Διάλεξη #5
Όρια & Συνέχεια Συναρτήσεων

Ανακοινώσεις

- Παρασκευή 6/10, **4-6, ΔΙΑΛΕΞΗ**
- Τρίτη 10/10, **κενό**
- Πέμπτη 12/10, **ΦΡΟΝΤΗΣΤΗΡΙΟ #1**
- Παρασκευή 13/10, **ΔΙΑΛΕΞΗ**

Αντικείμενα διάλεξης

- Κανόνες ορίων
- Πλευρικά/Ολικά όρια
- Συνέχεια συναρτήσεων

Ακριβής ορισμός του ορίου

Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το c. Το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο c είναι ο αριθμός L

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

Εύρεση ανοχής δ

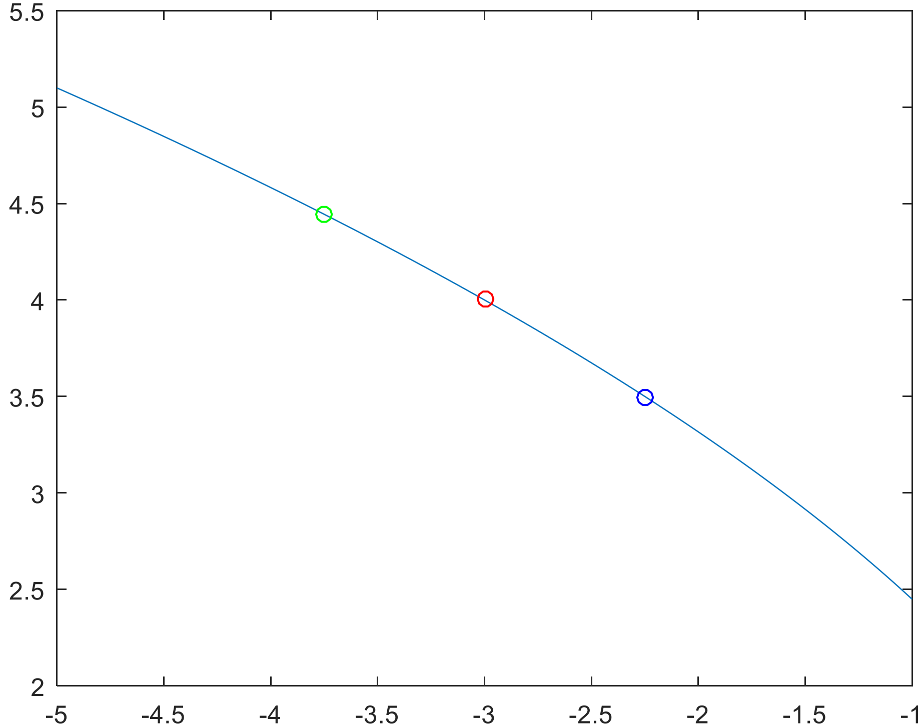
Διαδικασία εύρεσης ενός $\delta > 0$ τέτοιου ώστε $|f(x) - L| < \varepsilon$ οποτεδήποτε $0 < |x - c| < \delta$

1. Επιλύουμε την ανισότητα $|f(x) - L| < \varepsilon$ για να βρούμε ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) που να περιέχει το c στο οποίο η ανισότητα ισχύει $\forall x \neq c$
2. Βρίσκουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το ανοιχτό διάστημα $(c - \delta, c + \delta)$ με κέντρο το c να βρίσκεται εντός του (a, b).
   Η ανισότητα $|f(x) - L| < \varepsilon$ θα ισχύει $\forall x \neq c$ εντός αυτού του δ-διαστήματος

Παράδειγμα

(α) Να βρεθεί το $\lim_{x \to -3} f(x) = \sqrt{1-5x}$

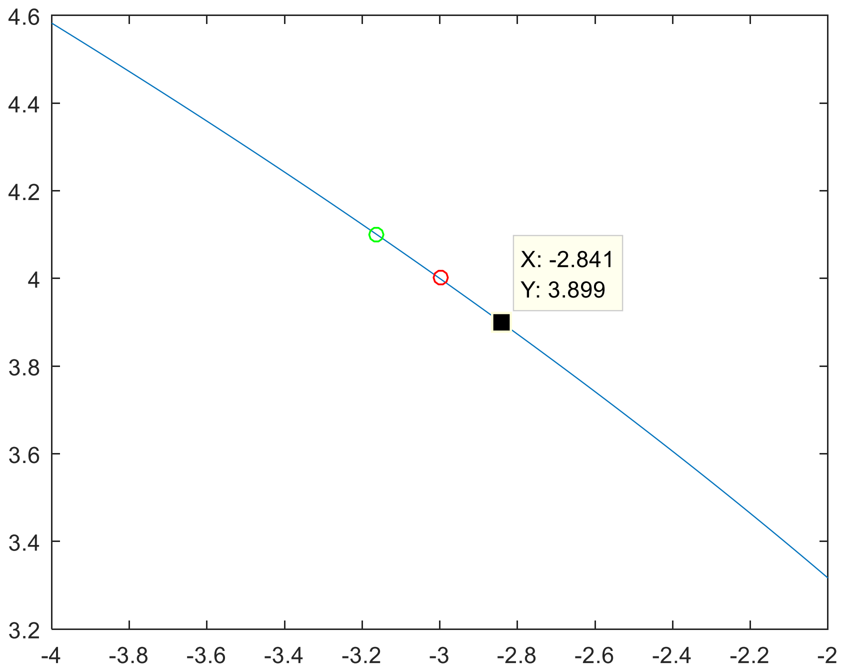
(β) Να βρεθεί δ>0 για $\varepsilon = 0.5$ ώστε να ισχύει το όριο



Παράδειγμα

(α) Να βρεθεί το $\lim_{x \to -3} f(x) = \sqrt{1 - 5x}$

(γ) Να βρεθεί δ>0 για $\varepsilon = 0.1$ ώστε να ισχύει το όριο



Παράδειγμα

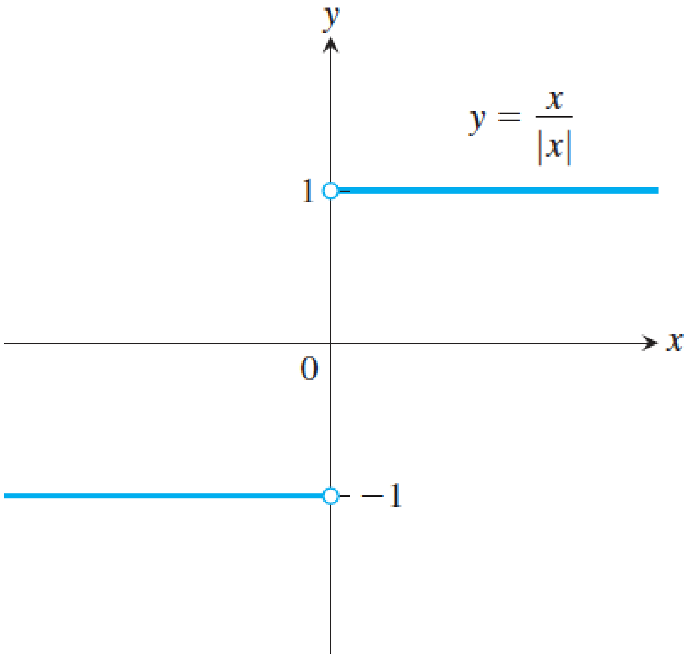
Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{1 - 5x} \neq 6$, για $\varepsilon = 1$

Κανόνες ορίων

Έστω $L, M, c, k \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to c} f(x) = L$ $\lim_{x \to c} g(x) = M$

- $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c}\big(f(x)\big) + \lim_{x \to c}\big(g(x)\big) = L + M$
- $\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$
- $\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$
- $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- $\lim_{x \to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M},\ M \neq 0$
- $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [L]^n$ όπου n $θετικός$ $ακαιρεος$
- $\lim_{x \to c}[\sqrt[n]{f(x)}] = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$

Πλευρικά όρια



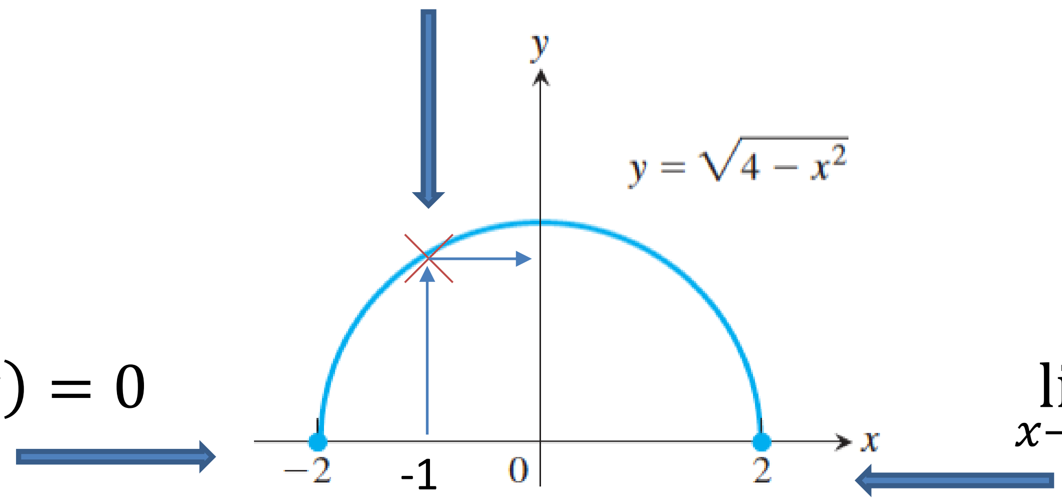
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Πλευρικά όρια

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$$

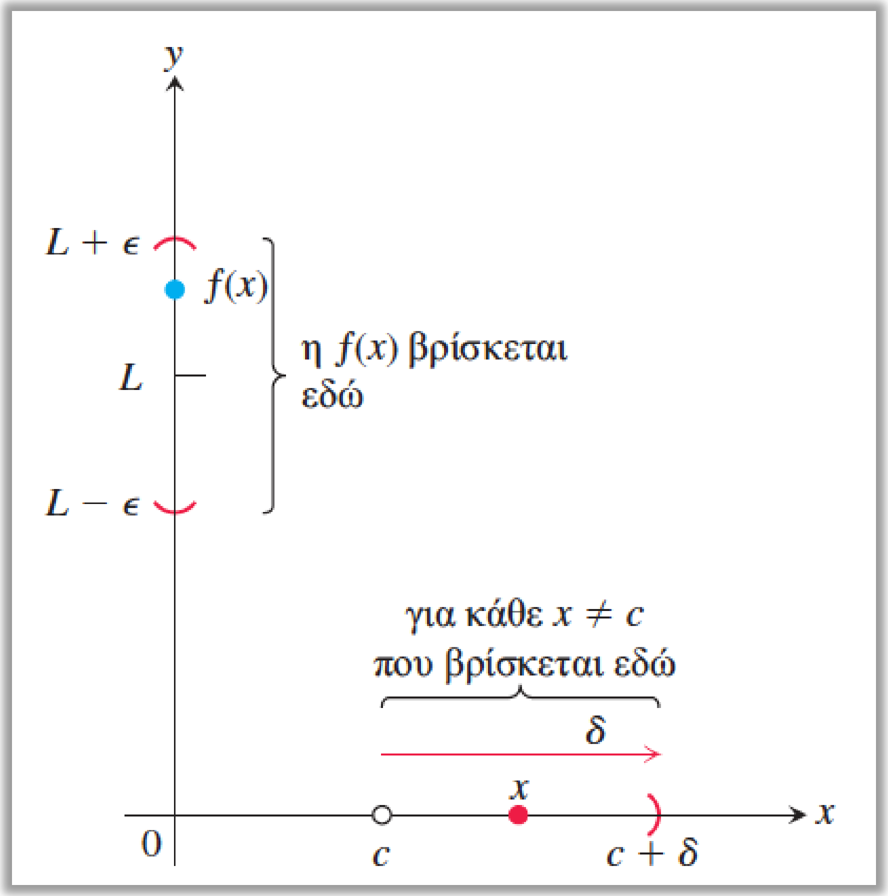


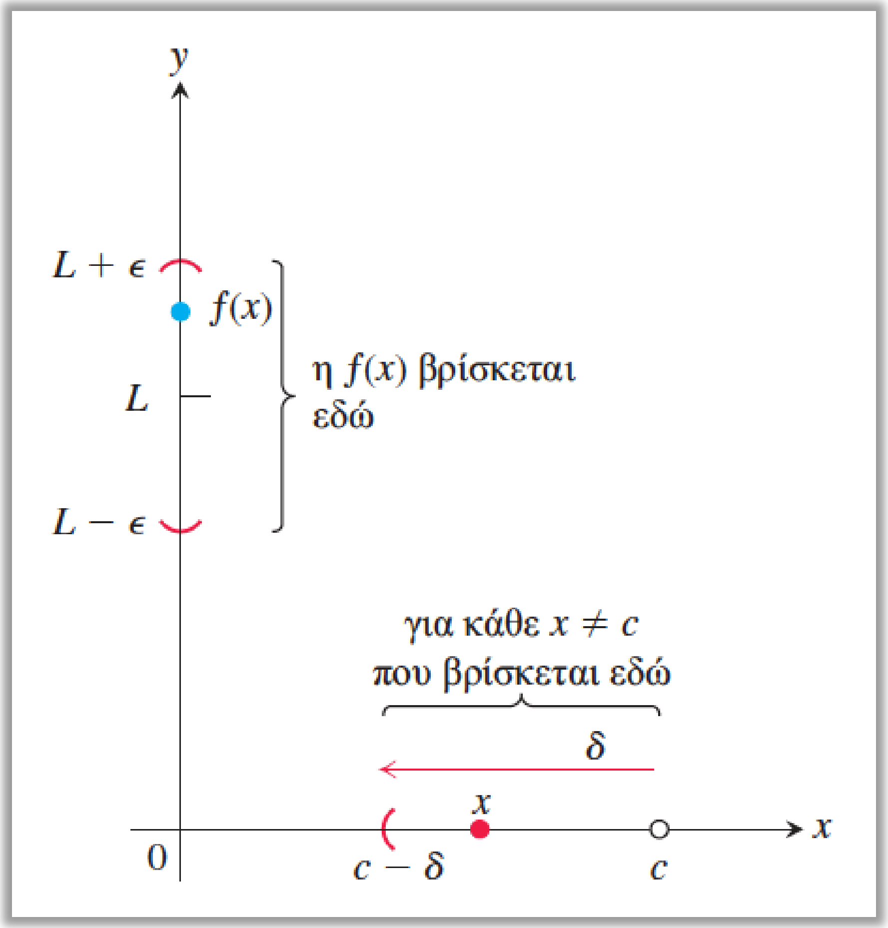
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$$

$$\nexists \lim_{x\to -2^-} f(x)$$

$$\nexists \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Ακριβής ορισμός του πλευρικού ορίου



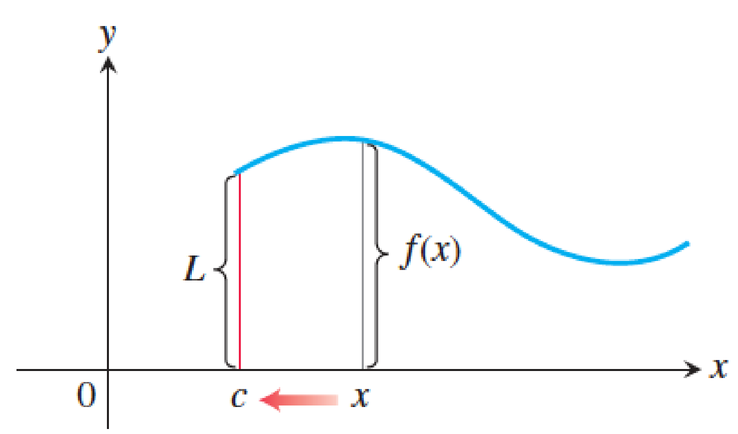


Ακριβής ορισμός του πλευρικού ορίου

Έστω ότι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ περιέχει ένα διάστημα (c, d) στα δεξιά του c. Η $f(x)$ έχει δεξιό όριο L στο c

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - L| < \varepsilon$ οποτεδήποτε $c < x < c + \delta$



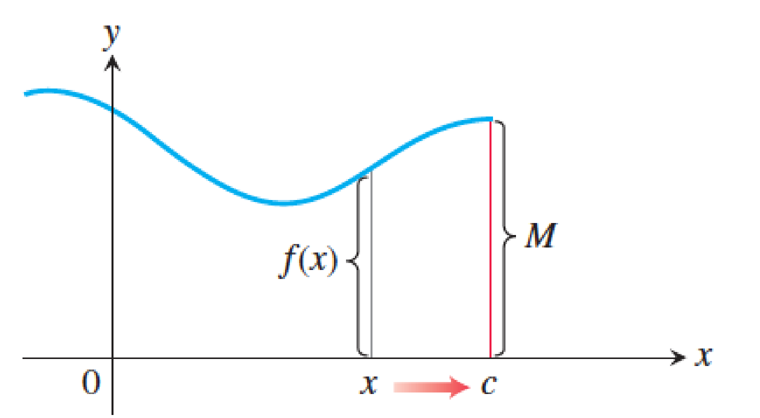
(α) $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Ακριβής ορισμός του πλευρικού ορίου

Έστω ότι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ περιέχει ένα διάστημα (c, d) στα αριστερά του c. Η $f(x)$ έχει αριστερό όριο L στο c

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

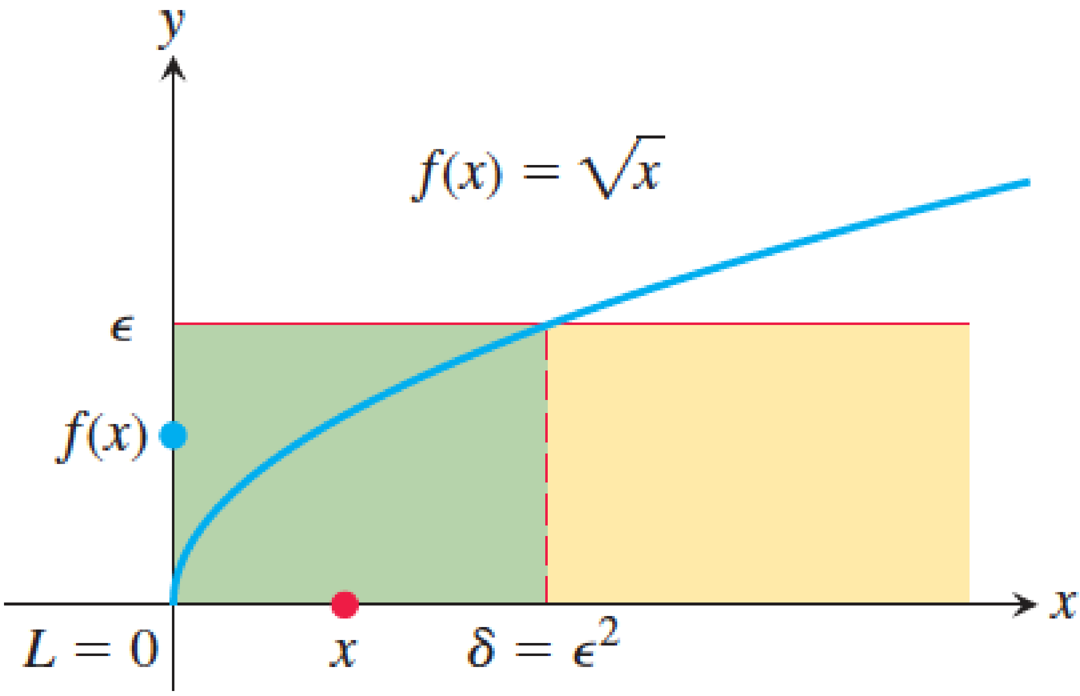
αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - L| < \varepsilon$ οποτεδήποτε $c - \delta < x < c$



(β) $\lim_{x \to c^-} f(x) = M$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$



Ολικό όριο από πλευρικά όρια

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c (εκτός ίσως από το ίδιο το c).

Τότε η $f(x)$ έχει όριο x καθώς το τείνει στο c αν και μόνο αν έχει αριστερό και δεξιό όριο στο c και τα πλευρικά αυτά όρια είναι ίσα:

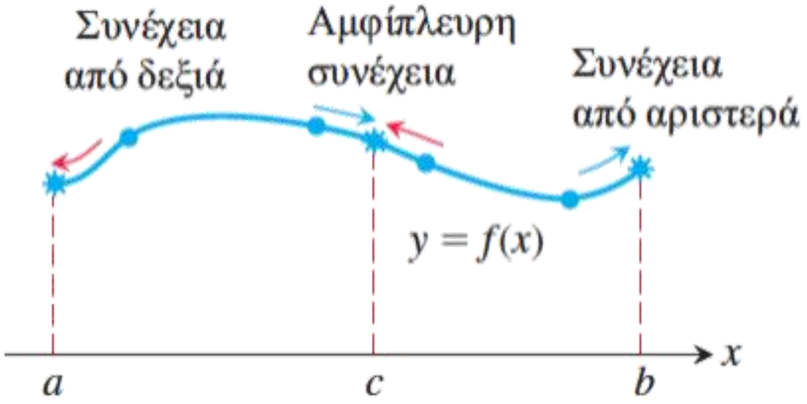
$$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L} \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = \mathrm{L} \text{ και } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Συνέχεια συναρτήσεων

Συνέχεια

Έστω $c \in \mathbb{R}$ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f(x)$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο c αν $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$
- Η $f(x)$ είναι συνεχής από δεξιά στο c αν $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$
- Η $f(x)$ είναι συνεχής από αριστερά στο c αν $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$



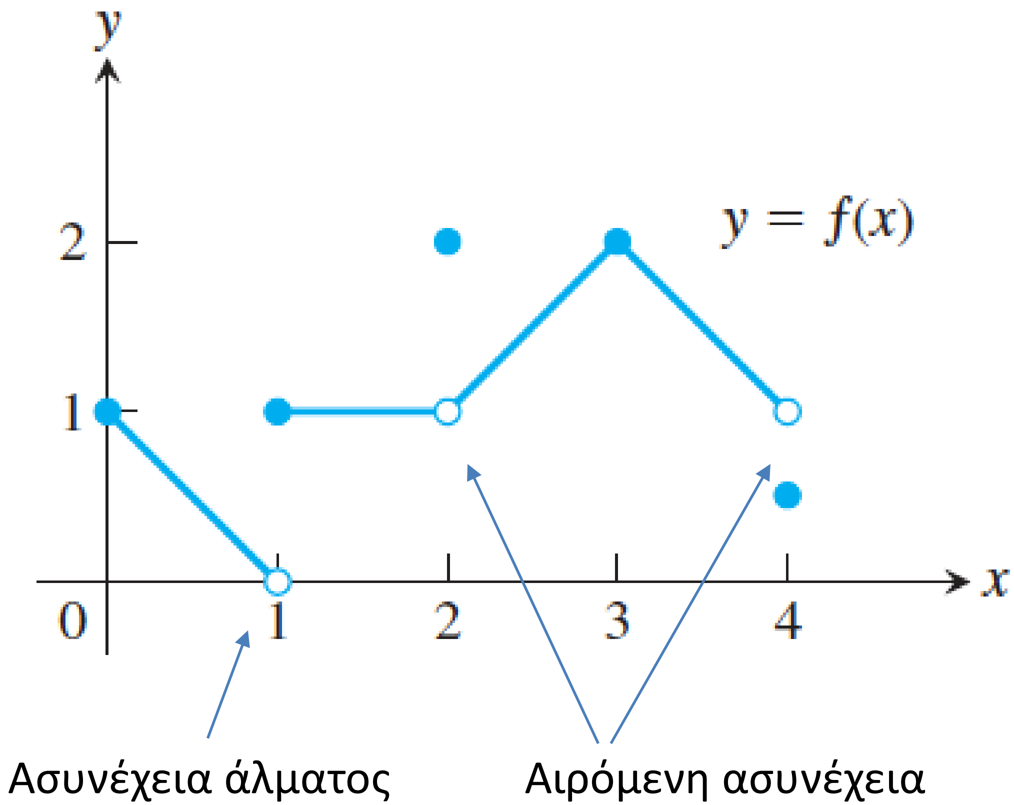
Κριτήρια συνέχειας

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $\mathrm{x} = c$ αν και μόνο αν (iff)

- Υπάρχει το $f(c)$ (το c ανήκει το πεδίο ορισμού)
- Υπάρχει το $\lim_{x \to c} f(x)$ (υπάρχει το όριο στο c)
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (το όριο=με την τιμή της συνάρτησης)

Παράδειγμα

- Για ποιες τιμές του x η f(x) δεν είναι συνεχής



Παράδειγμα

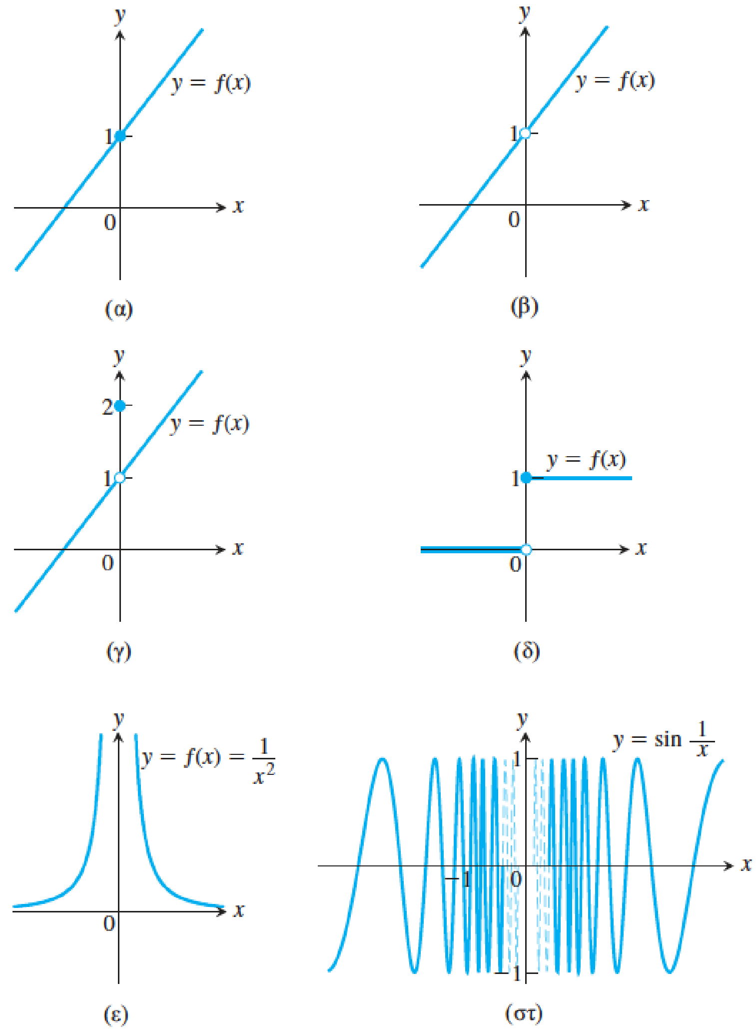
Αιρόμενη ασυνέχεια

Αιρόμενη ασυνέχεια

Ασυνέχεια άλματος

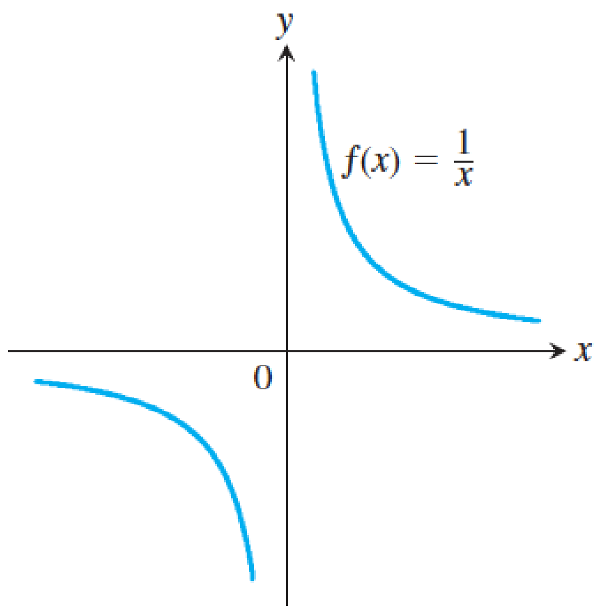
Άπειρη ασυνέχεια

Ασυνέχεια ταλάντωσης



Συνέχεια και πεδίο ορισμού

Η συνέχεια είναι ιδιότητα της συνάρτησης και πρέπει να ισχύει σε όλο το πεδίο ορισμού της.



Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχής στο $x = c$, τότε και οι ακόλουθοι συνδυασμοί είναι συνεχείς στο c

- Άθροισμα $f(x) + g(x)$
- Διαφορές $f(x) - g(x)$
- Πολλαπλασιασμοί με σταθερές $kf(x)$ όπου k σταθερά
- Γινόμενα $f(x) \cdot g(x)$
- Πηλίκα $f(x)/g(x)$
- Δυνάμεις $f^n(x)$ όπου n θετικός ακέραιος ($\mathbb{Z}^+$)
- Ρίζες $\sqrt[n]{f(x)}$ για $n \in \mathbb{Z}^+$ και να ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το c

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

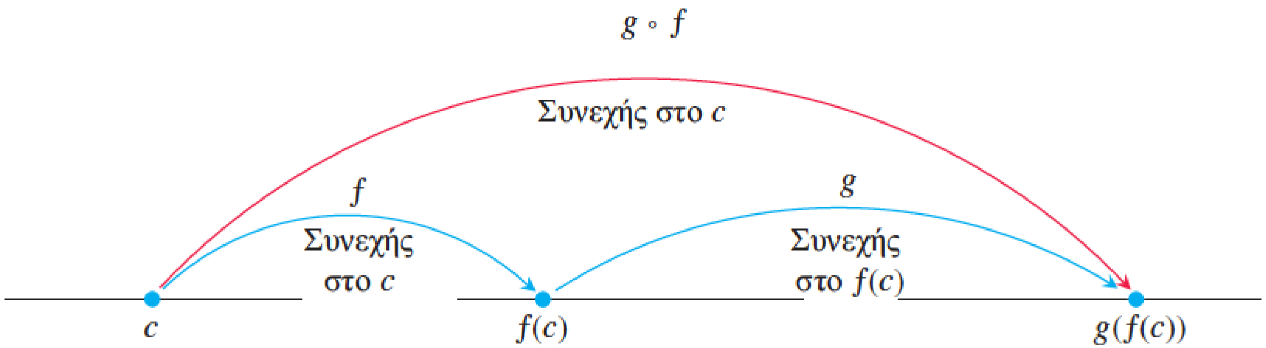
Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
είναι συνεχής διότι $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$

Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε η $\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής διότι $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$ για $Q(c) \neq 0$

Η ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ και οι σταθερές συναρτήσεις $f(x) = k$ είναι παντού συνεχής

Συνέχεια σύνθετων συναρτήσεων

Αν η f είναι συνεχής στο c και η g είναι συνεχής στο $f(\mathrm{c})$ τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο c



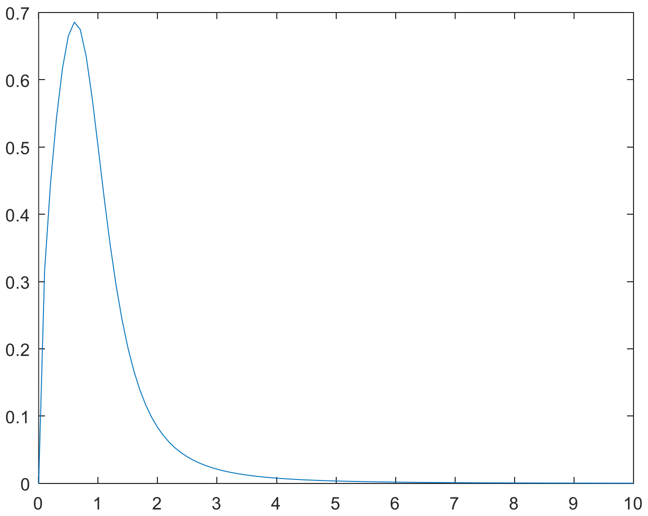
Αν $\lim_{x \to c} f(x) = b$ και η g είναι συνεχής στο b τότε

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b)$$

Παραδείγματα

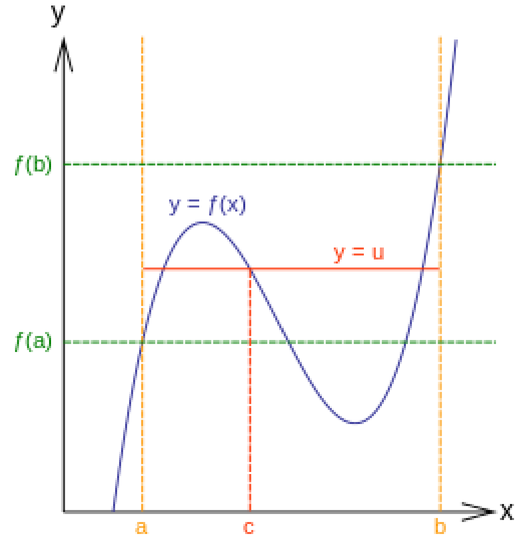
Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχής

- $y_1 = |x|$
- $y_2 = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$
- $y_3 = \frac{x^{2/4}}{1+x^4}$



Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και αν $f(a) < u < f(b)$ τότε υπάρχει c ∈ $[a, b]$ για το οποίο $f(c) = u$



Αν $u = 0$ γνωστό ως θεώρημα Bolzano

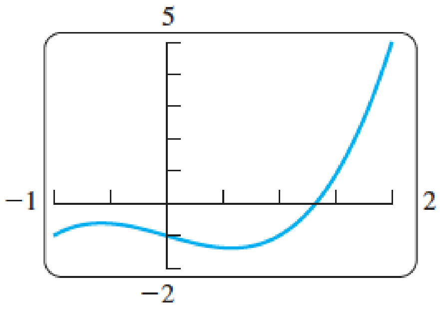
Ρίζες εξίσωσης

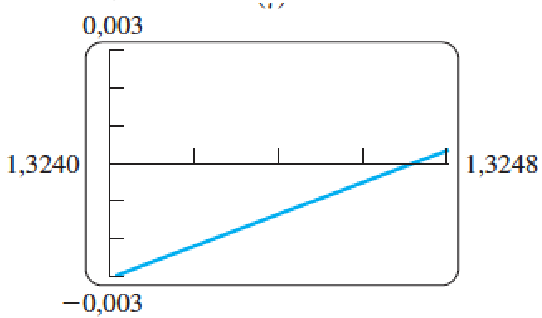
Κάθε λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ ονομάζεται ρίζα της εξίσωσης.

Αν η f είναι συνεχής, από το Θ.Ε.Τ. , κάθε διάστημα όπου η f αλλάζει πρόσημο, περιέχει (τουλάχιστον) μια ρίζα

Π.χ. Η εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$ έχει μια ρίζα στο [1,2]

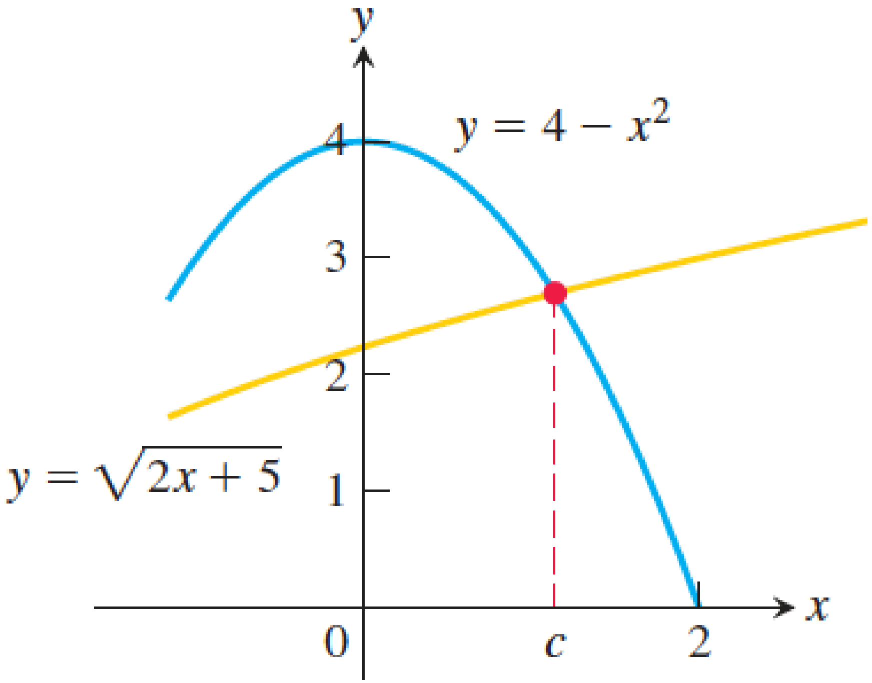
- Έστω $f(x) = x^3 - x - 1$ με $f(1) = -1$ και $f(2) = 5$





Παράδειγμα

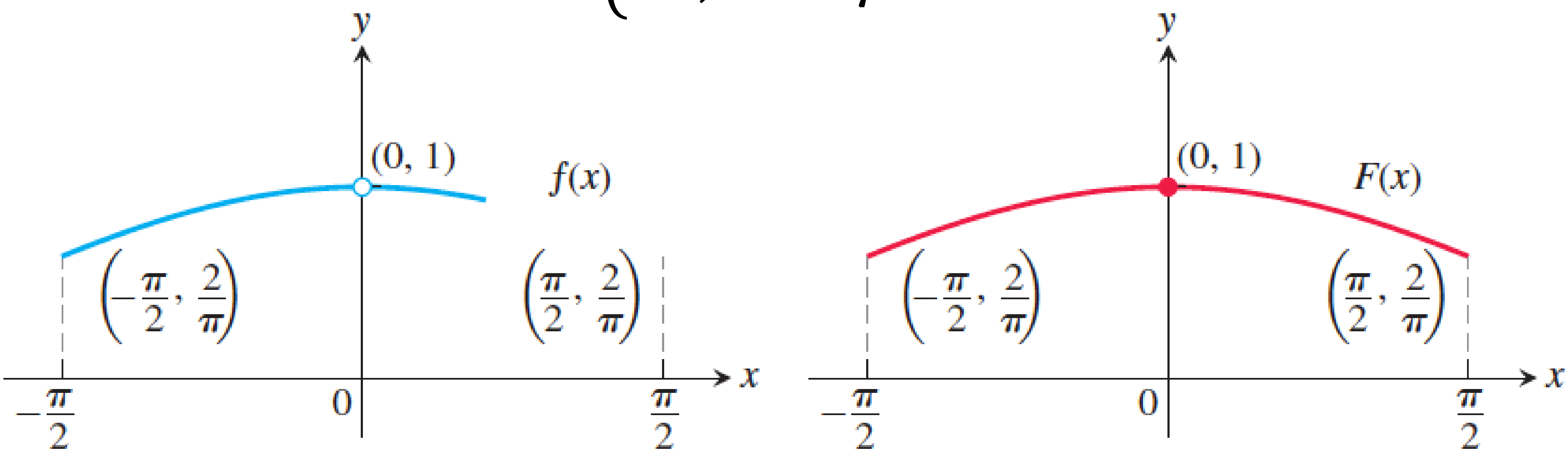
Χρησιμοποιώντας το Θ.Ε.Τ να δειχθεί ότι η $\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$ έχει ρίζα



Συνεχής επέκταση συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο c αλλά υπάρχει το όριο σε αυτό το σημείο, μπορούμε να ορίσουμε μια «επέκταση»

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{για } x \text{ στο Π.Ο} \\ L, \quad \text{για } x = c \end{cases}$$



Παράδειγμα

Για ποια τιμή G(4) η επέκταση της $g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ είναι συνεχής στο $\mathrm{x} = 4$

Για ποιες τιμές των a και b η

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b & , \quad 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε x

Whiteboard

N.δ.ο

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{1-5x} \neq 6 = L$$

$\epsilon = 1$ $\quad |f(x) - 6| < \epsilon \Rightarrow -1 < \sqrt{1-5x} - 6 < 1 \Rightarrow$

$25 < 1 - 5x < 49 \Rightarrow -9,6 < x < -4,8$

1^o

$|x - (-3)| < \delta \Rightarrow -\delta < x + 3 < \delta \Rightarrow -\delta - 3 < x < -3 + \delta$

2^o

$-\delta_1 - 3 = -9,6 \Rightarrow \delta_1 + 3 = 9,6 \Rightarrow \delta_1 = 6,6$

$\delta - 3 = -4,8 \Rightarrow \delta_2 = -1,8$

$\min(\delta_1, \delta_2) = -1,8 < 0$ άτοπο

$\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$, ν.δ.ο

$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

$\epsilon > 0 \quad \forall x : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L+M)| < \epsilon$

$|(f(x) - L) + (g(x) - M)| \le |f(x) - L| + |g(x) - M|$

$|x + y| \le |x| + |y|$

$\exists\, \delta_1 > 0 \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ $\quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$

$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ $\quad \delta_2 > 0 \quad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$

Ν.δ.ο $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

$1^{\text{ο}}$: ϵ : $|\sqrt{x} - 0| < \epsilon$ όταν $0 < \underbrace{x < \delta}$

$|\sqrt{x}| < \epsilon \Rightarrow \sqrt{x} < \epsilon \Rightarrow x < \epsilon^2$

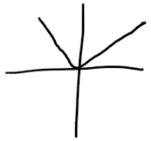
$x < \delta$

$\delta = \epsilon^2$

$y = |x|$

- $x \geq 0 \Rightarrow y = |x| = x$ πολ. 1ο $\to$ συνεχής
- $\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$
- $x < 0 \Rightarrow y = -x$ πολ. 1ο $\to$ συνεχ.

  $\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$



$$y_3 = \frac{x^{2\cdot 4}}{1+x^4} = \frac{f(x)}{\omega(x)}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2}$$

$$\omega(x) = 1 + x^4 \rightarrow$$ κ.δ. Ι:

$h(x) = x^2$ ✓

$g(x) = \sqrt[4]{x}$ ✓

$f(x) = g(h(x)) = \sqrt[4]{x^2}$

$h(x) : [-\infty, \infty]$

$g(x) : [0, \infty]$

$f(x) : [0, +\infty)$

$[0, \infty)$

$$\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$$

$$f(x) = \sqrt{2x+5} + x^2 - 4 = 0$$

$f(0) \approx -1{,}76 \longrightarrow [0,2]$ $\exists$ ρίζα 8

$f(2) = 3$

$g(x) = \sqrt{2x+5}$ συνεχής $[-\frac{5}{2}, \infty)$

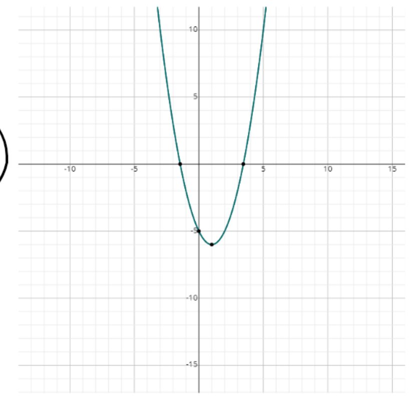
$h(x) = x^2 - 4$ —"— $(-\infty, \infty)$

$f(x) = g(x) + h(x)$ συνεχής 1

$y_2 = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$

$y = g(f(x))$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$ πολ. 2ου ✓

$g(x) = \sqrt{x}$ ρίζα και ✓



$f(x)$ συνεχ. $(-\infty, \infty)$ } $\rightarrow g(f(x))$

$g(x)$ συνεχ $[0, \infty)$

$f(x) \geq 0 \rightarrow (-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, \infty)$

$$g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2-3x-4} =$$

$\Delta = 25$

$x_{1,2} = 4, -1$

$$= \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}(x+1)} = \frac{x+4}{x+1}$$

$x \neq 4$ $\quad \lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x+4}{x+1} = \frac{8}{5}$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 4 \\ \frac{8}{5} & x = 4,\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , x \le 0 \\ x^2 + 3a - b & , 0 < x \le 2 \\ 3x - 5 & , x > 2 \end{cases}$$

$x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} ax + 2b = 2b$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + 3a - b = 3a - b$$

(1)

$x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + 3a - b = 4 + 3a - b$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 3x - 5 = 1$$

(2)

(1) $2b = 3a - b \Rightarrow a = b$

(2) $4 + 3a - b = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

$b = -\frac{3}{2}$