Άσκηση 1: Να βρεθεί αν υπαρχει το σημειο τομης των ευθειων (να περνανε όλες οι ευθείες από το ίδιο σημείο) :<x,y,z>=<0,0,0> + t<1,2,3> και <x,y,z>=<1,1,1> + s<1,1,1> και <x,y,z>=<1,2,3> + u<1,1,1>

Από τις εξισώσεις των ευθειών έχουμε:

1. x = t
2. y = 2t
3. z = 3t
4. x = 1 + s
5. y = 1 + s
6. z = 1 + s
7. x = 1 + u
8. y = 2 + u
9. z = 3 + u

από τις 1, 4 και 7 έχουμε:

$t=1+s=1+u \Rightarrow t-1=s=u \quad (10)$

από τις 2, 5 και 8 έχουμε:

$2t=1+s=2+u \stackrel{(10)}{\Rightarrow} 2t=1+s=2+s \Rightarrow 2t-s=1=2$

καταλήγουμε σε άτοπο, άρα δεν υπάρχει κανένα σημείο τομής των ευθειών.

Άσκηση 2: Να βρεθεί το επίπεδο που τέμνει κάθετα την (ε) στο Α(1,1,1) και μια ευθεία που τέμνει κάθετα την (ε) στο Α(1,1,1):

(ε): <x,y,z>=<1,1,1> + t<2,3,4>

Έστω $\vec{v}=\langle 2,3,4\rangle$, $\vec{w}=\vec{AP}$ και $\vec{w}\perp\vec{v}$

Άρα για κάθε σημείο, του επιπέδου που ψάχνουμε, P (x,y,z) θα ισχύει:

$\vec{w}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \langle x-1, y-1, z-1\rangle\langle 2,3,4\rangle=0 \Leftrightarrow 2x+3y+4z=2+3+4 \Leftrightarrow 2x+3y+4z=9$

Εξίσωση επιπέδου: 2X+3Y+4Z=9

Μία ευθεία που τέμνει κάθετα την (ε) στο Α: <x,y,z>=<1,1,1> + t<2,0,-1>

Άσκηση 3: Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του επιπέδου μήκους 1, που είναι κάθετα με το <1,1>. Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του επιπέδου μήκους 2, που είναι παράλληλα με το <1,1>.

α) Έστω $\vec{w}=\langle x, y\rangle$ το ζητούμενο διάνυσμα που είναι κάθετο στο $\vec{u}=\langle 1,1\rangle$ και $|\vec{w}|=1$

$\vec{w}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow x\cdot 1+y\cdot 1=0 \Rightarrow x+y=0 \quad (1)$

$|\vec{w}|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x^2+(-x)^2=1 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

οπότε τα κάθετα, στο <1,1>, διανύσματα, με μήκος 1, είναι τα $\langle\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\rangle$ και $\langle-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\rangle$

β) Έστω $\vec{w}=\langle x,y\rangle$ το ζητούμενο διάνυσμα που είναι παράλληλο στο $\vec{u}=\langle 1,1\rangle$ και $|\vec{w}|=2$

$\vec{w}\|\vec{u}\Rightarrow\vec{w}=t\cdot\vec{u}\Rightarrow\langle x,y\rangle=\langle t,t\rangle\Rightarrow$ x = t (2) και y = t (3)

$|\vec{w}|=2\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=2\Rightarrow x^2+y^2=4\overset{(1)και(3)}{\Rightarrow}2\cdot t^2=4\Rightarrow t^2=2\Rightarrow t=\pm\sqrt{2}$

οπότε τα παράλληλα, στο <1,1>, διανύσματα, με μήκος 2, είναι τα

$\langle\sqrt{2},\sqrt{2}\rangle$ και $\langle-\sqrt{2},-\sqrt{2}\rangle$

Άσκηση 4: Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του χώρου μήκους 1, που είναι κάθετα με το <1,1,1> και με το <1,2,3>.

Έστω $\vec{w}=\langle x,y,z\rangle$ το ζητούμενο διάνυσμα που είναι κάθετο στα $\vec{u}=\langle 1,1,1\rangle$ και $\vec{v}=\langle 1,2,3\rangle$ και έχει μέτρο 1.

$\vec{w}\perp\vec{u}\Rightarrow\vec{w}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow 1x+1y+1z=0\Rightarrow x+y+z=0$ (1)

$\vec{w}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{w}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow 1x+2y+3z=0\Rightarrow x+2y+3z=0$ (2)

από 1 και 2 :

$x+y+z=x+2y+3z\Rightarrow y+z=2y+3z\Rightarrow y=-2z$ (3)

από 1 και 3 :

$x+y+z=0\Rightarrow x-2z+z=0\Rightarrow x-z=0\Rightarrow x=z$ (4)

από 3 και 4 :

$y=-2z\Rightarrow y=-2x$ (4)

$|\vec{w}|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1\overset{(3)}{\Rightarrow}x^2+(-2z)^2+z^2=1\Rightarrow x^2+5z^2=1\overset{(4)}{\Rightarrow}x^2+5x^2=1$

$\Rightarrow 6x^2=1\Rightarrow x^2=\dfrac{1}{6}\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

οπότε τα κάθετα, στα <1,1,1> και <1,2,3>, διανύσματα, με μήκος 1, είναι τα

$\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle$ και $\left\langle-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle$

Άσκηση 5: Έστω οι ευθείες:

(ε1) x=1+t, y = 1+t, z = 1+t

(ε2) x=2+5s, y =4+ 5s, z = -2+5s

Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε1)-(ε2) δε τέμνονται πουθενά και είναι παράλληλες.

Από ε1 και ε2 :

1. $1+t=2+5s\Rightarrow t=5s+1$
2. $1+t=4+5s\Rightarrow t=5s+3$
3. $1+t=-2+5s\Rightarrow t=5s-3$

Από 1 και 2 :

$5s+1=5s+3\Rightarrow 1=3$ που είναι άτοπο, άρα οι ε1 και ε2 δεν τέμνονται πουθενά

$$\left.\begin{array}{l} ε1\,//\,\vec{v}=\langle 1,1,1\rangle \\ ε2\,//\,\vec{u}=\langle 5,5,5\rangle \end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}=5\vec{v}\Rightarrow\vec{v}\,//\,\vec{u}\Rightarrow ε1\,//\,ε2$$

Άσκηση 6:

Α) Να βρεθεί απόσταση του σημείου Γ από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
Β) Να βρεθεί απόσταση του σημείου Δ από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
Με Α(0,0,0), Β(1,1,1), Γ(2,2,2), Δ(3,4,5).

Για την επίλυση της άσκησης διάβασα το ακόλουθο http://tinyurl.com/point2segment

Α) $\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}=<2,2,2><1,1,1>=2+2+2=6>0$

$\vec{AB}\cdot\vec{AB}=<1,1,1><1,1,1>=1+1+1=3<\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}$

οπότε το Γ βρίσκεται "δεξιά" του ΑΒ και η απόσταση του από αυτό θα είναι ίση με την απόσταση:

$|B\Gamma|=|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}$

Β) $\vec{A\Delta}\cdot\vec{AB}=<3,4,5><1,1,1>=3+4+5=12>0$

$\vec{AB}\cdot\vec{AB}=<1,1,1><1,1,1>=1+1+1=3<\vec{A\Delta}\cdot\vec{AB}$

οπότε το Δ βρίσκεται "δεξιά" του ΑΒ και η απόσταση του από αυτό θα είναι ίση με την απόσταση:

$|B\Delta|=|\vec{B\Delta}|=\sqrt{(3-1)^2+(4-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$

Bonus (+15%): Να βρεθεί η απόσταση των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ.

$\vec{\Gamma\Delta}\cdot\vec{AB}=<1,2,3><1,1,1>=1+2+3=6>0$

$\vec{AB}\cdot\vec{AB}=<1,1,1><1,1,1>=1+1+1=3<\vec{\Gamma\Delta}\cdot\vec{AB}$

οπότε το ΓΔ βρίσκεται "δεξιά" του ΑΒ και η απόσταση του από αυτό θα είναι ίση με την απόσταση του από το Β:

$\vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma\Delta}=<-1,-1,-1><1,2,3>=-1-2-3=-6<0$

οπότε το Γ βρίσκεται "αριστερά" του ΓΔ και η απόσταση του από αυτό θα είναι ίση με την απόσταση:

$|B\Gamma|=|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}$