Άσκηση 1

α). $<x, y, z> = <1, 2, 3> + t*<0, 1, 1>$

$<x, y, z> = <1, 1, 1> + s*<1, 1, 1>$

$<x, y, z> = <0, 2, 3> + u*<1, 0, 0>$

$x_1 = 1 + t*0$	$x_2 = 1 + s*1$	$x_3 = 0 + u*1$
$y_1 = 2 + t*1$	$y_2 = 1 + s*1$	$y_3 = 2 + u*0$
$z_1 = 3 + t*1$	$z_2 = 1 + s*1$	$z_3 = 3 + u*0$

Για να υπάρχει το σημείο τομής των ευθειών θα πρέπει οι επιμέρους συντεταγμένες να είναι ίσες.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 \\ y_1 = y_2 = y_3 \\ z_1 = z_2 = z_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + 0 = 1 + s = u \\ 2 + t = \boxed{1 + s = 2} \\ 3 + t = \boxed{1 + s = 3} \end{array} \Longleftrightarrow$$

Αδύνατο άρα δεν υπάρχει σημείο τομής.

β). $x + y + z = 1$

$<x, y, z> = <1, 2, 3> + t<0, 1, 1>$

$<x, y, z> = <1, 2, 3> + u<1, 0, 0>$

$$\left.\begin{array}{l|l} x_1 = 1 + t*0 & x_2 = 1 + u*1 \\ y_1 = 2 + t*1 & y_2 = 2 + u*0 \\ z_1 = 3 + t*1 & z_2 = 3 + u*0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \cancel{1} = \cancel{1} + u \\ \cancel{2} + t = \cancel{2} \\ \cancel{3} + t = \cancel{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} u = 0 \\ \\ t = 0 \end{array}$$

Άρα το σημείο τομής των 2 είναι το $<1, 2, 3>$ και τώρα θα δούμε αν τέμνεται με το επίπεδο.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ <1, 2, 3> \end{array}\right\} 1 + 2 + 3 = 1 \quad \Rightarrow$$

Αδύνατο άρα δεν τέμνονται.

Άσκηση 2

Είναι $\vec{AB} = \langle 2-1, 2-1, 2-1 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$

Ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{AB}$ είναι το $\vec{u} = \langle 2, -2, 0 \rangle$

Αν $Q(x, y, z)$ ένα σημείο που δεν βρίσκεται στην ευθεία AB τότε ορίζεται μοναδικό επίπεδο. Θεωρώ ένα διάνυσμα $\vec{u}$ κάθετο στο επίπεδο αυτό.

Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $\vec{u} = \langle 2, -2, 0 \rangle$

Θα πρέπει: $\vec{u} \cdot \vec{AQ} = 0 \Rightarrow \langle 2, -2, 0 \rangle \cdot \langle x-1, y-1, z-1 \rangle = 0 \Rightarrow$

$2(x-1) + (-2)(y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow 2x \cancel{-2} - 2y \cancel{+2} = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0$

Άρα ένα επίπεδο στο οποίο ανήκει το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι το $2x - 2y = 0$

Αν $M(x, y, z)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB τότε θα πρέπει: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} \Rightarrow \langle x-1, y-1, z-1 \rangle = \frac{1}{2}\langle 1, 1, 1 \rangle$

$\Rightarrow x-1 = \frac{1}{2}, \ y-1 = \frac{1}{2}, \ z-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \ y = \frac{3}{2}, \ z = \frac{3}{2}$

Άρα $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Θεωρώ ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ στο χώρο.

Η ζητούμενη ευθεία θα περνάει από το γνωστό σημείο $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ και θα είναι παράλληλη στο $\vec{v}$.

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η: $\langle x, y, z \rangle = \langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle + t\langle 1, 2, 3 \rangle$

Άσκηση 3

α) Έχουμε $\vec{w} = \langle x, y, z \rangle$ με $|\vec{w}| = 1$ και $\vec{w} \parallel \vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

Είναι $\vec{w} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = t\vec{v} \Rightarrow \langle x, y, z \rangle = \langle t, t, t \rangle \Rightarrow x = y = z = t$ ✓

$|\vec{w}| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \Leftrightarrow 3t^2 = 1 \Leftrightarrow t^2 = 1/3 \Rightarrow t = \pm 1/\sqrt{3}$

Άρα τα ζητούμενα διανύσματα είναι $\langle 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \rangle$, $\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3} \rangle$

β) Έχουμε $\vec{w} = \langle x, y \rangle$, με $|\vec{w}| = 2$ και $\vec{w} \parallel x + y = 1$

Είναι $\vec{w} \perp \vec{v} = \langle 1, 1 \rangle \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ ✓

$|\vec{w}| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + (-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Άρα τα ζητούμενα διανύσματα είναι $\langle \sqrt{2}, -\sqrt{2} \rangle$, $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$

Άσκηση 4

Από τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 έχουμε:

(1) $x=1$, (2) $y=2+t$, (3) $z=3+t$

(4) $x=1+u$, (5) $y=2$, (6) $z=3$

Από (1) και (4) έχω: $1+u=1 \Rightarrow u=0$

Από (2) και (5) έχω: $2+t=2 \Rightarrow t=0$

Από (3) και (6) έχω: $3+t=3 \Rightarrow t=0$ που ισχύει

Άρα $u=0$ και $t=0$ έχω: $x=1$, $y=2$, $z=3$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι το $A(1,2,3)$

Έστω $B(x,y,z)$ είναι σημείο της ε_1, οπότε: $|\vec{AB}|=2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ (7)

Ακόμη θα πρέπει: $x=1$, $y=2+t$, $z=3+t$ (8)

Από (7) και (8) έχω: $(1-1)^2+(2+t-2)^2+(3+t-3)^2=4 \Rightarrow t^2+t^2=4$

$\Rightarrow 2t^2=4 \Rightarrow t^2=2 \Rightarrow t=\sqrt{2}$ αφού $t \geq 0$

Για $t=\sqrt{2}$ είναι: $x=1$, $y=2+\sqrt{2}$, $z=3+\sqrt{2}$. Άρα $B(1, 2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$

Έστω $\Gamma(\alpha,b,c)$ είναι σημείο της ε_2, οπότε: $|\vec{B\Gamma}|=2$

$\Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2+(b-2-\sqrt{2})^2+(c-3-\sqrt{2})^2}=2 \Rightarrow (\alpha-1)^2+(b-2-\sqrt{2})^2+(c-3-\sqrt{2})^2=4$ (9)

Αφού $\Gamma(\alpha,b,c) \in \varepsilon_2$ έχουμε: $\alpha=1+u$, $b=2$, $c=3$ (10)

Από (9) και (10) έχω: $(1+u-1)^2+(2-2-\sqrt{2})^2+(3-3-\sqrt{2})^2=4$

$\Rightarrow u^2+2+2=4 \Rightarrow u^2=0 \Rightarrow u=0$

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα γιατί $B \equiv A$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $E(AB\Gamma)=0$

Άσκηση 5 20/20

(ε) $x = t$

$y = 1 + \alpha t$

$z = 1 + bt$

$(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, a, b)$

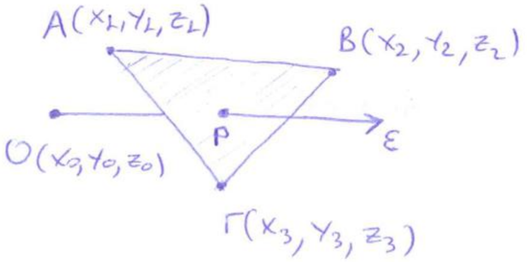
$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} t = 1 \\ 1+\alpha t = 2 \\ 1+bt = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 + \alpha = 2 \\ 1 + b = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ b = 2 \end{array}$$

$(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, 1, 2)$

$0(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} 0_x = 0 + t \\ 0_y = 1 + t \\ 0_z = 1 + 2t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \\ t = -1/2 \end{array}\right\} \text{Αδύνατη}$$

Άσκηση BONUS



$(\varepsilon):\ \langle x,y,z\rangle = \langle x_0,y_0,z_0\rangle + t\langle \alpha,b,c\rangle,\ t\geq 0$

Για να περνά η ημιευθεία μέσα από το τρίγωνο ΑΒΓ θα πρέπει να κόβει το τρίγωνο σε ένα σημείο, έστω P εσωτερικό του τριγώνου.

Αρχικά θα βρούμε το σημείο $P(x,y,z)$ που είναι το σημείο τομής της ημιευθείας και του επιπέδου.

Αρκεί να λύσω το σύστημα των δύο εξισώσεων:

της ημιευθείας: $\langle x,y,z\rangle = \langle x_0,y_0,z_0\rangle + t\langle \alpha,b,c\rangle,\ t\geq 0$ (1)

και του επιπέδου: $\vec{AP}\cdot(\vec{AB}\times\vec{A\Gamma})=0$ (2)

Από (1) $\Rightarrow x=x_0+\alpha t,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct$

Από (2) $\Rightarrow \langle x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\rangle \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \dots \Leftrightarrow$

$$t=\frac{(x_1-x_0)[(y_2-y_1)z_3+(y_1-y_3)z_2+(y_3-y_2)z_1]+(y_1-y_0)[(x_2-x_3)z_1+(x_3-x_1)z_2+(x_1-x_2)z_3]+(z_1-z_0)[(x_3-x_2)y_1+(x_1-x_3)y_2+(x_2-x_1)y_3]}{\alpha[(y_2-y_1)z_3+(y_1-y_3)z_2+(y_3-y_2)z_1]+b[(x_2-x_3)z_1+(x_3-x_1)z_2+(x_1-x_2)z_3]+c[(x_3-x_2)y_1+(x_1-x_3)y_2+(x_2-x_1)y_2]}$$

Το σημείο για $t>0$ που βρήκα είναι: $P(x_0+t\alpha,\ y_0+tb,\ z_0+tc)$

Γνωρίζω ότι αν θεωρήσω το σημείο A ως σημείο αναφοράς κάθε άλλο σημείο του επιπέδου που ορίζουν τα A, B, Γ μπορεί να καθοριστεί ως το πέρας του $\vec{AP}$ που είναι γραμμικός συνδυασμός δύο γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων του επιπέδου τα οποία τα θεωρώ βάση.

Άρα θα πρέπει να υπάρχουν $u, v \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{AP} = u\vec{A\Gamma} + v\vec{AB}$

Όμως για να είναι το P εσωτερικό του τριγώνου ABΓ θα πρέπει: $u>0$, $v>0$ και $u+v<1$. Διαφορετικά το σημείο θα βρίσκεται εκτός τριγώνου. Αν βρω τα u, v συναρτήσει των $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \alpha, b, c$ έχω τελειώσει.

Είναι $\vec{AP} = u\vec{A\Gamma} + v\vec{AB}$ (3)

Από (3) $\Rightarrow \begin{cases} \vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma} = (u\vec{A\Gamma}+v\vec{AB})\cdot\vec{A\Gamma} \\ \vec{AP}\cdot\vec{AB} = (u\vec{A\Gamma}+v\vec{AB})\cdot\vec{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma} = u\vec{A\Gamma}^2 + v\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} \\ \vec{AP}\cdot\vec{AB} = u\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB} + v\vec{AB}^2 \end{cases}$ (4)

Έχω δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους τα u, v

$$\begin{array}{r} -\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB} \\ \vec{A\Gamma}^2 \end{array}\begin{cases} u\vec{A\Gamma}^2 + v\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = \vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma} \\ u\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB} + v\vec{AB}^2 = \vec{AP}\cdot\vec{AB} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -(\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB})u\vec{A\Gamma}^2 - v(\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})(\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}) = -(\vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma})(\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}) \\ u(\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB})\cdot(\vec{A\Gamma}^2) + v(\vec{AB}^2)\vec{A\Gamma}^2 = (\vec{AP}\cdot\vec{AB})\cdot\vec{A\Gamma}^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$v[\vec{AB}^2\vec{A\Gamma}^2 - (\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})^2] = -(\vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma})\cdot(\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}) + (\vec{AP}\cdot\vec{AB})\cdot\vec{A\Gamma}^2$$

Άρα $v = \dfrac{\vec{A\Gamma}^2\cdot(\vec{AP}\cdot\vec{AB}) - (\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB})(\vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma})}{\vec{A\Gamma}^2\cdot\vec{AB}^2 - (\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})^2}$

Αν θέσω το v στην (4) έχω:

$$u = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma} - v\,\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}}{\vec{A\Gamma}^2} = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma} - \dfrac{\vec{A\Gamma}^2\cdot(\vec{AP}\cdot\vec{AB}) - (\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB})(\vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma})}{\vec{A\Gamma}^2\cdot\vec{AB}^2 - (\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})^2}\cdot\vec{AB}\cdot\vec{AP}}{\vec{A\Gamma}^2}$$

$$= \dots = \frac{\vec{AB}^2\cdot(\vec{AP}\cdot\vec{A\Gamma}) - (\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})(\vec{AP}\cdot\vec{AB})}{\vec{A\Gamma}^2\cdot\vec{AB}^2 - (\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB})(\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})}$$

Τα u και v εξαρτώνται από τα $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ (δεν τα αντικαθιστώ γιατί θα έχω πολύ μεγάλη παράσταση) και θα πρέπει $0<u<1$, $0<v<1$ και $u+v<1$.