ΗΥ-111, Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Εαρινό Εξάμηνο 2009-10
Διδάσκων: Κώστας Παναγιωτάκης
3^{η} Σειρά Ασκήσεων
Ημερομηνία Παράδοσης: 17-5-2010 (στο μάθημα)

Γενικές Οδηγίες

• Προαιρετικά, μπορείτε να κάνετε χρήση του Matlab, για γραφικές παραστάσεις.

Άσκηση 1 (30%)
Έστω $f(x,y) = 1+xy$ $(x,y)\epsilon S$. Να υπολογιστεί ο όγκος κάτω από το γράφημα της $f(x,y)$.
α) S: το εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, Α(0,0) Β(0,1), Γ(1,0), Δ(1,1).
β) S: το εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΔ, Α(0,0) Β(0,1), Δ(1,1).
γ) S: το χωρίο που φράσεται πάνω από γράφημα της $y=1+x$ και κάτω $y= x^2$, $(x,y \geq 0)$.

Άσκηση 2 (20%)
Έστω $f(x,y) = x^2-y^2$, $(x,y)\epsilon S$. Να υπολογιστεί ο συνολικός όγκος κάτω από το γράφημα της $f(x,y)$.
S: το εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, Α(-1,-1) Β(1,-1), Γ(1,1), Δ(1,-1).

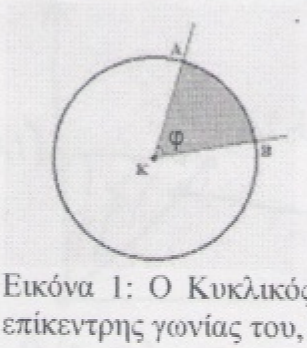
Άσκηση 3 (30%)
Έστω $f(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y)\epsilon S$, S: το εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, Α(0,0).
Α) Να βρεθούν εάν υπάρχουν σημεία Β, Γ ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα τα παρακάτω.
1. Ο όγκος κάτω από το γράφημα της $f(x,y)$ να είναι 1.
2. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να είναι 1.

Β) Να βρεθούν σημεία Β, Γ ώστε ο όγκος κάτω από το γράφημα της $f(x,y)$ να είναι μέγιστος με το περιορισμό πως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να είναι 1.
Στα παραπάνω ερωτήματα αρκεί να βρείτε μία λύση.

Άσκηση 4 (20%)
Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και περικλείεται πάνω από την και $x^2+y^2 \leq 4$ και κάτω από το επίπεδο $x+y+z =10$.

Bonus: (+10%)
$f(x,y) = 4*x^2+y^2$, $(x,y)\epsilon S$
S: ο κυκλικός δίσκος κέντρου O(0,0) και ακτίνας 1.

Να υπολογιστούν οι διαδοχικές γωνίες φ_1, φ_2, φ_3 $(\varphi_1+ \varphi_2+\varphi_3 = 2\pi)$ ώστε να χωριστεί ο κυκλικός δίσκος S σε 3 κυκλικούς τομείς γωνιών φ_1, φ_2, φ_3 σε καθένα από τους οποίους ο όγκος κάτω από το γράφημα της $f(x,y)$ να είναι ο ίδιος.

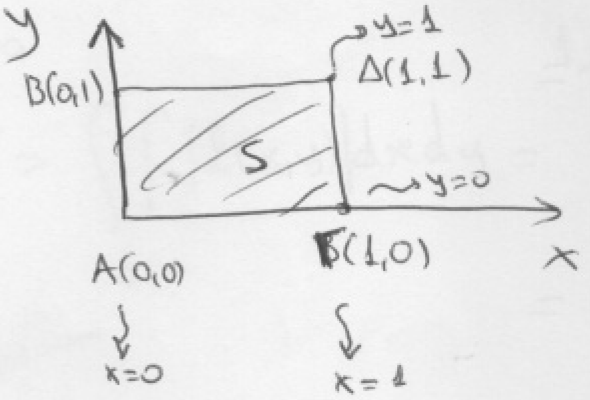


Εικόνα 1: Ο Κυκλικός τομέας αποτελείται από τα κοινά σημεία ενός κυκλικού δίσκου και μίας επίκεντρης γωνίας του, όπως είναι το γραμμοσκιασμένο σύνολο της εικόνας.

ηση 1 (1)

$f(x,y) = 1 + xy, \ (x,y) \in S$

a) $S:$ $A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma(1,0)$, $\Delta(1,1)$



$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1\}$

$|f(x,y)| = |1+xy| = 1+xy$
επειδή $(x,y) \in S$
~~οπότε~~ $\Rightarrow x,y > 0$

$V = \iint_S |f(x,y)| \, dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (1+xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (1+xy)\,dy \right) dx$

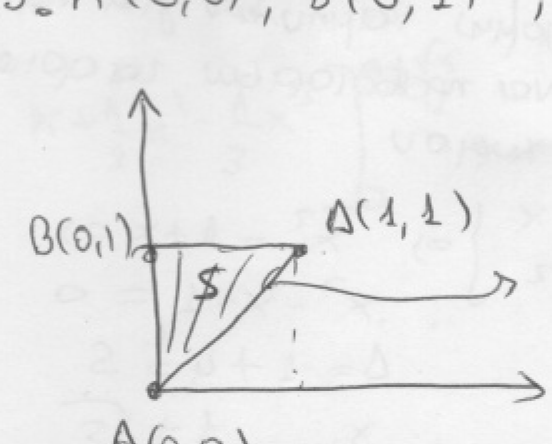
$= \int_0^1 \left[\int_0^1 dy + \int_0^1 xy\,dy \right] dx =$

$= \int_0^1 \left(y\Big]_0^1 + x\frac{1}{2}y^2\Big]_0^1 \right) dx = \int_0^1 \left[(1 - 0) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \cdot 0 \right) \right] dx =$

$= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}x\right) dx = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 \Big]_0^1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

b) $S:$ $A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Delta(1,1)$

$(x,y) \in S \Rightarrow x,y \ge 0$
Άρα $|f(x,y)| = |1+xy|$
$= 1+xy$



$y = ax + b \ \overset{A(0,0)}{\Rightarrow} \ 0 = a\cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$

$\overset{\Delta(1,1)}{\Longrightarrow} \ 1 = a \cdot 1 \Longrightarrow a = 1$

$\boxed{y = x}$

$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 1 \}$

$V = \iint_S |f(x,y)| \, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 (1+xy)\,dy \right) dx = \longrightarrow$

$$= \int_0^1 \left(\int_x^1 dy + \int_x^1 xy\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(y \Big]_x^1 + x \frac{1}{2} y^2 \Big]_x^1 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left((1-x) + \left(x\frac{1}{2} - x\frac{1}{2}x^2 \right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3 \right) dx =$$

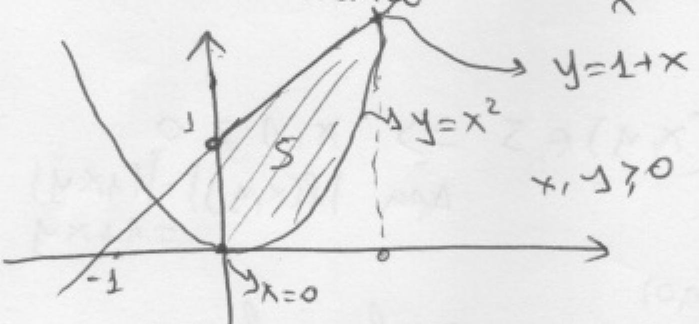
$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3 \right) dx = \left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 \right) \Big]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

γ) S: πανω $y = 1+x$

κατω x^2

$x, y \geq 0 \Rightarrow |f(x,y)| = |1+xy| = 1+xy$



Σημεια τομης καμπυλων για να μπορεσω να προσδιορισω τα ορια x του χωριου

$$\left.\begin{aligned} y &= 1+x \\ y &= x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = 1+x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ομως $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ Οποτε

$$\boxed{0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad \boxed{x^2 \leq y \leq 1+x}$$

②

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; x^2 \le y \le 1+x \}$$

Άρα

$$V = \iint_S |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(\int_{x^2}^{1+x} (1+xy)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(y \Big]_{x^2}^{1+x} + x \frac{1}{2} y^2 \Big]_{x^2}^{1+x} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left((1+x) - x^2 + \frac{1}{2} x (1+x)^2 - x \cdot \frac{1}{2} x^4 \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} 1+x-x^2+\frac{1}{2}x(x+1)^2 - \frac{1}{2}x^5 =$$

$$= \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (1+x-x^2)\,dx + \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{2}(x+1)(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)^2\,dx - \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{2}x^5\,dx$$

$$= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 \Big]_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(\frac{1}{2}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 \right) d(x+1) - \frac{1}{2}\frac{1}{6}x^6 \Big]_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

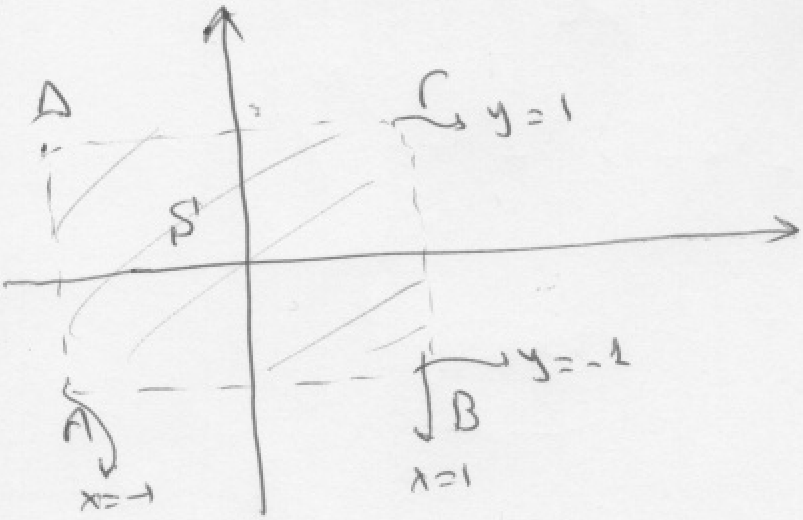
$$= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 \Big]_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(x+1)^4 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}(x+1)^3 \right) \Big]_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{12}x^6 \Big]_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

πράξεις...

Άσκηση 2

$f(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \ (x,y) \in S$

$S: \ A(-1,1), B(1,-1), \Gamma(1,1), \Delta(1,-1)$



$V = \iint_S |f(x,y)| \, dx\, dy$

$|f(x,y)| = |x^2 - y^2|$

Όμως $\begin{matrix} -1 \le x \le 1 \sim 0 \le x^2 \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \sim 0 \le y^2 \le 1 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \le x^2 \le 1 \\ -1 \le -y^2 \le 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow$

$-1 \le x^2 - y^2 \le 1$

Άρα $\exists$ (x,y) για τα οποία η $f(x,y) < 0$ και

επομένως πρέπει για τις τιμές αυτές $|f(x,y)| = -f(x,y)$

$A = |x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)|$

συνδιασμοί (1) $+ \quad + \quad \Rightarrow A = x^2 - y^2 = f(x,y)$

(2) $+ \quad - \quad \Rightarrow A = -(x^2 - y^2) = -f(x,y)$

(3) $- \quad + \quad \Rightarrow A = -(x^2 - y^2) = -f(x,y)$

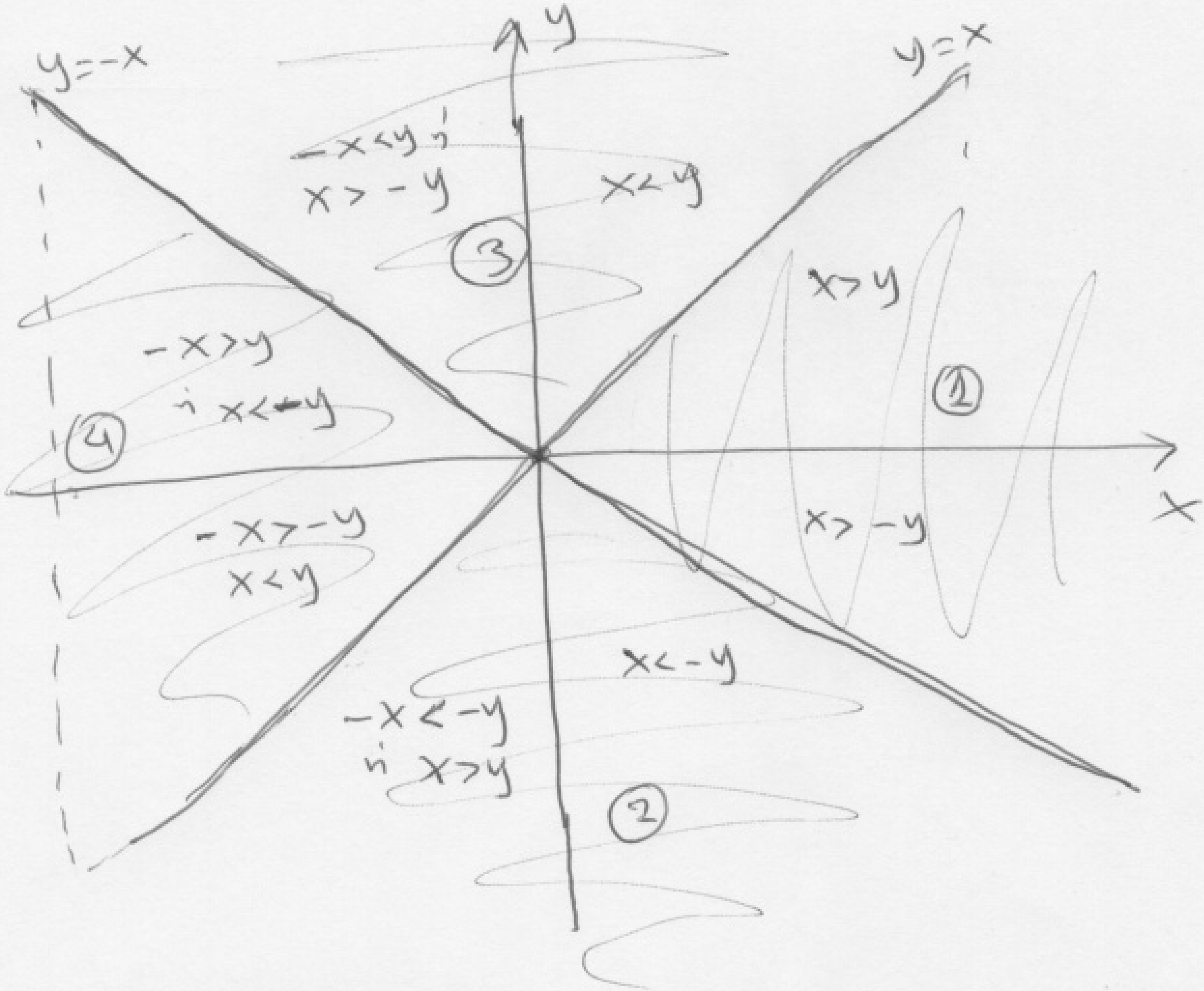
(4) $- \quad - \quad \Rightarrow A = x^2 - y^2 = f(x,y)$

(1) $\Rightarrow \begin{matrix} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x > y \\ x > -y \end{matrix}}$ (1)

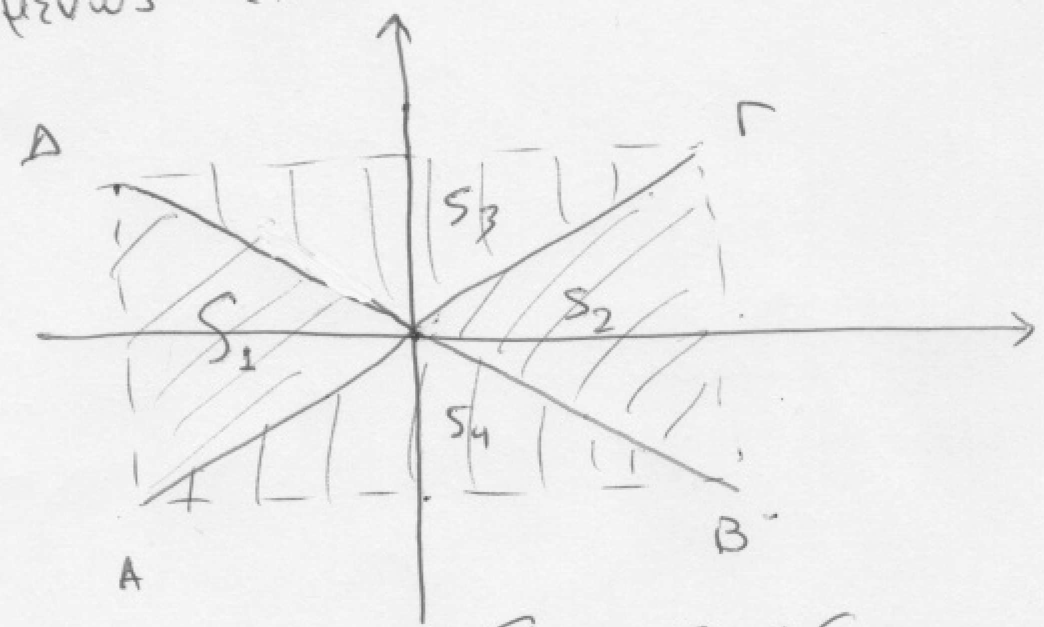
(2) $\Rightarrow \begin{matrix} x - y > 0 \\ x + y < 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x > y \\ x < -y \end{matrix}}$ (2)

(3) $\Rightarrow \begin{matrix} x - y < 0 \\ x + y > 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x < y \\ x > -y \end{matrix}}$ (3)

(4) $\Rightarrow \begin{matrix} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x < y \\ x < -y \end{matrix}}$ (4)



Επομένως έχω



$S_A = S_1 \cup S_2$ $\quad$ $S_B = S_3 \cup S_4$

$S_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, \ x \le y \le -x \}$

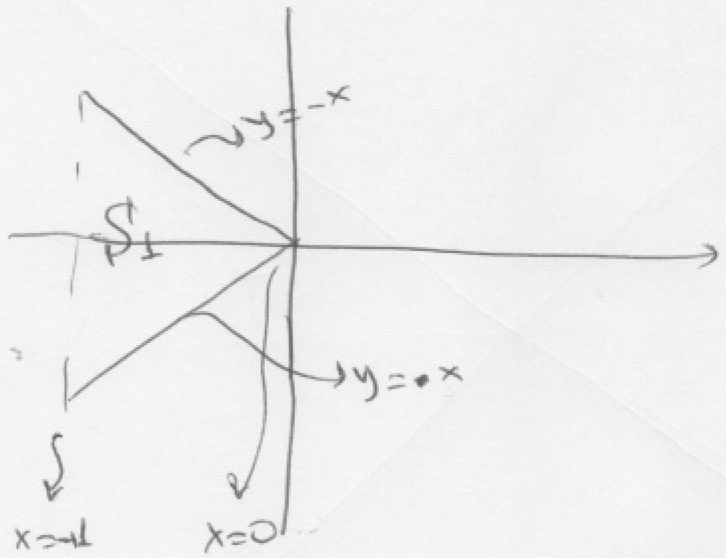
$S_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -x \le y \le +x \}$

$S_4 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 0, \ y \le x \le -y \}$

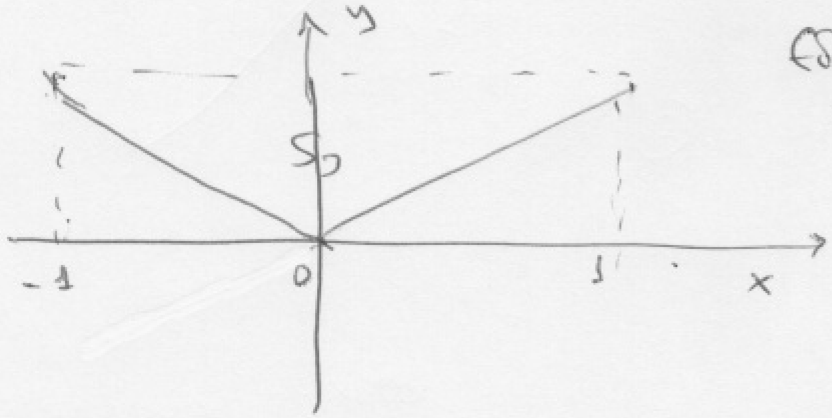
$S_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y \le x \le y, \ 0 \le y \le 1 \}$

Παραμετροποιώ κρατάω σταθερό το y και μεταβάλλω το x

Αυτό γίνεται περισσότερο αντιληπτό αν αντιπαραβάλλουμε S_1 και S_2



Εδώ y μεταβλητό

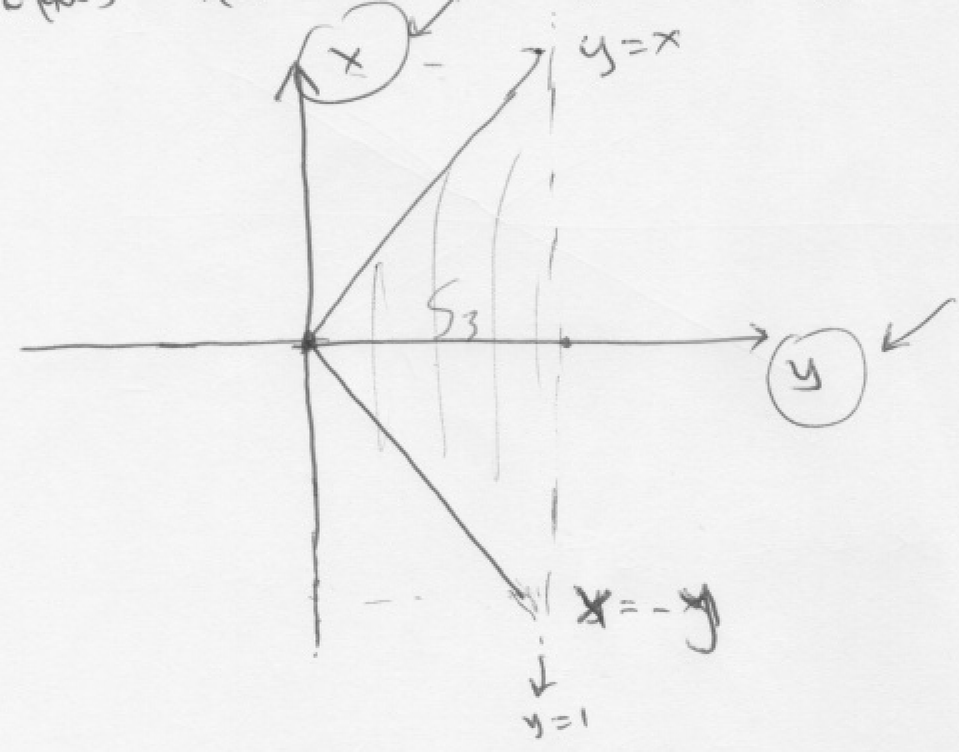


Εδώ αν επιλέξω να κρατήσω x σταθερό πρέπει να σπάσω το χωρίο σε 2 άλλα χωρία

$-1 \le x \le 0$, $-x \le y \le 1$

$0 \le x \le 1$, $1 \le y \le x$

Αν όμως κρατήσω σταθερό το y θα έχω



$0 \le y \le 1$

$-y \le x \le y$

Άρα

$$V = \iint_{S} |f(x,y)|\,dx\,dy = \iint_{S_A} (x^2-y^2)\,dx\,dy + \iint_{S_B} -(x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$V=\iint_{SA}(x^2-y^2)\,dx\,dy-\iint_{SB}x^2-y^2\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(\int_{x}^{-x}(x^2-y^2)\,dy\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\int_{-x}^{x}(x^2-y^2)\,dy\right)dx$$

$$-\int_{0}^{1}\left(\int_{-y}^{y}(x^2-y^2)\,dx\right)dy-\int_{-1}^{0}\left(\int_{y}^{-y}(x^2-y^2)\,dx\right)dy$$

ολοκληρώνω
πρώτα ως
προς το μεταβλητό πέρας $[-y,y]$
+ μετά ως προς το διάστημα $[0,1]$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-\int_{-x}^{+x}(x^2-y^2)\,dy\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\int_{-x}^{x}(x^2-y^2)\,dy\right)dx$$

$$-\int_{0}^{1}\left(\int_{-y}^{y}(x^2-y^2)\,dx\right)dy-\int_{-1}^{0}\left(-\int_{-y}^{y}(x^2-y^2)\,dx\right)dy$$

$$=\int_{-1}^{0}-K(x)\,dx+\int_{0}^{1}K(x)\,dx-\int_{0}^{1}K(y)\,dy-\int_{-1}^{0}-K(y)\,dy$$

$$=-\int_{-1}^{0}K(x)\,dx+\int_{0}^{1}K(x)\,dx-\int_{0}^{1}K(y)\,dy+\int_{-1}^{0}K(y)\,dy$$

$$K(x)=\int_{-x}^{x}(x^2-y^2)\,dy=x^2y-\frac{1}{3}y^3\Big]_{-x}^{x}=x^2x-\frac{1}{3}x^3-\left(x^2(-x)-\frac{1}{3}(-x)^3\right)$$

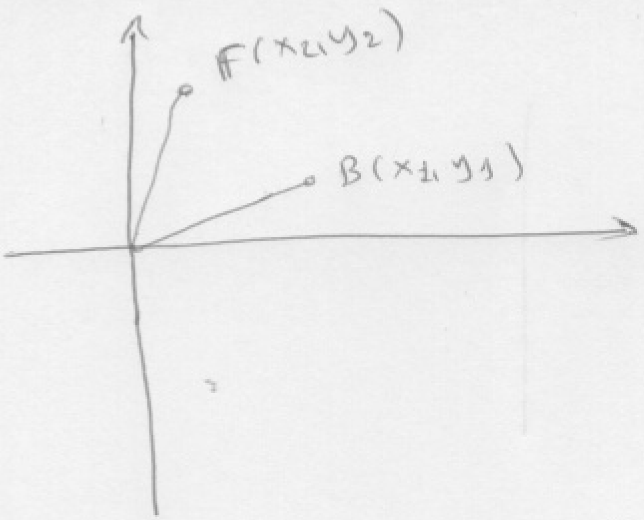
$$=x^3-\frac{1}{3}x^3+x^3-\frac{1}{3}x^3=2x^3-\frac{2}{3}x^3=\frac{4}{3}x^3$$

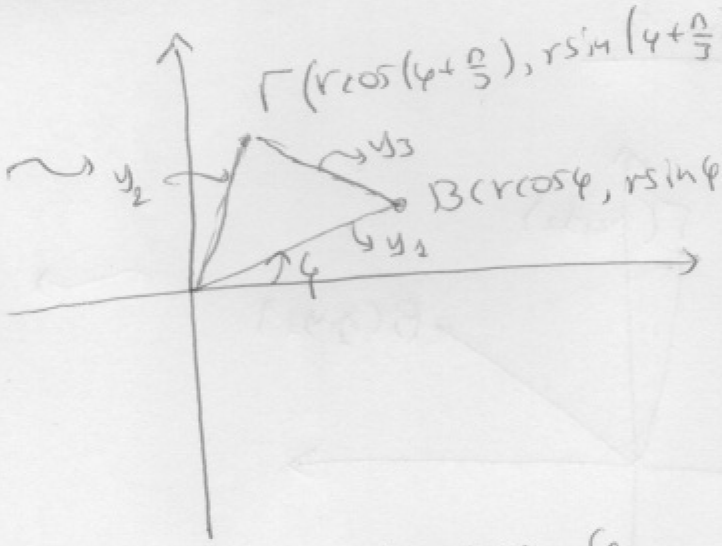
$$K(y)=\int_{-y}^{y}(x^2-y^2)\,dx=\frac{1}{3}x^3-y^2x\Big]_{-y}^{y}=\frac{1}{3}y^3-y^3-\left(\frac{1}{3}(-y)^3+y^3\right)=\frac{2}{3}y^3-2y^3=-\frac{4}{3}y^3$$

Άρα $V=-\int_{-1}^{0}\frac{4}{3}x^3\,dx+\int_{0}^{1}\frac{4}{3}x^3-\int-\frac{4}{3}y^3\,dy+\int_{-1}^{0}-\frac{4}{3}y^3\,dy$

$$=-\frac{1}{3}x^4\Big]_{-1}^{0}+\frac{1}{3}x^4\Big]_{0}^{1}+\frac{1}{3}y^4\Big]_{0}^{1}-\frac{1}{3}y^4\Big]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=4/3$$

Ασκηση 3





Εκφραζω τα Β και Γ συναρτηση της γωνιας φ
Επειδη το χωριο που δεν ειναι κυκλικο δε τρεχω
να εφαρμοσω πολικες συντεταγμενες. Αρα βρισκω
κανονικα τις εξισωσεις των ευθειων y_1, y_2, y_3
για να οριοθετησω το χωριο S

$$\boxed{y_1 = \tan\varphi \cdot x} \quad (1)$$

$$\boxed{y_2 = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\cdot x} \quad (2)$$

$$y_3 - y_B = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}(x - x_B)$$

$$y_3 - r\cos\varphi = \frac{r\sin(\varphi+\frac{\pi}{3}) - r\sin\varphi}{r\cos(\varphi+\frac{\pi}{3}) - r\cos\varphi}(x - r\sin\varphi)$$

Όπως $\sin(\varphi+\frac{\pi}{3}) - \sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi+\frac{\pi}{3}-\varphi}{2}\cos\frac{\varphi+\frac{\pi}{3}+\varphi}{2} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\varphi+\frac{\pi}{3}}{2}$
$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cos(\varphi+\frac{\pi}{6})$

$$\cos(\varphi+\frac{\pi}{3}) - \cos\varphi = -2\sin\left(\frac{\varphi+\frac{\pi}{3}+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi+\frac{\pi}{3}-\varphi}{2}\right) = -\sin(\varphi+\frac{\pi}{6})$$

$$\boxed{y_3 = -\frac{\cos(\varphi+\frac{\pi}{6})}{\sin(\varphi+\frac{\pi}{6})}(x - r\cos\varphi) + r\sin\varphi} \quad (3)$$

Το r το υπολογιζω απο το (2):

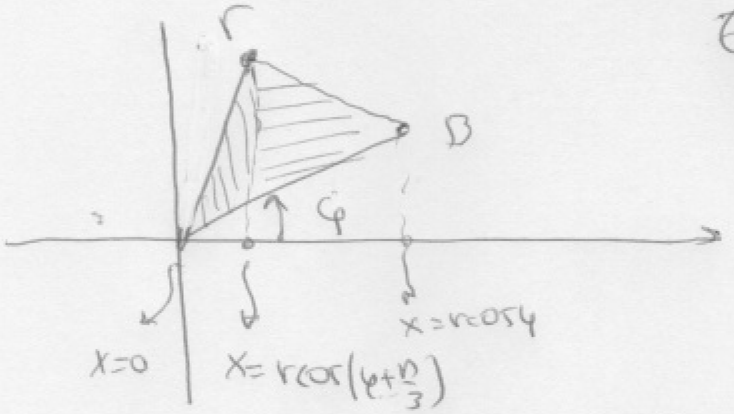
$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{B\cdot\upsilon}{2} = \frac{r\cdot\upsilon}{2} \\ E &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{r\upsilon}{2} = 1 \left.\right\} \Rightarrow$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\upsilon}{\frac{r}{2}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{3}\,\frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{3}\,\frac{r^2}{4}=1 \Rightarrow r^2=\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{r=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}} \quad (4)$$



Επειδή δεν είναι το S κανονικό ως προς x και y πρέπει να το σπάσω σε 2 χωρία

Άρα $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le r\cos(\varphi+\frac{\pi}{3}),\ \tan\varphi\, x\le y\le \tan(\varphi+\frac{\pi}{3})\cdot x\}$

$S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: r\cos(\varphi+\frac{\pi}{3})\le x\le r\cos\varphi,\ \tan(\varphi+\frac{\pi}{3}) \le y\le y_3\}$

όπου r, y_3 γνωστά από (3),(4)

$$V=\iint_S |f(x,y)|\,dx\,dy=\overbrace{\iint_{S_1}|f(x,y)|\,dx\,dy}^{A1}+\iint_{S_2}|f(x,y)|\,dx\,dy$$

$$A1=\int_0^{r\cos(\varphi+\frac{\pi}{3})}\left(\int_{\tan\varphi\cdot x}^{\tan(\varphi+\frac{\pi}{3})\cdot x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx=\int_0^{r\cos(\varphi+\frac{\pi}{3})}\left(\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{\tan\varphi\cdot x}^{\tan(\varphi+\frac{\pi}{3})\cdot x}\right)dx$$

$$=\int_0^{r\cos(\varphi+\frac{\pi}{3})}\left(x^2\tan(\varphi+\tfrac{\pi}{3})\cdot x+\frac{1}{3}\tan(\varphi+\tfrac{\pi}{3})^3x^3-x^2\tan\varphi\, x-\frac{1}{3}\tan\varphi^3x^3\right)dx$$

$$=\ldots$$

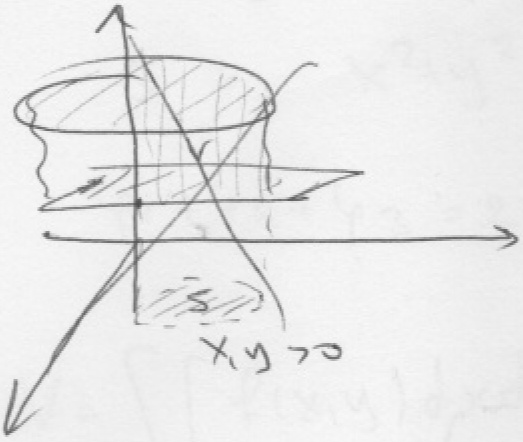
Ομοίως για το A_2

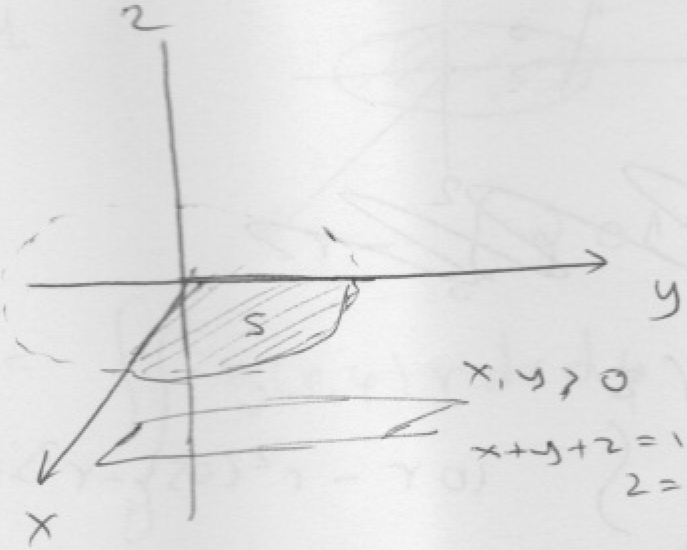
Προφανώς για τη λύση θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε matlab. Το V το εκφράζετε σαν συνάρτηση του φ. Θέτετε $V(\varphi)=1 \Rightarrow \varphi=\ldots$ στο τέλος.

B) Για το ερώτημα αυτό αφού έχετε υπολογίσει $V=V(\varphi)$ τότε για να ισχύει max όγκος πρέπει $\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}=0$ και $\frac{d^2V(\varphi)}{d\varphi^2}<0$

Άσκηση 4

Ω: 1ο ογδοημόριο, $x^2+y^2 \le 4$
$x+y+z=10$





$x,y > 0$

$x+y+z=10 \Rightarrow z = 10-(x+y)$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ x,y > 0\}$$

$$V = \iint_S |f(x,y)|\,dx\,dy = \iint_S |10-(x+y)|\,dx\,dy$$

$|f(x,y)| = |10-(x+y)| = 10-(x+y)$ διότι $0 \le x \le 2$ (όσο η ακτίνα r του κύκλου) $0 \le y \le 2$, $0 \le x+y \le 4$

Χρησιμοποιώ πολικές συντεταγμένες

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$$

$$g(u,v) = g(r,\varphi) = f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = 10 - (r\cos\varphi + r\sin\varphi) = 10 - r(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$V = \iint_D g(r,\varphi)\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\,dr\,d\varphi = \iint_D (10 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

Όπου $D = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \le 4,\ \cancel{r}\cos\varphi > 0,\ r\sin\varphi > 0\}$

$\Rightarrow D = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r^2 \le 4,\ \cos\varphi > 0,\ \sin\varphi > 0\}$

$\Rightarrow D\ \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$

$$\Rightarrow V = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 (10 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\, r\, dr \right) d\varphi =$$

$$\cancel{\int_0^{\pi/2} 10\varphi \Big]_0^2 - r^2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 10r - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi \, dr \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{10}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \cos\varphi - \frac{1}{3} r^3 \sin\varphi \Big]_0^2 \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{10}{2} \cdot 4 - \frac{8}{3}\cos\varphi - \frac{8}{3}\sin\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(20 - \frac{8}{3}\cos\varphi - \frac{8}{3}\sin\varphi \right) d\varphi =$$

$$= 20\,\varphi \Big]_0^{\pi/2} - \frac{8}{3}\sin\varphi \Big]_0^{\pi/2} + \frac{8}{3}\cos\varphi \Big]_0^{\pi/2} =$$

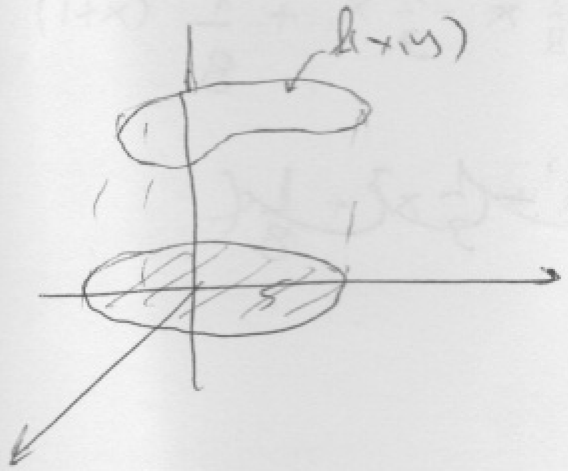
$$= 20\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3} + 0 - \frac{8}{3} = 10\pi - \frac{16}{3}$$

Λύση

$f(x,y) = 4x^2 + y^2$

$S : \quad x^2+y^2 \leq 1$

$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$



$$V = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D g(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow g(r,\varphi) = 4r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$$

$$D = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

$$V = \iint_D (4r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int (4r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\, r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cancel{4}\cos^2\varphi \frac{1}{\cancel{4}} r^4 + \frac{1}{4} r^4 \sin^2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(r^4\cos^2\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin^2\varphi \right) \Big]_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi + \frac{1}{4}(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}\cos^2\varphi + \frac{1}{4} \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right) + \frac{1}{4} \right) d\varphi =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \right) d\varphi =$$

$$= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \underbrace{\frac{5}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi}\Big]_0^{2\pi} = \frac{5}{8} \cdot 2\pi = \frac{10\pi}{8}$$

$$= \frac{5}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi \Big]_0^{\varphi_1} + \frac{5}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi \Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$+ \frac{5}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi \Big]_{\varphi_2}^{2\pi}$$

$= \frac{10\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$ όλος ο όγκος

Άρα $\frac{V}{3} = \frac{5\pi}{12}$ είναι ο όγκος που αντιστοιχεί σε κάθε κυλινδρικό τομέα

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{5}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi \Big]_0^{\varphi_1} \Rightarrow$$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{5}{8}\varphi_1 + \frac{3}{16}\sin 2\varphi_1 \quad (1)$$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{5}{8}\varphi_2 + \frac{3}{16}\sin 2\varphi_2 - \frac{5}{8}\varphi_1 - \frac{3}{16}\sin 2\varphi_1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{12} = \frac{5}{8}\varphi_2 + \frac{3}{16}\sin 2\varphi_2 - \frac{5\pi}{12} \quad (\text{από } (1))$$

$$\boxed{\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{8}\varphi_2 + \frac{3}{16}\sin 2\varphi_2} \quad (3)$$

$\frac{5\pi}{12} = \frac{5}{8} \cdot 2\pi - \frac{5}{8}\varphi_2 - \frac{3}{16}\sin 2\varphi_2 \Rightarrow$ απλά επαληθεύει την (3)

Λύνουμε στο matlab τις inequalities εξισώσεις (1), (3) $\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$

$\varphi_1: [0, \varphi_1]$

$\varphi_2: [\varphi_1, \varphi_2]$

$\varphi_3: [\varphi_2, 2\pi]$