

HY-111, Απειροστικός Λογισμός II
Εαρινό Εξάμηνο 2009-10
Διδάσκων: Κώστας Παναγιωτάκης
2^η Σειρά Ασκήσεων
Ημερομηνία Παράδοσης: 26-4-2010 (στο μάθημα)

Γενικές Οδηγίες

• Προαιρετικά, μπορείτε να κάνετε χρήση του Matlab, για γραφικές παραστάσεις.

Άσκηση 1 (20%)

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν::

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x) + \cos(x) + 1}{x + y + 1}$

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{y^3 + \cos(x)}{x^2 y}$

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2 \cdot x)}{\sin(x) - y}$

δ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^n - y^n}{x - y}, n \in \mathbb{N}$

Άσκηση 2 (30%)

Σχεδιάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες της $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$, και υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο (1, 1).

A) βρείτε τα ακρότατα της στο μοναδιαίο δίσκο

B) βρείτε τα ακρότατα της στο πρώτο τεταρτημόριο του μοναδιαίου δίσκου

Άσκηση 3 (30%)

Να βρεθούν τα 2 εφαπτόμενα επίπεδα των $x^2 + y^2 - z = 1$ και $x + y - z^2 = 1$ στο σημείο (1, 1, 1) και να υπολογιστεί εφόσον υπάρχει η τομή των επιπέδων. Να υπολογιστεί το σημείο της τομής των δύο παραπάνω επιπέδων που βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο O(0, 0, 0).

Άσκηση 4 (20%)

Βρείτε το σημείο της καμπύλης που προκύπτει από την τομή του επιπέδου $x + y + z = 1$ και του ελλειψοειδούς $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ και είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

Bonus (+20%)

Δύο ορειβάτες κινούνται με στόχο να φτάσουν στη ψηλότερη κορυφή. Ο ορειβάτης 1 θα ξεκινήσει από το σημείο A(0, 0, h(0, 0)) και ο ορειβάτης 2, από το σημείο B(2, 2, h(2, 2)). Το ύψομετρο του βουνού δίνεται από τη συνάρτηση $z = h(x, y) = 8x + 8y - x^4 - y^4$, $x \in [0, 2], y \in [0, 2]$.

Να υπολογίσετε τις 2 εξισώσεις κίνησης $c_1(t) = [x_1(t), y_1(t), h(x_1(t), y_1(t))]$ και $c_2(t) = [x_2(t), y_2(t), h(x_2(t), y_2(t))]$ των 2 ορειβατών, ώστε αν ξεκινήσουν ταυτόχρονα ($t = 0$) να φτάσουν την ($t = 1$) ταυτόχρονα στη κορυφή με τον περιορισμό πως πρέπει να βρίσκονται συνεχώς ίδιο ύψομετρο, και να απεικονίσετε σε κάποιο σχήμα τις 2 τροχιές.