Άσκηση 1

α) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(2x)+\ln(x+y+1)}{e^{x+y}} = \dfrac{\sin(2\cdot 0)+\ln(0+0+1)}{e^{0+0}} = \dfrac{0+0}{1} = 0$

β) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{xy^3+1}{x^2} = \dfrac{0\cdot 1^3+1}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

γ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x}$

- Για $y=0$ και $x \neq 0$: $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

  $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

- Για $y = mx$ με $m \neq 0$: $f_2(x) = \dfrac{\sin(x+mx)}{x}$

  $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+mx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(m+1)\,\sin[(m+1)x]}{(m+1)\,x}$

  $= (m+1)\cdot 1 = m+1 \;,\; m\neq 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) \neq \lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$

Επομένως το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x}$ δεν υπάρχει

Άσκηση 2

$f(x,y) = 2x^2 - y^2 - 3xy + x + y$

Εφαπτόμενο επίπεδο στο $(x_0, y_0) = (1,1)$ θα είναι της μορφής:

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y + 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 3x + 1$$

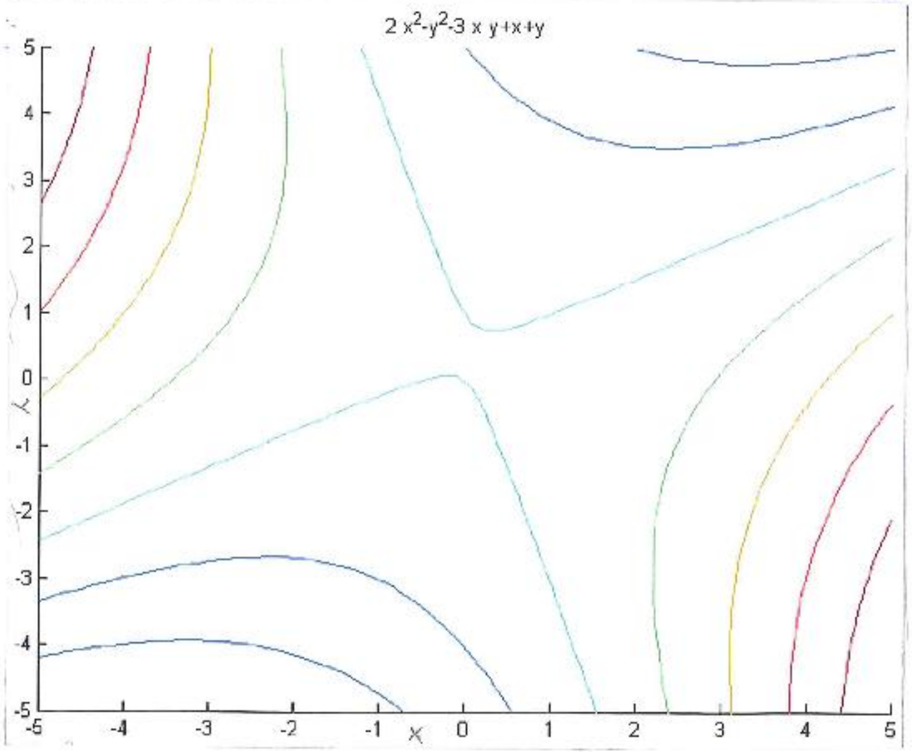
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4\cdot 1 - 3\cdot 1 + 1 = 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 1 = -5+1 = -4$$

$$f(1,1) = 2\cdot 1^2 - 1^2 - 3\cdot 1\cdot 1 + 1 + 1 = 2 - \cancel{1} - 3 + \cancel{1} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση:

$$z - f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$\Rightarrow z - 0 = 2(x-1) + (-4)(y-1) \Rightarrow z = 2x - 2 - 4y + 4 \Rightarrow \boxed{-2x + 4y + z = 2}$$



A) Είναι: $D=\{(x,y) ; x^2+y^2\leq 1\}$

$D^o=\{(x,y) : x^2+y^2<1\}$

$\partial D=\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$

— Κρίσιμα σημεία στο D^o:

Είναι: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y+1=0 & (1) \\ -2y-3x+1=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} 3\times \\ 4\times \end{matrix}$ $\Rightarrow$

$\begin{cases} \cancel{12x}-9y+3=0 \\ -8y-\cancel{12x}+4=0 \end{cases}$ +

$-17y+7=0 \Rightarrow y=\frac{7}{17}$. Οπότε από (1) $\Rightarrow 4x-3\cdot\frac{7}{17}+1=0 \Rightarrow$

$4x=\frac{21}{17}-\frac{17}{17} \Rightarrow 4x=\frac{4}{17} \Rightarrow x=\frac{1}{17}$

Άρα στο $(x,y)=\left(\frac{1}{17},\frac{7}{17}\right)\in D^o$ έχουμε κρίσιμο σημείο

Είναι: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(-2y-3x+1)=-3$

$\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{17},\frac{7}{17}\right)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{17},\frac{7}{17}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{17},\frac{7}{17}\right)\right)^2$

$=4\cdot(-2)-(-3)^2=-8-9=-17<0$

Άρα το $\left(\frac{1}{17},\frac{7}{17}\right)$ αντιστοιχεί σε σημείο "σαγματικό".

— Περιορίζω την f στο ∂D:

$\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$t\to(\cos t,\sin t)$

$F(t)=f\circ\varphi(t)=2\cos^2 t-\sin^2 t-3\cos t\sin t+\cos t+\sin t$, $t\in[0,2\pi]$

— Κρίσιμα σημεία στο $[0,2\pi]$:

$$F'(t) = 4\cos t\,(-\sin t) - 2\sin t\cos t - 3(-\sin t\cdot\sin t + \cos t\cos t) - \sin t + \cos t$$

$$= -4\cos t\sin t - 2\cos t\sin t + 3\sin^2 t - 3\cos^2 t - \sin t + \cos t$$

$$= -6\cos t\sin t + 3\sin^2 t - 3\cos^2 t - \sin t + \cos t \quad , t\in[0,2\pi]$$

Λύνω την εξίσωση $F'(t)=0$ στο $(0,2\pi)$ π.χ με MATLAB. και ελέγχω αν οι λύσεις ανήκουν στο $(0,2\pi)$. Έτσι θα έχω κρίσιμα σημεία των οποίων βρίσκω την τιμή.

$\{0,2\pi\}$: $F(0) = 2\cos^2 0 - \sin^2 0 - 3\cos 0\sin 0 + \cos 0 + \sin 0$

$= 2 - 0 - 0 + 1 + 0 = 3$

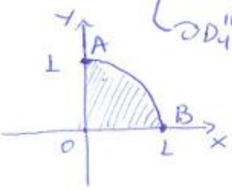
$F(2\pi) = 2\cos^2 2\pi - \sin^2 2\pi - 3\cdot\cos 2\pi\sin 2\pi + \cos 2\pi + \sin 2\pi = 3$

Η μικρότερη από όλες αυτές θα είναι το ελάχιστο και η μεγαλύτερη θα είναι το μέγιστο.

B) Είναι: $D_4 = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1 \,,\, 0\le x\le 1 \,,\, 0\le y\le 1\}$

$D_4^{\circ} = \{(x,y): x^2+y^2 < 1 \,,\, 0<x<1 \,,\, 0<y<1\}$

$$\partial D_4 = \begin{cases} \partial D_4' = \{(x,y): x^2+y^2=1 \,,\, 0<x<1 \,,\, 0<y<1\} \to (AB)-\{A,B\} \\ \partial D_4'' = \{(x,y): x=0 \text{ και } 0\le y\le 1\} \to OA \\ \partial D_4''' = \{(x,y): y=0 \text{ και } 0\le x\le 1\} \to OB \end{cases}$$



— Κρίσιμα σημεία στο D_4°:
Ότι κάναμε για το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου και βρίσκουμε κρίσιμο σημείο το $\left(\frac{1}{17}, \frac{7}{17}\right)$ που ανήκει στο χωρίο, και το οποίο αντιστοιχεί σε σημείο "σαμαριού"

```
solve('-6*cos(t)*sin(t)+3*sin(t)*sin(t)-3*cos(t)*cos(t)-sin(t)+cos(t) = 0')
```

· <u>Για το σύνορο :</u>

— Περιορίζω την f στο τόξο AB

$\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}] \to (\cos t, \sin t)$

Κάνω τις ίδιες πράξεις όπως στο A ερώτημα μόνο που οι λύσεις της εξίσωσης $F'(t)=0$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ στα άλλα τεταρτημόρια απορρίπτονται.

Βρίσκω τις τιμές της F στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα 0, $\frac{\pi}{2}$

$F(0)=3$ και $F(\frac{\pi}{2})=0$

— Περιορίζω την f στο OB :

Θέτω: $y=0$ και $0 \le x \le 1$

$f(x) = 2x^2+x$, $0 \le x \le 1$ και βρίσκω ακρότατα.

$f'(x) = 4x+1$, $0<x<1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$ (απορρίπτεται)

Στα άκρα: $f(0)=0$, $f(1)=3$

— Περιορίζω την f στο OA :

Θέτω: $x=0$ και $0 \le y \le 1$

Οπότε: $f(y) = -y^2+y$, $0 \le y \le 1$

$f'(y) = -2y+1$, $0<y<1$

$f'(y)=0 \Leftrightarrow -2y+1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \in (0,1)$. Είναι $f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Στα άκρα: $f(0)=0$, $f(1)=0$

Από την σύγκριση των παραπάνω τιμών βρίσκω το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο για το σύνορο.

Άσκηση 3 → 1ο ζητούμενο

Είναι: $f(x,y,z)=x^2+y^2-z-2=0$

Έστω $M(x,y,z)$ ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια: $x^2+y^2-z=2$

Αρκεί να βρώ το min της $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$

Θεωρώ την συνάρτηση $d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

Οπότε αρκεί να βρω το ελάχιστο της d.

$\nabla d=\langle 2x,2y,2z\rangle$

$\nabla f=\langle 2x,2y,-1\rangle$

Θα πρέπει: $\begin{cases}\nabla d(x,y,z)=\lambda\nabla f(x,y,z)\\ x^2+y^2-z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\langle 2x,2y,2z\rangle=\lambda\langle 2x,2y,-1\rangle\\ x^2+y^2-z=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x=2\lambda x\\ 2y=2\lambda y\\ 2z=-\lambda\\ x^2+y^2-z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\lambda-1)x=0\\ (\lambda-1)y=0\\ z=-\frac{\lambda}{2}\\ x^2+y^2-z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1 \text{ ή } x=0\\ \lambda=1 \text{ ή } y=0\\ z=-\frac{\lambda}{2}\\ x^2+y^2-z=2 \quad (3)\end{cases}$

— Για $\lambda=1 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$. Οπότε από (3) $\Rightarrow x^2+y^2=2-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{3}{2}$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία (x,y) που ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα το $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Οπότε $d(x,y,z)=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

— Για $\lambda=1$ και $y=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$ και από (3) $\Rightarrow x^2+0^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

$\Rightarrow x^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Κρίσιμα σημεία είναι: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0,-\frac{1}{2}\right)$ και $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0,-\frac{1}{2}\right)$

Οπότε $d\left(\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0,-\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

$d\left(\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0,-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{7}{4}$

— Για $x=0$ και $\lambda=1 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$ και από ③ $\Rightarrow 0^2+y^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

$\Rightarrow y^2=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Κρίσιμα σημεία είναι: $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{2}\right)$ και $\left(0,-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{2}\right)$

Οπότε: $d\left(\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{2}\right)\right)=0^2+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

$d\left(\left(0,-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{7}{4}$

— Για $x=0$ και $y=0$. Οπότε από ③ $\Rightarrow 0^2+0^2-\left(-\frac{\lambda}{2}\right)=2$

$\Rightarrow \frac{\lambda}{2}=2 \Rightarrow \lambda=4$. Άρα $z=-\frac{4}{2}=-2$

Οπότε κρίσιμο σημείο: $(x,y,z)=(0,0,-2)$

$d((0,0,-2))=0^2+0^2+(-2)^2=4$

Άρα η απόσταση της επιφάνειας: $x^2+y^2-z=2$ από το $O(0,0,0)$ είναι: $\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2ο ζητούμενο

Αν $P(x_0,y_0,z_0)$ ένα τέτοιο σημείο τότε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό θα έχει εξίσωση:

$\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle\cdot\langle 1,1,-1\rangle=0 \Leftrightarrow x-x_0+y-y_0+(z-z_0)(-1)=0$

$\Leftrightarrow x-x_0+y-y_0-z+z_0=0 \Leftrightarrow x+y-z=x_0+y_0-z_0$ (1)

Είναι: $x^2+y^2-z=2 \Rightarrow z=f(x,y)=x^2+y^2-2$

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$ της επιφάνειας είναι:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\Leftrightarrow z-z_0=2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0) \Leftrightarrow 2x_0x-2x_0^2+2y_0y-2y_0^2=z-z_0$

$\Leftrightarrow 2x_0x+2y_0y-z=2x_0^2+2y_0^2-z_0$ (2)

Συγκρίνοντας την ① και ② παίρνω:

$2x_0 = 1$ και $2y_0 = 1 \Rightarrow x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$

Όμως το (x_0, y_0, z_0) θα πρέπει να ικανοποιεί την: $x^2+y^2-z=2$

Οπότε: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - z_0 = 2 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \Rightarrow z_0 = -\frac{3}{2}$

Άρα υπάρχει κατάλληλο σημείο της επιφάνειας ώστε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας να έχει κάθετο διάνυσμα το $[1,1,-1]$ και αυτό είναι το: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Άσκηση 4

Ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(1,1,1)$: $\min\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$

Ισοδύναμα ελαχιστοποιώ την $d(x,y,z) = (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

Ορίζω $L(x,y,z) = 2x+y+z-1$ και $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-8$

$\nabla d = \langle 2(x-1), 2(y-1), 2(z-1) \rangle$

$\nabla L = \langle 2, 1, 1 \rangle$

$\nabla G = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$

Θα πρέπει να ισχύουν: $\begin{cases} \nabla d = \lambda_1 \nabla L + \lambda_2 \nabla G \\ L(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle 2x-2, 2y-2, 2z-2 \rangle = \lambda_1 \langle 2,1,1 \rangle + \lambda_2 \langle 2x, 2y, 2z \rangle \\ 2x+y+z-1 = 0 \\ x^2+y^2+z^2-8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 2y-2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ 2z-2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 z \\ 2x+y+z-1 = 0 \\ x^2+y^2+z^2-8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda_2)x = \lambda_1 + 1 & (1) \\ (2-2\lambda_2)y = \lambda_1 + 2 & (2) \\ (2-2\lambda_2)z = \lambda_1 + 2 & (3) \\ 2x+y+z-1 = 0 & (4) \\ x^2+y^2+z^2-8 = 0 & (5) \end{cases}$$

. Από ②,③ $\Rightarrow (2-2\lambda_2)y = (2-2\lambda_2)z$

— Για $\lambda_2 \neq 1 \Rightarrow \boxed{y=z}$

Από ④,⑤ $\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+y-1=0 \\ x^2+y^2+y^2-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=1 \\ x^2+2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ x^2+2y^2=8 \end{cases}$

Από $x^2+2y^2=8 \xRightarrow{\boxed{y=\frac{1}{2}-x}} x^2+2\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=8 \Rightarrow x^2+2\left(\frac{1}{4}+x^2-x\right)=8$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{2}+2x^2-2x=8 \Rightarrow 3x^2-2x+\frac{1}{2}-8=0 \Rightarrow 6x^2-4x+1-16=0$

$\Rightarrow 6x^2-4x-15=0$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 6\cdot(-15)=16+360=4(4+90)$

Άρα $x=\frac{-(-4)\pm 2\sqrt{94}}{2\cdot 6}=\frac{4\pm 2\sqrt{94}}{2\cdot 6}=\frac{2\pm\sqrt{94}}{6}$

Για $x=\frac{2+\sqrt{94}}{6}=1{,}95$ έχω: $y=\frac{1}{2}-\frac{2+\sqrt{94}}{6}=\frac{3-2-\sqrt{94}}{6}=\frac{1-\sqrt{94}}{6}\simeq -1{,}45$

$z=\frac{1-\sqrt{94}}{6}=-1{,}45$

Άρα $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(1{,}95-1)^2+(-1{,}45-1)^2\,2}$

$=\sqrt{(0{,}95)^2+2\cdot(-2{,}45)^2}\simeq\sqrt{0{,}9+12}=\sqrt{12{,}9}\simeq 3{,}59$

Για $x=\frac{2-\sqrt{94}}{6}=-1{,}2825$ έχω: $y=\frac{1}{2}-\frac{2-\sqrt{94}}{6}=\frac{3-2+\sqrt{94}}{6}=\frac{1+\sqrt{94}}{6}\simeq 1{,}7825$

$z=\frac{1+\sqrt{94}}{6}\simeq 1{,}7825$

Άρα για το σημείο $(x,y,z)=(-1{,}2825,\ 1{,}7825,\ 1{,}7825)$ είναι:

$d=\sqrt{(-1{,}2825-1)^2+(1{,}7825-1)^2+(1{,}7825-1)^2}=\sqrt{(-2{,}2825)^2+2\cdot(0{,}7825)^2}$

$\simeq\sqrt{5{,}2+1{,}2}\simeq\sqrt{6{,}4}\simeq 2{,}52$

— Για $\lambda_2=1$ από ② $\Rightarrow \lambda_1=-2$. Οπότε από ① $\Rightarrow 0x=-2+1$ (Αδύνατη)
Οπότε σ' αυτήν την περίπτωση δεν έχω σημείο για το οποίο έχω ελάχιστη απόσταση.

Άρα το σημείο με την μικρότερη απόσταση είναι το $\left(\frac{2-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right)$

Bonus: Είναι: $z = h(x,y) = 2x+2y-x^2-y^2$, $x\in[0,2]$, $y\in[0,2]$

Ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(0,0,0)$: $\min\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$

Ισοδύναμα ελαχιστοποιώ την $d(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $x\in[0,2]$, $y\in[0,2]$

Είναι: $|OP| = |PA| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2} = \cancel{x^2}+4-4x+\cancel{y^2}+4-4y+\cancel{z^2} \Leftrightarrow 4x+4y=8 \Leftrightarrow$

$\underbrace{x+y-2}_{g(x,y)} = 0$

Θα πρέπει:
$$\begin{cases} \nabla d(P) = \lambda_1 \nabla h(P) + \lambda_2 \nabla g(P) \\ x+y-2=0 \\ 2x+2y-x^2-y^2-z=0 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle 2x, 2y, 2z\rangle = \lambda_1\langle 2-2x, 2-2y, -1\rangle + \lambda_2\langle 1, 1, 0\rangle \\ x+y-2=0 \\ 2x+2y-x^2-y^2-z=0 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda_1(2-2x)+\lambda_2 \\ 2y = \lambda_1(2-2y)+\lambda_2 \\ 2z = -\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 \\ x+y-2=0 \\ 2x+2y-x^2-y^2-z=0 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda_1 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 2y = 2\lambda_1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z = -\lambda_1 \\ x+y-2=0 \\ 2x+2y-x^2-y^2-z=0 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2\lambda_1 x = 2\lambda_1+\lambda_2 \\ 2y+2\lambda_1 y = 2\lambda_1+\lambda_2 \\ z = -\frac{1}{2}\lambda_1 \\ x+y-2=0 \\ 2x+2y-x^2-y^2-z=0 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+2\lambda_1)x = (2+2\lambda_1)y & (1) \\ z = -\frac{1}{2}\lambda_1 & (2) \\ x+y-2=0 & (3) \\ 2x+2y-x^2-y^2-z=0 & (4) \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

— Για $\lambda_1 \neq -1$ από ① $\Rightarrow x = y$ ⑤

Από ③,④ και ⑤ έχω: $\begin{cases} x + x - 2 = 0 \\ 2x + 2x - x^2 - x^2 - (-\frac{1}{2}\lambda_1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & ⑥ \\ 4x - 2x^2 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0 & ⑦ \end{cases}$

Από ⑥,⑦ $\Rightarrow 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 \neq -1$

Οπότε: $x = 1$, $y = 1$, $z = -\frac{1}{2}(-4) = 2$

Κρίσιμο σημείο είναι το $(1, 1, 2)$

— Για $\lambda_1 = -1$ από ① $\Rightarrow 0x = 0y$ (που ισχύει)

Από ② $\Rightarrow z = -\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$

Από ③,④ $\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y - x^2 - y^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x & ⑧ \\ 2x + 2y - x^2 - y^2 - \frac{1}{2} = 0 & ⑨ \end{cases}$

Από ⑧,⑨ $\Rightarrow 2x + 2(2-x) - x^2 - (2-x)^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 - 2x - x^2 - (4 - 4x + x^2) - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{4} - x^2 - \cancel{4} + 4x - x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 8x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 1 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 64 - 16 = 48 > 0$

$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

Για $x = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \in [0,2]$ έχω $y = 2 - \frac{2+\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \in [0,2]$

Κρίσιμο σημείο είναι το $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Για $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \in [0,2]$ έχω: $y = 2 - \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \in [0,2]$

Κρίσιμο σημείο είναι το $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα: $(1,1,2)$, $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ποιό είναι όμως το σημείο για το οποίο έχω ελάχιστο;

Θα πρέπει να εξετάσω την απόσταση του καθενός από το $(0,0,0)$ ή ισοδύναμα την τιμή $d(x,y,z)$.

$$d(1,1,2) = 1^2+1^2+2^2 = 6$$

$$d\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4+3+4\sqrt{3}}{4} + \frac{4+3-4\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8+6+1}{4} = \frac{15}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$d\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3,5$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία στα οποία έχω ελάχιστο είναι τα:

$P\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $P\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$