ΗΥ-111 Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων

$\boxed{\text{Άσκηση 1}}$ α) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x + \cos x + 1}{x+y+1} = \frac{\sin 0 + \cos 0 + 1}{0+0+1} = 2$

β) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^3 + \cos x}{x^2 y} \to \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(1)}{x^2}$ $\begin{cases} x\to 0^- & +\infty \\ x\to 0^+ & +\infty \end{cases}$

γ) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)-y}$

- $x=0$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin(0)}{0-y} = 0$

- $y=0$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{(De l'Hosp.)}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(2x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{\cos(x)} = 2 \neq 0$

Άρα το όριο $\nexists$

δ) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^n - y^n}{x-y}$, $n \in \mathbb{N}$

- $n=0$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-1}{x-y} = 0$

- $n=1$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x-y} = 1$

- $n>1$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(x-y)}(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})}{\cancel{(x-y)}} =$

$= \lim_{(x,y)} (x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}) = 0+0\ldots+0$

$=0$

Άσκηση 2 | $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$

• Εφαπτόμενο επίπεδο στο $(x_0, y_0) = (1,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 - 3x$

$$Z = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0) \Longrightarrow$$

$$Z = -3 + 0 - 6(y-1) \Rightarrow \boxed{Z = -6y+3}$$

A) Ακρότατα της f στο μοναδιαίο δίσκο

Βρίσκω ακρότατα στο $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

• Για το εσωτερικό του S, ψάχνω ακρότατα τ.ω. $(x_0,y_0) \in S$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - y = 0 \ (1) \Rightarrow x^2 = y \\ y^2 + x = 0 \ (2) \overset{x^2=y}{\Longrightarrow} x^4 + x = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow x(x^3+1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$
ή
$$x^3 = -1 \Longrightarrow \boxed{x=-1}$$

– $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ και $(x_0,y_0) \in S$ άρα $(0,0)$ υποψήφιο ακρότατο

– Για $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ αλλά τώρα $(x_0,y_0) \notin S$ άρα απορρίπτεται

• Για το σύνορο ∂S, ορίζω $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$f(\sigma(t)) = \cos^3 t - \sin^3 t - 3\cos t \sin t$

$f'(\sigma(t)) = -3\cos^2 t - 3\cos^2 t \sin t + 3\sin^2 t - 3\cos t \sin^2 t$

Θέτω $f'(\sigma(t)) = 0$ και βρίσκω τις ρίζες, π.χ. στο MATLAB

```
S= Solve('-3*cos(t)^2 -3*cos(t)^2 *sin(t)+3* sin(t)^2-3cos(t)*sin(t)^2')
```

B) • Για το εσωτερικό ισχύει ότι και πριν αφού το $(0,0)$ ανήκει στο χωρίο μας και πάλι

• Για το σύνορο:

- όπως πριν μόνο που τώρα $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, όσες ρίζες είναι στα άλλα τεταρτημόρια απορρίπτονται

- Θέτω $y=0$, $x \in [0,1]$ και βρίσκω τα ακρότατα:

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f'(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$, $\boxed{y=0}$

- Θέτω $x=0$, $y \in [0,1]$ και βρίσκω τα ακρότατα:

$f(y) = -y^3$

$f'(y) = -3y^2$, $f'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$, $\boxed{x=0}$

Άσκηση 3 Έστω $f(x,y,z)=x^2+y^2-z-1$, $g(x,y,z)=x+y-z^2-1$ και $I=(1,1,1)$

• Για εφ. επίπεδο της f στο I:

$\nabla f=\langle 2x,2y,-1\rangle$

$\nabla f(1,1,1)\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow 2(x-1)+2(y-1)-1(z-1)=0 \Rightarrow$

$2x-2+2y-2-z+1=0 \Rightarrow \boxed{2x+2y-z=3} : S_f$

• Για εφαπτόμενο επίπεδο της g στο I:

$\nabla g=\langle 1,1,-2z\rangle$

$\nabla g(1,1,1)\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow (1,1,-2)\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x-\cancel{1}+y-\cancel{1}-2z+\cancel{2}=0 \Rightarrow$

$\boxed{x+y-2z=0} : S_g$

• Τομή S_f & S_g:

$$\begin{cases}(1)\ 2x+2y-z=3\\(2)\ x+y-2z=0\end{cases} \Rightarrow (1)-2\cdot(2) \Rightarrow -z+4z=3 \Rightarrow 3z=3 \Rightarrow \boxed{z=1}$$

$(2)\xRightarrow{(z=1)} x+y-z=0 \Rightarrow \boxed{x=2-y}$

Άρα η τομή είναι: $(2-y,y,1)$ (ε) ή αλλιώς η ευθεία $\langle 2,0,1\rangle+\lambda\langle -1,1,0\rangle$, $\lambda\in\mathbb{R}$

• Ελάχιστη απόσταση από $(0,0,0)$: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ισοδύναμα ελαχιστοποιούμε την $d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \xrightarrow{(\varepsilon)}$

$d(y)=(2-y)^2+y^2+1=2y^2-4y+5$, $d'(y)=0 \Rightarrow 4y-4=0 \Rightarrow \boxed{y=1}$

Άρα το σημείο $I=(1,1,1)$ έχει την ελάχιστη απόσταση: $\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

Άσκηση 4 | Ελάχιστη απόσταση από $O(0,0,0)$:

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ισοδύναμα ελαχιστοποιώ την $d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

Ορίζω $f_1(x,y,z)=x+y+z-1$ και $f_2(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-4$ οι περιορισμοί.

$\nabla d=\langle 2x, 2y, 2z\rangle$, $\nabla f_1=\langle 1,1,1\rangle$, $\nabla f_2=\langle 2x,4y,2z\rangle$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla d=\lambda_1\nabla f_1+\lambda_2\nabla f_2\\ f_1=0\\ f_2=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x=\lambda_1+\lambda_2\cdot 2x\\ 2y=\lambda_1+\lambda_2\cdot 4y\\ 2z=\lambda_1+\lambda_2\cdot 2z\\ x+y+z=1\\ x^2+2y^2+z^2=4\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll}2x(1-\lambda_2)=\lambda_1 & (1)\\ 2y(2-\lambda_2)=\lambda_1 & (2)\\ 2z(1-\lambda_2)=\lambda_1 & (3)\\ x+y+z=1 & (4)\\ x^2+2y^2+z^2=4 & (5)\end{array}$$

$(1)=(3) \Rightarrow 2x(1-\lambda_2)=2z(1-\lambda_2)$

– $\boxed{\text{Για } \lambda_2\neq 1}$ $\underline{x=z}$

$$\left.\begin{array}{l}(4)\\(5)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x+y=1\\ 2x^2+2y^2=4\end{array}\right\} \Rightarrow y=1-2x \xrightarrow{y=1-2x} x^2+(4x^2-4x+1)=2 \Rightarrow$$

$5x^2-4x-1=0$, $\Delta=16-4\cdot 5(-1)=36>0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2\cdot 5} \Rightarrow \boxed{x=\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-1,\ z=1 \xrightarrow{\text{απόσταση}} \sqrt{3}\\ x=-\frac{1}{5} \Rightarrow y=0{,}6,\ z=-\frac{1}{5} \xrightarrow{\text{απόσταση}} \sqrt{0.44}\end{cases}}$$

– $\boxed{\text{Για } \lambda_2=1}$

$(1) \overset{\lambda_2=1}{\Longrightarrow} \lambda_1=0$, $(2) \overset{\lambda_1=0,\ \lambda_2=1}{\Longrightarrow} 2y(2-1)=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

$$\left.\begin{array}{l}(4)\\(5)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+z=1\\ x^2+z^2=4\end{array}\right\} \Rightarrow z=1-x \xrightarrow{z=1-x} x^2+1-2x+x^2=4 \Rightarrow 2x^2-2x-3=0$$

$\Delta=4-4\cdot 2\cdot(-3)=28$

$$x=\frac{2\pm 2\sqrt{7}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2} \boxed{\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{7}}{2},\ y=0,\ z=\frac{1-\sqrt{7}}{2} \xrightarrow{\text{απόσταση}} 2\\ x=\frac{1-\sqrt{7}}{2},\ y=0,\ z=\frac{1+\sqrt{7}}{2} \xrightarrow{\text{απόσταση}} 2\end{array}}$$

Άρα το σημείο με την μικρότερη απόσταση είναι:

$\left(-\frac{1}{5}, 0.6, -\frac{1}{5}\right)$