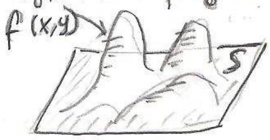
Άσκηση 1η

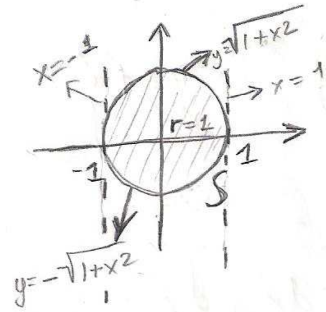
$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in S$

Όγκοι που περικλείονται από την επιφάνεια $f(x,y)$ κ' το επίπεδο χωρίο S



$V(f) = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$

1a) S: κυκλικός δίσκος ακτίνας 1: $x^2+y^2 \leq 1$



$$V = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \text{: κυκλικός δίσκος}$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\}, \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Ιακωβιανή

$$F(r,\theta) = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \xrightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leq 1$$

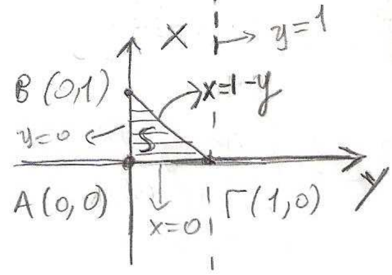
$$r^2 \leq 1 \xRightarrow{r\geq 0} \boxed{0 \leq r \leq 1}$$

$\boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi}$ Το χωρίο S βρίσκεται και στα 4 τεταρτημόρια

$$V = \iint_S f(r,\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr = (2\pi - 0)\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ κ.μ.}$$

1b) S: Το εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ, $A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma(1,0)$



$$S: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1-y,\ 0 \le y \le 1\}$$

$$V = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (x^2+y^2)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right)_0^{1-y} dy = \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + (1-y)y^2 \right) dy$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$= \int_0^1 \frac{(1-y)^3}{3}\,dy + \int_0^1 (y^2 - y^3)\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-y)^3 dy + \int_0^1 y^2 dy - \int_0^1 y^3 dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1 - 3y + 3y^2 - y^3)\,dy + \int_0^1 y^2 dy - \int_0^1 y^3 dy$$

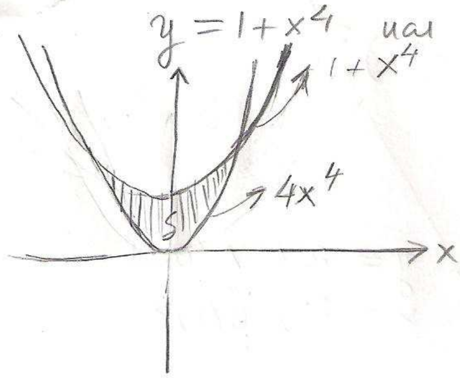
$$= \frac{1}{3}\left[y - \frac{3y^2}{2} + \frac{3y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{3}\left[\frac{12}{12} - \frac{18}{12} + \frac{12}{12} - \frac{3}{12} \right]$$

$$+ \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{12} \right] + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}\ \text{κ.μ} //$$

1c) S: το χωρίο που φράσσεται πάνω από γράφημα της

$y = 1 + x^4$ και κάτω $y = 4x^4$



$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + x^4 \\ y = 4x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x^4 = 1 + x^4 \\ y = 4x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm\sqrt[4]{1/3} \\ x = \pm \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{array}$$

$$S : \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \,,\, 4x^4 \leq y \leq 1 + x^4 \right\}$$

$$V = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left(\int_{4x^4}^{1+x^4} (x^2 + y^2)\,dy \right) dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left(yx^2 + \frac{y^3}{3} \right)_{4x^4}^{1+x^4} dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left[(1+x^4)x^2 + \frac{(1+x^4)^3}{3} - 4x^4 x^2 - \frac{4x^{12}}{3} \right] dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left(x^2 + x^6 + \frac{1 + 3x^4 + 3x^8 + x^{12}}{3} - 4x^6 - \frac{64x^{12}}{3} \right) dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left(3x^2 + 3x^6 + 1 + 3x^4 + 3x^8 + x^{12} - 4x^6 - \frac{64}{3}x^{12} \right) dx$$

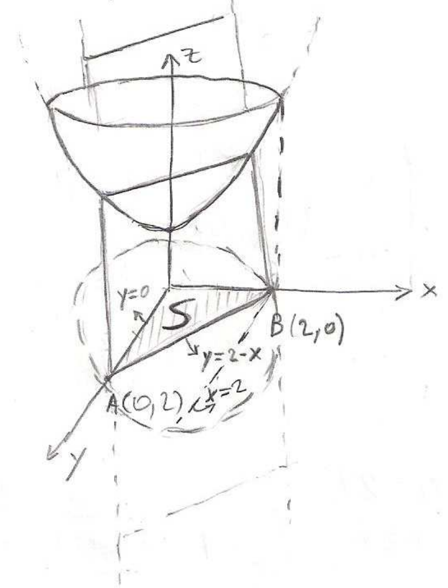
$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left(3x^2 - x^6 + 3x^4 + 3x^8 - \frac{61}{3}x^{12} + 1 \right) dx \ldots$$

Άσκηση 2η

Βρείτε τον όγκο στερεού που βρίσκεται στο 1^o ογδοημόριο και περικλείεται από την $y=2-x$ και $z=x^2+y^2+1$

Εξίσωση παραβολοειδούς: $z-z_0=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

Άρα $z-1=x^2+y^2$ και $\boxed{K(0,0,1)}$



$y=2-x$

για $x=0,\ y=2 \Rightarrow A(0,2)$
$\quad\ y=0,\ x=2 \Rightarrow B(2,0)$

$$V=\iint_S f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^{2-x}(x^2+y^2+1)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2\left(yx^2+\frac{y^3}{3}+y\right)_0^{2-x}dx=\int_0^2\left[(2-x)x^2+\frac{(2-x)^3}{3}+(2-x)\right]dx$$

$$=\int_0^2(2x^2-x^3)\,dx+\frac{1}{3}\int_0^2(2-x)^3dx+\int_0^2(2-x)\,dx$$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

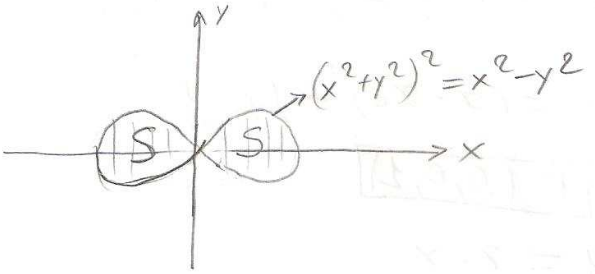
$$=\int_0^2 2x^2dx-\int_0^2x^3dx+\frac{1}{3}\int_0^2(8-3\cdot4\cdot x+3\cdot2\cdot x^2-x^3)\,dx+\int_0^2 2\,dx-\int_0^2 x\,dx$$

$$=\left.\frac{2x^3}{3}\right]_0^2-\left.\frac{x^4}{4}\right]_0^2+\frac{1}{3}\left[8x-6x^2+2x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^2+\left.2x\right]_0^2-\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{16}{3}-\cancel{4}+\frac{16}{3}-\frac{24}{3}+\frac{16}{3}-\frac{4\cdot4}{3\cdot4}+\cancel{4}-2=\frac{48}{3}-\frac{28}{3}-\frac{6}{3}=\frac{14}{3}\text{ κ.μ}$$

Άσκηση 3^{η}

Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη κλειστή καμπύλη: $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$



Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες:

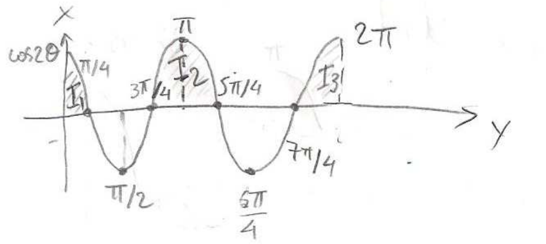
$$\left.\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\},\quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^2=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow (r^2(\overset{1}{\cancel{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}))^2= r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow (r^2)^{\cancel{2}} = \cancel{r^2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \Rightarrow r^2=\cos2\theta$$

$$r^2=\cos2\theta \overset{r\geq 0}{\Rightarrow} \boxed{0\leq r\leq\sqrt{\cos2\theta}}$$



$$S= I_1 \cup I_2 \cup I_3$$

$$R_1=\begin{cases}0\leq\theta\leq\pi/4\\ 0\leq r\leq\sqrt{\cos2\theta}\end{cases}$$

$$R_2=\begin{cases}3\pi/4\leq\theta\leq5\pi/4\\ 0\leq r\leq\sqrt{\cos2\theta}\end{cases}$$

$$R_3=\begin{cases}\frac{7\pi}{4}\leq\theta\leq2\pi\\ 0\leq r\leq\sqrt{\cos2\theta}\end{cases}$$

$$R_1=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

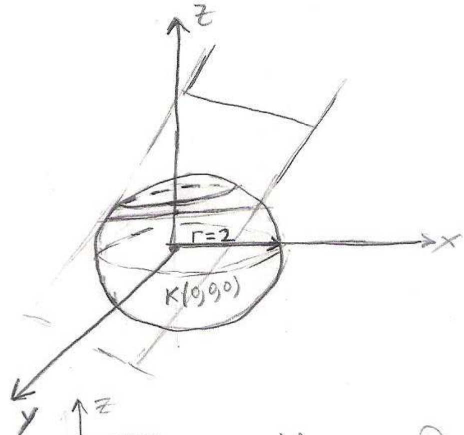
$$=\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\cos2\theta}}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\text{τ.μ}$$

$$R_2=\int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}} r\,dr\,d\theta=\ldots=\frac{1}{2}\text{τ.μ},\quad R_3=\int_{7\pi/4}^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}} r\,dr\,d\theta=\ldots=\frac{1}{4}\text{τ.μ}$$

$$R=R_1+R_2+R_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\ \text{τ.μ}$$

Άσκηση 4η

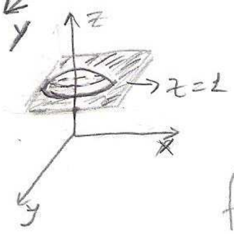
Βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται στο 1ο ογδοημόριο και περικλείεται πάνω από την $z^2+x^2+y^2=4$ και κάτω από την $z=1$.



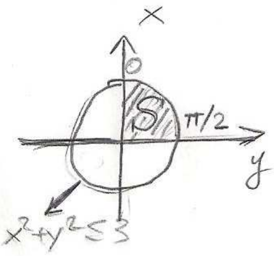
$$V=\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l} z^2=4-x^2-y^2 \Rightarrow z \overset{z\geq 0}{=} \sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 4-x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=3$$



Άρα $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 3\}$



$$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}-1$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες:

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\quad \left|\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|=r,\quad 0\leq r\leq\sqrt{3},\quad \underbrace{0\leq\theta\leq\pi/2}_{1^o \text{ ογδοημόριο}}$

$$F(r,\theta)=\sqrt{4-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}-1$$

$$\boxed{S=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq r\leq\sqrt{3},\ 0\leq\theta\leq\pi/2\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(r,\theta)=\sqrt{4-r^2}-1}$$

$$V=\iint_S f(r,\theta)\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{3}}\left((\sqrt{4-r^2})\cdot r-r\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\theta\cdot\left(\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{4-r^2}\,dr-\int_0^{\sqrt{3}} r\,dr\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\left[(4-r^2)^{3/2}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}\ \left[-\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}\left[(4-3)^{3/2}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot 4^{3/2}-\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\left[-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right]-\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{14}{6}-\frac{9}{6}\right)=\frac{5\pi}{12}\ \text{κ.μ}$$