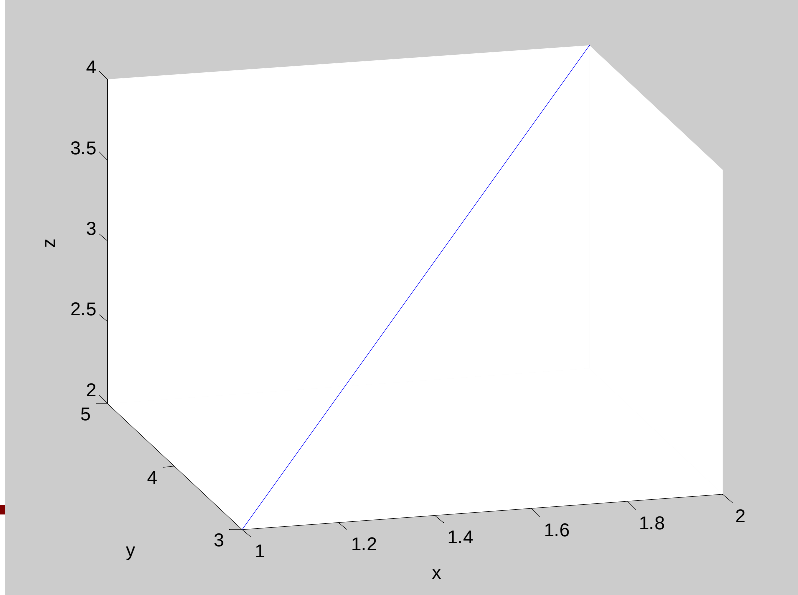
```
x = [1 2];
y = [3 5];
plot(x,y);
hold on;
x = [1 5];
y = [1 3];
 plot(x,y,'r');
xlabel('x'); ylabel('y');
```



- **Παράδειγμα στις 3Δ:**

  Απεικόνιση στο Matlab της ευθείας που περνάει από τα σημεία (1,3,2),(2,5,4)

```
x = [1 2 ];
y = [3 5 ];
z = [2 4];
plot3(x,y,z);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```



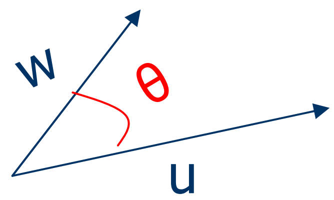
HY-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εξωτερικό Γινόμενο/
Εξίσωση Επιπέδου

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο

$$\vec{u} = < a, b, c > = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{w} = < a', b', c' > = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$$



Το εξωτερικό γινόμενο u x w είναι το <u>**διάνυσμα**</u>

1.Δ/νση: Κάθετο διάνυσμα στα u, w

2.Έχει φορά προς τα έξω αν 0<θ <π αλλιώς έχει φορά προς τα μέσα

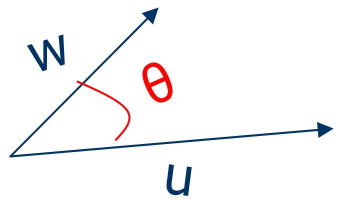
3. Μέτρο $|\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}||\vec{w}|\sin(\theta)$

4. Αν θ είναι 0 ή π τότε το εξωτερικό γινόμενο είναι 0

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο

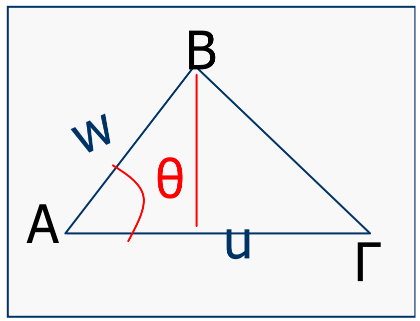
Ορισμός

$$\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}$$



Ιδιότητες

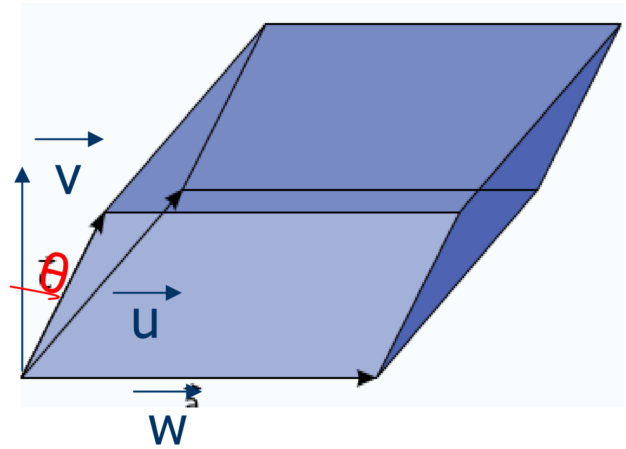
1. $\vec{u}\times\vec{w}=-\vec{w}\times\vec{u}$
2. $\vec{u}\times\vec{w}=0 \Leftrightarrow \vec{w}//\vec{u}$
3. $(\vec{u}\times\vec{w})\cdot\vec{u}=(\vec{u}\times\vec{w})\cdot\vec{w}=0$
4. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
5. $|\vec{u}\times\vec{w}|=|\vec{u}||\vec{w}|\sin(\theta)=\sqrt{|\vec{u}||\vec{w}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{w})^2}=2(\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma)$



Τριπλό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός

$$\vec{\mathrm{v}} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$



$$|\vec{\mathrm{v}} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})| = |\vec{u} \times \vec{w}| \, |\vec{\mathrm{v}}| \, |\cos(\theta)|$$

Όγκος παρ/δου με πλευρές τα διανύσματα του γινομένου

$|\vec{u} \times \vec{w}|$: Εμβαδόν παραλληλογράμμου

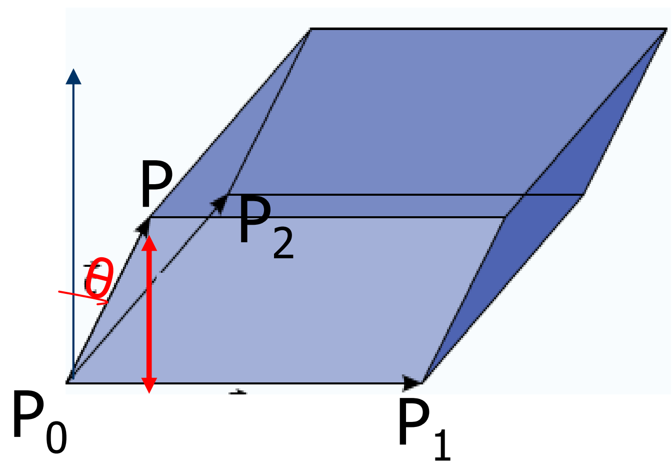
Απόσταση σημείου P(x,y,z) από επίπεδο

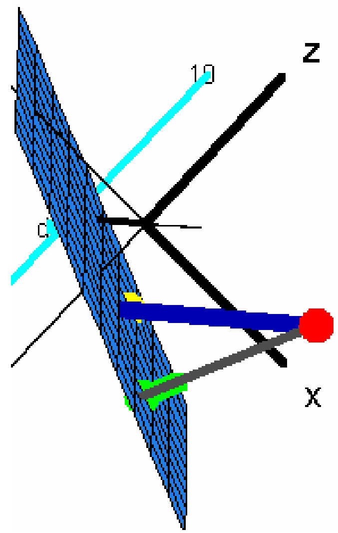
Έστω Pi σημεία του επιπέδου
Τότε $u=P_0P_1$ και $w=P_0P_2$ διανύσματα του επιπέδου και $v=P_0P$

Ύψος = Όγκος παρ/δου με πλευρές τα διανύσματα του γινομένου / Εμβαδόν της βάσης

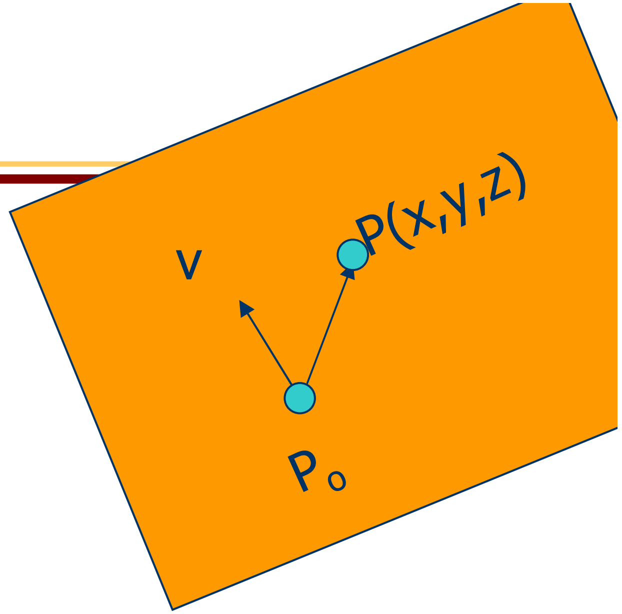
$|\vec{u}\times\vec{w}|$: Εμβαδόν βάσης

$|\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})|$: Όγκος παρ/δου





Εξισώσεις Επιπέδου



- Βρες την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από δοσμένο σημείο $P_o(x_0,y_0,z_0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = <a,b,c>$:

Έστω $\vec{w}=\overrightarrow{P_0P}$, τότε $\vec{w}$ είναι κάθετο στο $\vec{v}$

Άρα για κάθε σημείο του επιπέδου P(x,y,z) ισχύει

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow < x-x_0, y-y_0, z-z_0 > < a,b,c > = 0 \Leftrightarrow$$

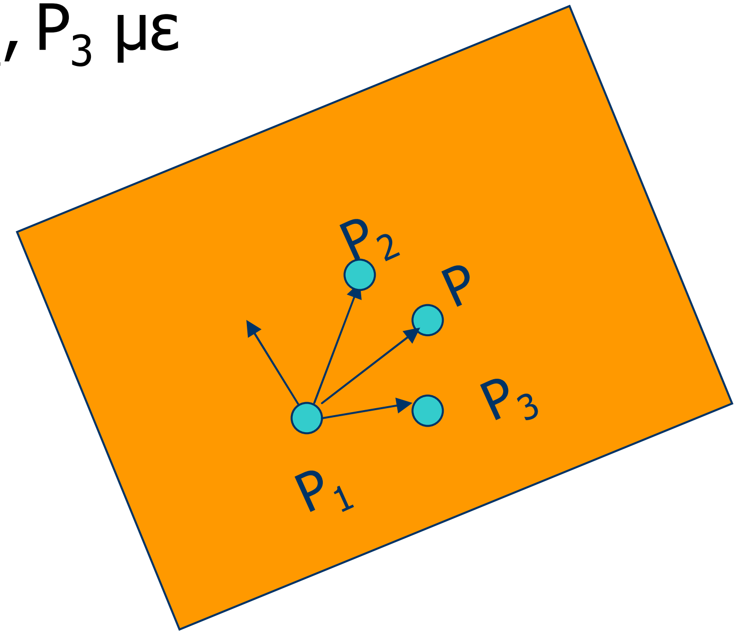
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

- Αντίστροφα από την εξίσωση του επιπέδου γνωρίζουμε ένα **κάθετο διάνυσμα <a,b,c>** στο επίπεδο
- Όμοια, με την ευθεία ax+by=c και το διάνυσμα <a,b>

Εξισώσεις Επιπέδου

- Βρες την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P_1 ,P_2, P_3 με $P_i(a_i,b_i,c_i)$

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_2}) = 0$$



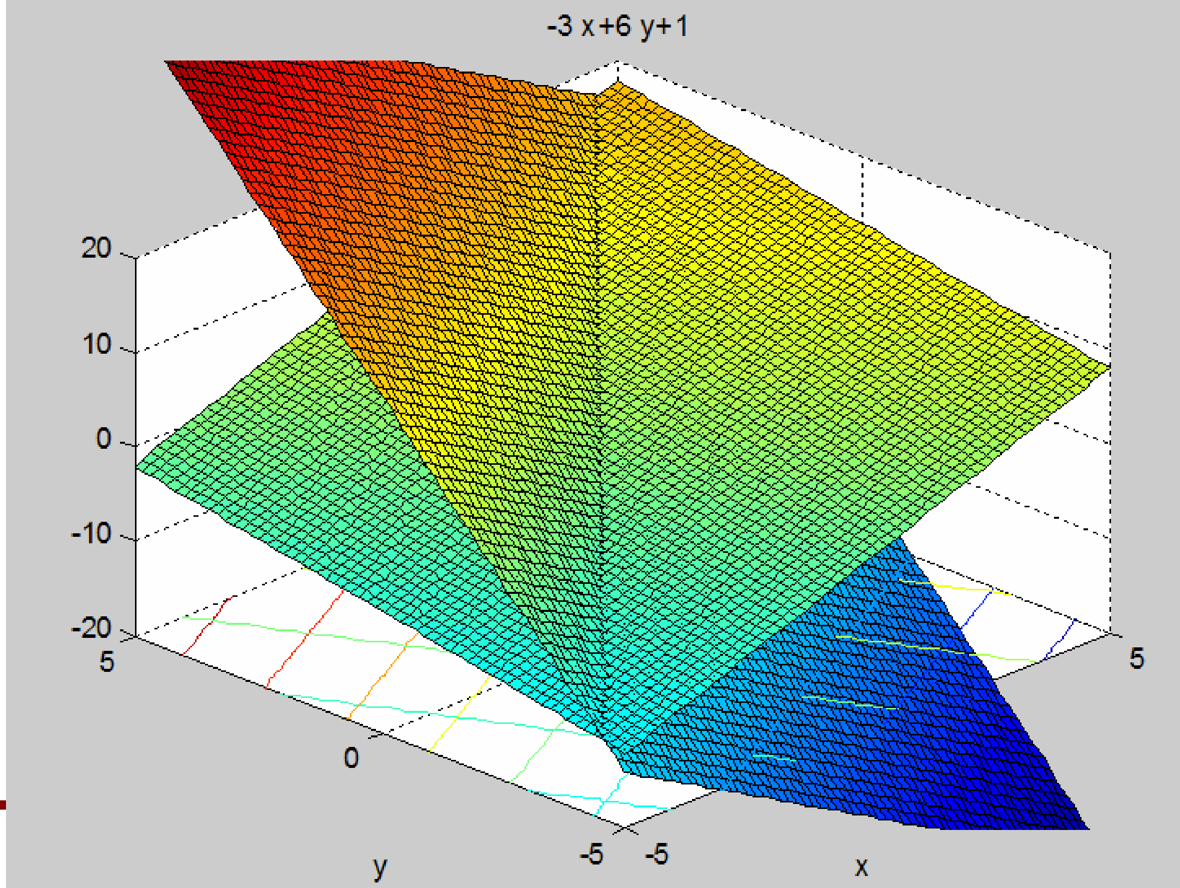
$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_2 & b_3-b_2 & c_3-c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Απεικόνιση επιπέδου με Matlab

Απεικόνιση στο Matlab του επιπέδου με εξίσωση
Z=2X+Y+3 και του επιπέδου Z=-3X+6Y+1

```
syms x y
ezsurfc(2*x+y+3,[-5,5,-5,5]);
hold on;
ezsurfc(-3*x+6*y+1,[-5,5,-5,5]);
```

Είναι τα επίπεδα κάθετα;
Εξίσωση τομής;



ΗΥ-111
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

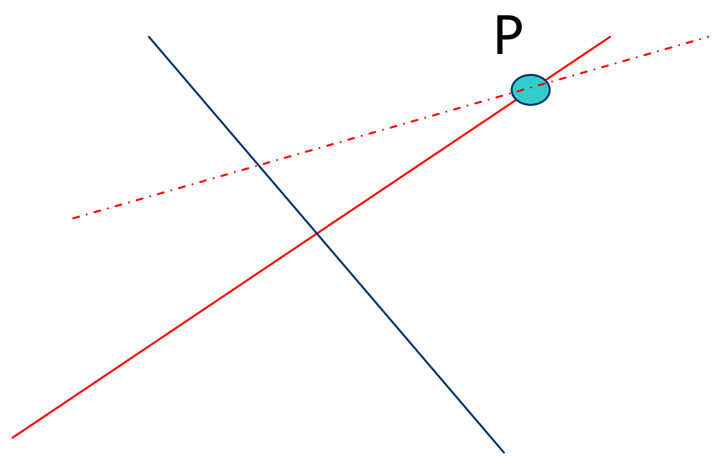
Επαναληπτικές Ασκήσεις στα διανύσματα

Καθετότητα

- Για ποιες τιμές του b το <2,b,0> είναι κάθετο στο <3,2,1>.

  $<2,b,0> \cdot <3,2,1> = 0 \Leftrightarrow 6+2b = 0 \Leftrightarrow b=-3$

- Βρείτε την ευθεία που περνάει από το P(3,1,-1) και τέμνει κάθετα την ευθεία $<x,y,z> = t<1,1,1>-<1,2,1>$.



Εσωτερικό γινόμενο

- Ν.δ.ο

$$2(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2) = |\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2$$

$$4 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}+\vec{y}|^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2$$

Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί διάνυσμα που έχει μήκος 1, είναι κάθετο με το <1,1,1> και σχηματίζει ίδια γωνία με το $\vec{j}$ και το $\vec{k}$.

Έστω v = <a,b,c> το ζητούμενο διάνυσμα.

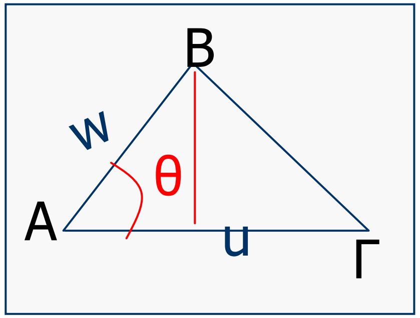
(1) |v|=1

(2) $\langle a,b,c\rangle \cdot \langle 1,1,1\rangle = 0$

(3) $\dfrac{\langle a,b,c\rangle \cdot \vec{j}}{|\langle a,b,c\rangle| \cdot |\vec{j}|} = \dfrac{\langle a,b,c\rangle \cdot \vec{k}}{|\langle a,b,c\rangle| \cdot |\vec{\kappa}|}$

Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές (0,0,0), (1,1,1), (0,-2,3).

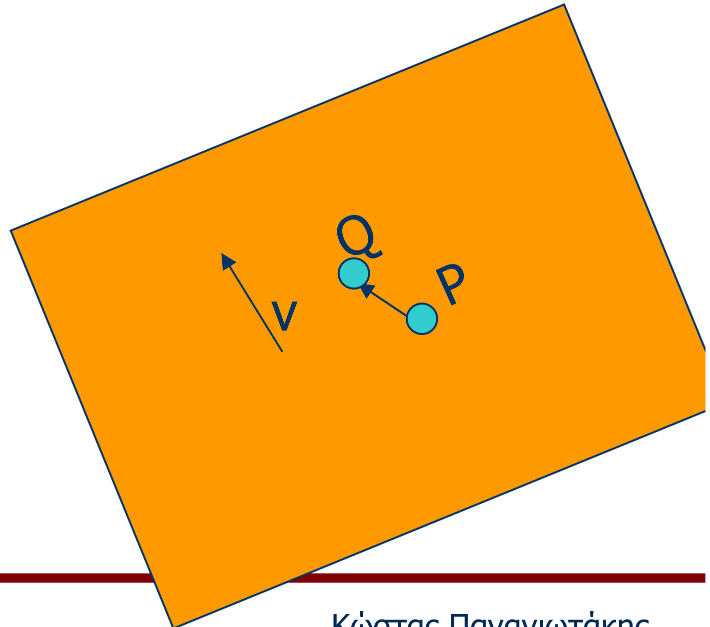


$$(\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}) = 0.5 \cdot |\vec{u} \times \vec{w}|$$

- Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου κάθετο στο v=<1,1,1> και περνά από το P(1,0,0)

Έστω Q (x,y,z) σημείο του επιπέδου

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$$



Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου κάθετο στην ευθεία <5,0,2>t+(3,-1,1) και περνά από το P(1,0,0)

Έστω Q (x,y,z) σημείο του επιπέδου

$\overrightarrow{PQ} \cdot <5,0,2> = 0$

- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το (1,-2,-3) και είναι κάθετη στο επίπεδο 3x-y+2z+4=0.
  - Το διάνυσμα <3,-1,2> είναι κάθετο στο επίπεδο άρα παράλληλο στην ευθεία.
  - Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι

<x-1,y+2,z+3>=<3,-1,2>t

Εξωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τις ευθείες (0,1,-2)+<2,3,-1>t και (2,-1,0)+<2,3,-1>t

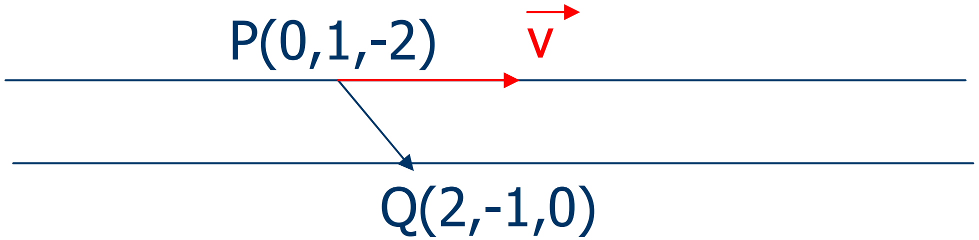
Οι ευθείες είναι // με το $\vec{v} = <2,3,-1>$.

Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο

Είναι το $\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}$.

Ένα σημείο του επιπέδου

Είναι το P.

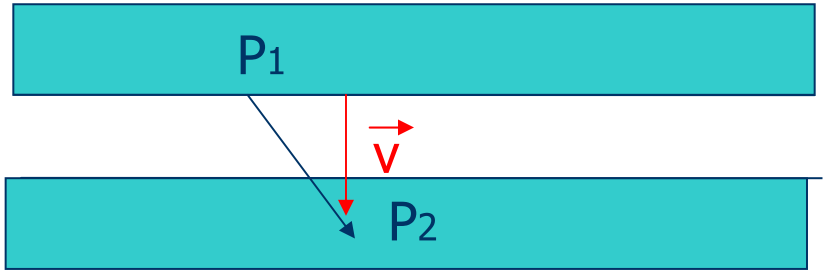


Εσωτερικό γινόμενο

- Να βρεθεί η απόσταση των επιπέδων

Π1:ax+by+cz=f

Π2:ax+by+cz=g



Κάθετα επίπεδα με το $\vec{v} = \langle a,b,c \rangle$.

Έστω P_1, P_2 σημεία των επιπέδων.

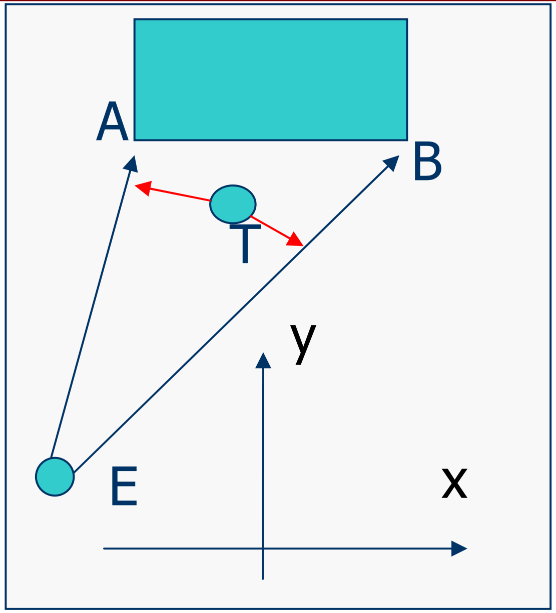
Μας ενδιαφέρει το μήκος της προβολής του $\overrightarrow{P_1P_2}$ στο $\vec{v}$.

$$|\vec{h}| = \left| \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{\mathrm{v}}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{\mathrm{v}} \right| = \ldots = \frac{|f-g|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Εφαρμογή

- Εφαρμογή στο robocup…

Θεωρείστε πως το επίπεδο του γηπέδου είναι το z = 0.
Το τέρμα βρίσκεται από το σημείο A(-3,100) B(3,100). Ο επιθετικός βρίσκεται στη θέση E(-10,70) και ο τερματοφύλακας T(-1,95).



Για να αποφασίσει ο επιθετικός σε ποια γωνία θα εκτελέσει θα πρέπει να μπορεί να απαντήσει στο παρακάτω ερώτημα…

Θεωρώντας πως η μπάλα εκτελεί Ε.Κ. ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του τερματοφύλακα για από τις τροχιές EA και EB.