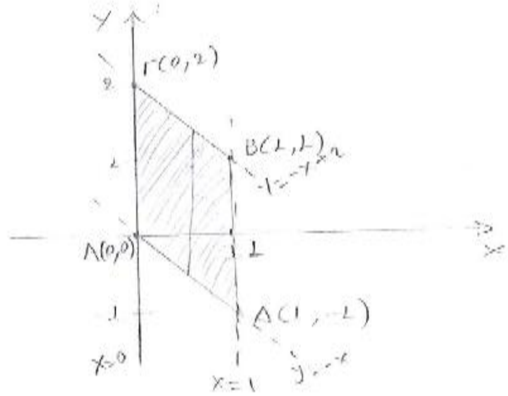
Άσκηση 1

α)



Θα βρώ αρχικά τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του παραλληλογράμμου.

Πλευρά ΑΔ: $y-0 = \frac{-1-0}{1-0}(x-0) \Rightarrow y = -x$

(Αν γνωρίζω δύο σημεία της ευθείας $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε η εξίσωση της ευθείας θα είναι: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$)

Πλευρά ΒΓ: $y - 1 = \frac{2-1}{0-1}(x-1) \Rightarrow y - 1 = -(x-1) \Rightarrow y = -x+2$

Πλευρά ΑΓ: $x = 0$

Πλευρά ΒΔ: $x = 1$

(2)

Παρατηρώ ότι $\forall (x,y) \in S \Rightarrow x+y \geq 0$ αφού για κάθε τυχαίο σημείο $M(x,y)$ αυτής της περιοχής ισχύει: $-x \leq y \leq -x+2$ $\Rightarrow 0 \leq x+y \leq 2$.

Άρα $|f(x,y)| = |x+y| = x+y$

Για την περιοχή S συνοπτικά έχουμε:

$$S = \begin{cases} -x \leq y \leq -x+2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Άρα $$V = \int_0^1 \int_{-x}^{-x+2} |x+y| \, dy dx = \int_0^1 \int_{-x}^{-x+2} (x+y) \, dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{-x+2} dx$$

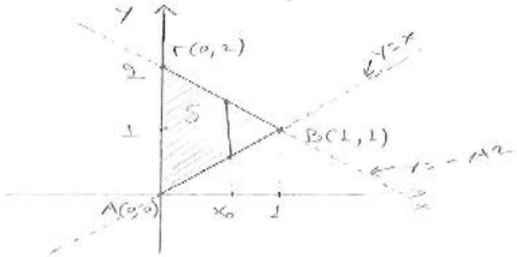
$$= \int_0^1 \left(x(-x+2) + \frac{(-x+2)^2}{2} - \left[x(-x) + \frac{(-x)^2}{2}\right] \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\cancel{x^2} + 2x + \frac{x^2 + 4(-x) + 4}{2} + \cancel{x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{2x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{2x} + 2 \right) dx = \int_0^1 2 \, dx = [2x]_0^1 = 2 \cdot 1 - 0 = 2$$

Άρα $\boxed{V = 2}$

β)



Εξισώσεις για το σύνορο του S :

$AB: \; y-0 = \frac{1-0}{1-0}(x-0) \Rightarrow y = x$

$B\Gamma: \; y-1 = \frac{2-1}{0-1}(x-1) \Rightarrow y-1 = -(x-1) \Rightarrow y-1 = -x+1 \Rightarrow y = -x+2$

$A\Gamma: \; x = 0$

Παρατηρώ ότι $f(x,y) > 0$ για κάθε $(x,y) \in S$.

Άρα $|f(x,y)| = f(x,y) = x+y$

Για την περιοχή S συνεπώς έχουμε

$$S = \begin{cases} x \le y \le -x+2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(4)

Ο όγκος είναι:

$$V = \iint_S |f(x,y)|\,dy\,dx = \int_0^1 \int_x^{-x+2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_x^{-x+2} (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_x^{-x+2} dx = \int_0^1 \left[x(-x+2) + \frac{(-x+2)^2}{2} - \left(xx + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2 + 2x + \frac{x^2+4-4x}{2} - x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

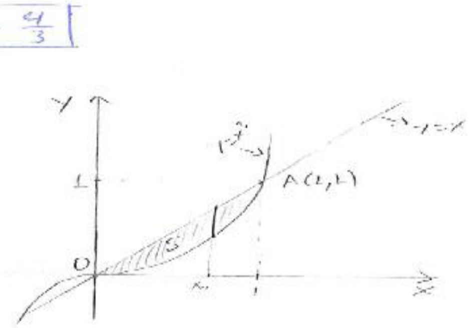
$$= \int_0^1 \left(-x^2 \cancel{+2x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + 2 \cancel{-2x} - x^2 \cancel{-\frac{x^2}{2}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (-2x^2+2)\,dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^1 = -2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 1 - 0 = -\frac{2}{3} + 2$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{6}{3} = \frac{4}{3}$$

Άρα $\boxed{V = \frac{4}{3}}$

δ)



Τομές :

$\begin{cases} y = x \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $\underbrace{x = -1}_{\text{απορρίπτεται}}$

Για $x = 0 \Rightarrow y = 0$, για $x = 1 \Rightarrow y = 1$

Άρα σημεία τομής: $O(0,0)$ και $A(1,1)$

$C(x_0) = \{(x_0, y) : x^3 \le y \le x\}, \quad 0 \le x_0 \le 1$

Για την περιοχή S συνοπτικά έχουμε:

$$S = \begin{cases} x^3 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Είναι $f(x,y) = x+y \ge 0$, αφού $x, y \ge 0$

Άρα $|f(x,y)| = f(x,y)$

Όμως: $V = \iint_S |f(x,y)|\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} (x+y)\,dy\,dx$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x} dx = \int_0^1 \left[x x + \frac{x^2}{2} - \left(x x^3 + \frac{(x^3)^2}{2} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^4 - \frac{x^6}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^2 - x^4 - \frac{x^6}{2} \right) dx$$

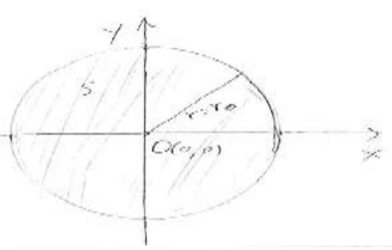
$$= \left[\frac{3}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2} \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \overset{35}{\frac{1}{2}} - \overset{14}{\frac{1}{5}} - \overset{5}{\frac{1}{14}} - 0 = \frac{35-14-5}{70}$$

$$= \frac{35-19}{70} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

Άρα $\boxed{V = \frac{8}{35}}$

Άσκηση 2

S: Εσωτερικό του κύκλου κέντρου $K(0,0)$ και ακτίνας $r = r_0$



A)

Μετατρέπουμε σε πολικές συντεταγμένες:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

Όπου: $f(r,\theta) = r^2$

Για την περιοχή S συνοπτικά έχουμε:

$$S = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le r_0 \end{cases}$$

Θα πρέπει $V = 1 \Rightarrow \iint_S |f(r,\theta)|\, r\,dr\,d\theta = 1 \Rightarrow \iint_S f(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta = 1$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r^2 r\,dr\,d\theta = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r^3\,dr\,d\theta = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{r_0} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_0^4}{4} - 0 \right) d\theta = 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{4} r_0^4 \theta \right]_0^{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{4} r_0^4 2\pi - 0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \pi r_0^4 = 1$$

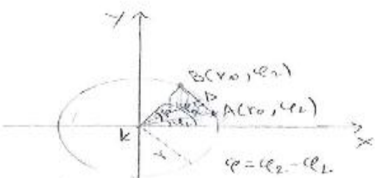
$$\Rightarrow r_0^4 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}}$$

B) Όμοια με το A και καταλήγω: $\frac{1}{2}\pi r_0^4 = c \Rightarrow r_0^4 = \frac{2c}{\pi} \Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt[4]{\frac{2c}{\pi}}}$
(επειδή $r_0 > 0$)

Γ) Με πολικές συντεταγμένες:

Τα σημεία που ψάχνουμε θα είναι: $A(r_0, \varphi_1)$ και $B(r_0, \varphi_2)$ με $r = r_0$

Αρκεί να βρούμε τα φ_1, φ_2 ώστε ο όγκος $V = \iint_S |f(r,\varphi)|\, r\,dr\,d\varphi$ να είναι μέγιστος με τον περιορισμό ότι $(KAB) = 1$



Συνοπτικά όμως το S_1 είναι:

$$S_1 = \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ 0 \le r \le r_0 \end{cases}$$

Είναι: $f(r,\varphi) = r^2$

Οπότε $V = \int_0^{r_0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 r \, d\varphi \, dr = \int_0^{r_0} \left[r^3\varphi\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} dr = \int_0^{r_0} r^3(\varphi_2-\varphi_1)\, dr$

$= \int_0^{r_0} (r^3\varphi_2 - r^3\varphi_1) dr = \left[\frac{r^4}{4}(\varphi_2-\varphi_1)\right]_0^{r_0} = \frac{r_0^4}{4}(\varphi_2-\varphi_1)$

Ακόμα $(ΚΑΒ) = 1 \Rightarrow \frac{(ΑΒ)\cdot υ}{2} = 1 \Rightarrow (ΑΒ)\cdot υ = 2 \Rightarrow 2(ΑΔ)\cdot υ = 2$

$\Rightarrow (ΑΔ)\cdot υ = 1 \Rightarrow r_0 \sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} \cdot r_0 \cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_0^2 \sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} = 1 \Rightarrow 2 r_0^2 \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2.$

$\Rightarrow r_0^2 \sin\varphi = 2$

Θεωρώ $G(r_0,\varphi) = r_0^2 \sin\varphi - 2 = 0$

$V(r_0,\varphi) = \frac{r_0^4}{4}\varphi$

Θα πρέπει:

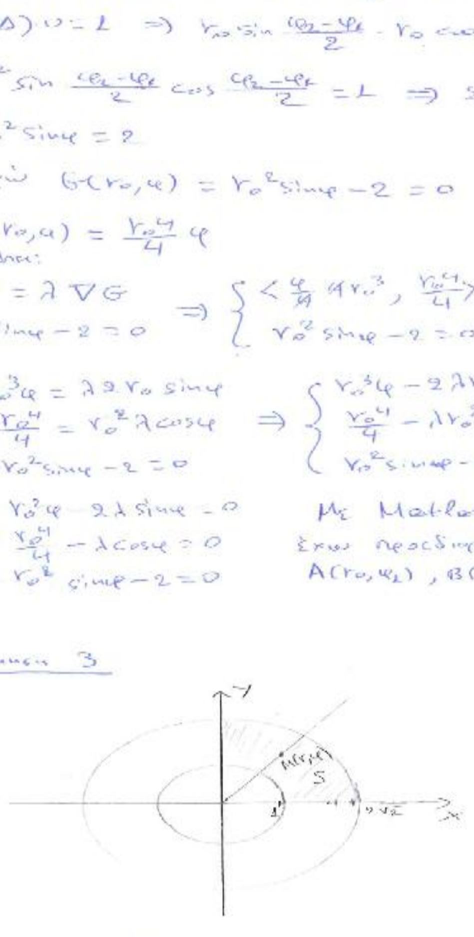
$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \nabla G \\ r_0^2\sin\varphi - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle \frac{\varphi}{4} 4r_0^3, \frac{r_0^4}{4} \rangle = \lambda \langle 2r_0\sin\varphi, r_0^2\cos\varphi \rangle \\ r_0^2 \sin\varphi - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_0^3\varphi = \lambda 2 r_0 \sin\varphi \\ \frac{r_0^4}{4} = r_0^2 \lambda\cos\varphi \\ r_0^2\sin\varphi - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0^3\varphi - 2\lambda r_0 \sin\varphi = 0 \\ \frac{r_0^4}{4} - \lambda r_0^2\cos\varphi = 0 \\ r_0^2\sin\varphi - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_0^2\varphi - 2\lambda\sin\varphi = 0 \\ \frac{r_0^4}{4} - \lambda\cos\varphi = 0 \\ r_0^2 \sin\varphi - 2 = 0 \end{cases}$$

Με Matlab βρίσκω το r_0 και φ οπότε έχω προσδιορίσει τα Α και Β.
$A(r_0,\varphi_1)$, $B(r_0,\varphi_1+\varphi)$ όπου φ_1 το [illegible]

Άσκηση 3



Είναι: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 8, \ x \ge 0, y \ge 0\}$

Είναι η ορθή προβολή του στερεού στο επίπεδο $z=0$

Οπότε $V = \iint_S |f(x,y)|\, dx dy = \iint_S |10-(x+y)|\, dx dy$

Είναι $|f(x,y)| = |10-(x+y)| = 10-(x+y)$

αφού $1 \le x \le 2\sqrt{2}$ και $1 \le y \le 2\sqrt{2}$. Οπότε $2 \le x+y \le 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -4\sqrt{2} \le -(x+y) \le -2 \Leftrightarrow 10-4\sqrt{2} \le 10-(x+y) \le 8$

Χρησιμοποιώ κυλινδρικές συντεταγμένες

$$D = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \le r \le 2\sqrt{2} \\ 0 \le z \le 10 - x - y = 10 - r(\cos\theta + \sin\theta) \end{cases}$$

$V = \iiint_D r \, dr \, d\theta \, dz = \int_1^{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\int_0^{10-r(\cos\theta+\sin\theta)} r \, dz \, d\theta \, dr = \int_1^{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r z\right]_0^{10-r(\cos\theta+\sin\theta)} d\theta \, dr$

$= \int_1^{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} r[10 - r(\cos\theta+\sin\theta)]\, d\theta \, dr = \int_1^{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} [10r - r^2(\cos\theta+\sin\theta)]\, d\theta \, dr =$

(9)

$$= \int_1^{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} (10r - r^2\cos\theta - r^2\sin\theta)\, d\theta\, dr$$

$$= \int_1^{2\sqrt{2}} \left[10r\theta - r^2\sin\theta + r^2\cos\theta\right]_0^{\pi/2} dr = \int_1^{2\sqrt{2}} \left(10r\frac{\pi}{2} - r^2\sin\frac{\pi}{2} + r^2\cos\frac{\pi}{2} - r^2\right) dr$$

$$= \left[5\pi\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right]_1^{2\sqrt{2}} = \left[\frac{5\pi r^2}{2} - \frac{2}{3}r^3\right]_1^{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5\pi}{2}(2\sqrt{2})^2 - \frac{2}{3}(2\sqrt{2})^3 - \left(\frac{5\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5\pi}{\cancel{2}} 4 \cdot \cancel{8} - \frac{2}{3} 2^3 (\sqrt{2})^3 - \frac{5\pi}{2} + \frac{2}{3}$$

$$= 20\pi - \frac{2^4}{3} 2\sqrt{2} - \frac{5\pi}{2} + \frac{2}{3} = 20\pi - \frac{32}{3}\sqrt{2} - \frac{5\pi}{2} + \frac{2}{3} = \frac{120\pi - 64\sqrt{2} - 15\pi + 4}{6}$$

$$= \frac{105\pi - 64\sqrt{2} + 4}{6}$$