HY-111 : Απειροστικός Λογισμός 2
1η Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1:

Από την εξίσωση της πρώτης ευθείας έχουμε:

$$x = 1 + t \tag{1}$$

$$y = 2 + 2 * t \tag{2}$$

$$y = 3 + 3 * t \tag{3}$$

και από την δεύτερη έχουμε τα παρακάτω:

$$x = 1 + 2 * s \tag{4}$$

$$y = 1 + 2 * s \tag{5}$$

$$z = 1 + 2 * s \tag{6}$$

Για να τέμνονται οι δύο ευθείες θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο που θα ικανοποιεί τους τύπους των δύο εξισώσεων. Οπότε αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις { 1, 4}, { 2, 5} και { 3, 6} παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για τό t και το s:

- { 1, 4}:

$$1 + t = 1 + 2 * s \Rightarrow$$
$$t = 2s \tag{7}$$

- { 2, 5}:

$$2 + 2 * t = 1 + 2 * s \Rightarrow$$
$$t = \frac{2 * s - 1}{2} \tag{8}$$

- { 3, 6}:

$$3 + 3 * t = 1 + 2 * s \Rightarrow$$
$$t = \frac{2 * s - 2}{3} \tag{9}$$

Από 7 και 8 έχουμε:

$$2 * 2 * t = 2 * s - 1 \Rightarrow 4 * s - 2 * s = -1 \Rightarrow 2 * s = -1 \Rightarrow$$
$$s = \frac{1}{2} \tag{10}$$

και από τις 7 και 10 έχουμε

$$t = -1 \tag{11}$$

Η μοναδικότητα των t και s εξασφαλίζει ότι οι ευθείες τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο, το οποίο είναι το $(0,0,0)$.

Ασκηση 2:

Ψάχνουμε να βρούμε μία ευθεία e_1 η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{w} =< x, y, z >$ και περνάει από το σημείο $(0,0,0)$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{w}$ θα πρέπει να είναι κάθετο στο $\overrightarrow{v} =< 2, 3, 4 >$. Δηλαδή Θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι 0, άρα:

$$\overrightarrow{w} * \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow < x - x_0, y - y_0, z - z_0 > * < 2, 3, 4 > \Rightarrow$$
$$2 * x + 3 * y + 4 * z = 0 \tag{12}$$

Η εξίσωση 12 είναι αυτή του επιπέδου πάνω στο οποίο ανήκει η ζητούμενη ευθεία e_1. Μία πιθανή ευθεία είναι η $< 0,0,0 > +t < 4, -4, 1 >$.

Άσκηση 3:

Έστω $\overrightarrow{w} =< x, y, 0 >$ το ζητούμενο διάνυσμα που είναι κάθετο στο $\overrightarrow{v} =< 1, 1, 0 >$ και ανοίκει στο επίπεδο $z = 0$. Από την καθετότητα των δύο διανυσμάτων έχουμε:

$$\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{w} * \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow x * 1 + y * 1 = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

Από τον τύπο υπολογισμού του μέτρου διανύσματος έχουμε

$$|\overrightarrow{w}| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow x^2 + (-x)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Τα δύο διανύσματα που είναι κάθετα με το $< 1, 1, 0 >$ και ανήκουν στο επίπεδο $z = 0$ είναι τα $< \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 >$ και $< -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 >$.

Άσκηση 4:

Το ζητούμενο επίπεδο καθορίζεται από το σημείο $A(1,1,1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{w} =< x, y, z >$. Θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα $R = \begin{bmatrix} \text{x-1} & \text{y-1} & \text{z-1} \\ \text{1-1} & \text{1-1} & \text{0-1} \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ να είναι ίση με 0. Μετά από ανάλυση κατά την δεύτερη γραμμή παίρνουμε $Det_R = -1 * \begin{bmatrix} \text{x-1} & \text{y-1} \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -1 * [3*(x-1) - 2*(y-1)] = 0 \Rightarrow -1*(3*x - 2*y - 1) = 0 \Rightarrow$

$$2*y - 3*x + 1 = 0 \tag{13}$$

Η εξίσωση 13 είναι η ζητούμενη.

Άσκηση 5:

Από τις εξισώσεις της ευθείας e_1 έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$x = 1 + t \tag{14}$$

$$y = 1 + t \tag{15}$$

$$z = 1 + 2t \tag{16}$$

και από την ευθεία e_2:

$$x = s \tag{17}$$

$$y = s \tag{18}$$

$$z = 2 - s \tag{19}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις { 14, 17}, { 15, 18} και { 16, 19} μεταξύ τους, παίρνουμε τα παρακάτω

$$1 + t = s$$

$$1 + t = s$$

$$1 + 2t = 2 - s$$

Ο πίνακας που ορίζεται από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και η ορίζουσα αυτού είναι η

$$D = 1 - (-1)*2 = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

οπότε και το σύστημα έχει μοναδική λύση και οι δύο ευθείες e_1 και e_2 έχουν ένα σημείο τομής. Τα διανύσματα των δύο ευθειών είναι τα $\overrightarrow{w} =< 1, 1, 2 >$ και $\overrightarrow{v} =< 1, 1, -1 >$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι

$$< 1, 1, 2 > * < 1, 1, -1 >= 1*1 + 1*1 + 2*(-1) = 0$$

οπότε και οι δύο ευθείες τέμνονται κάθετα.

Άσκηση 5
Θέλουμε να δείξουμε (1) ότι οι ευθείες τέμνονται και (2) ότι είναι κάθετες η μία στην άλλη.

(1) Από τις εξισώσεις των δύο ευθειών παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + t = s \\ 1 + t = s \\ 1 + 2t = 2 - s \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 + t = s \\ s = 1 - 2t \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ s = 1 \end{array}$$

Άρα, και οι δύο τέμνονται στο σημείο (1, 1, 1) (προκύπτει μετά από αντικατάσταση στις εξισώσεις της ε1 ή της ε2).

(2) Οι εξισώσεις των δύο ευθειών μπορούν να γραφτούν και ως:
(ε1) $<x, y, z> = <1, 1, 1> + t<1, 1, 2>$
(ε2) $<x, y, z> = <0, 0, 2> + s<1, 1, -1>$

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $<1, 1, 2>$ και $<1, 1, -1>$ είναι:
$<1, 1, 2><1, 1, -1> = 1 + 1 -2 = 0$
Άρα, τα δύο διανύσματα είναι κάθετα. Άρα, και οι ευθείες (ε1) και (ε2) τέμνονται κάθετα στο σημείο (1, 1, 1).

Άσκηση 6
Το διάνυσμα $<3, -1, 2>$ είναι κάθετο στο επίπεδο $3x - y + 2z = 0$. Άρα, η ευθεία του προβλήματος είναι η
(ε) $<x, y, z> = <1, 1, 1> + t<3, -1, 2>$
ή
$x = 1 + 3t$
$y = 1 - t$
$z = 1 + 2t$

Το σημείο τομής με το δεύτερο επίπεδο πού δίνεται είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 20 \\ x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right\} (1 + 3t) + 2(1 - t) + 3(1 + 2t) = 20 \Rightarrow 6 + 7t = 20 \Rightarrow t = 2$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το (7, -1, 5).