Διάλεξη #4

Όρια Συναρτήσεων

Ανακοινώσεις

- Παρασκευή 6/10, **4-6, ΔΙΑΛΕΞΗ**
- Τρίτη 10/10, **κενό**
- Πέμπτη 12/10, **ΦΡΟΝΤΗΣΤΗΡΙΟ #1**
- Παρασκευή 13/10, **ΔΙΑΛΕΞΗ**

Αντικείμενα διάλεξης

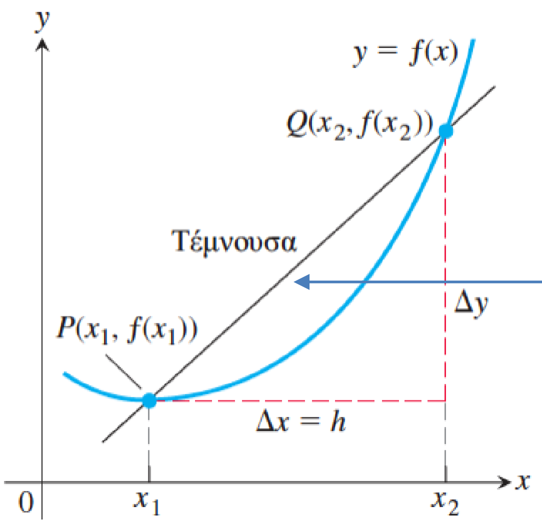
- Άτυπος ορισμός ορίων
- Ακριβής/Τυπικός ορισμός ορίων
- Κανόνες ορίων
- Πλευρικά/Ολικά όρια

- Συνέχεια συναρτήσεων

Μέσος ρυθμός μεταβολής

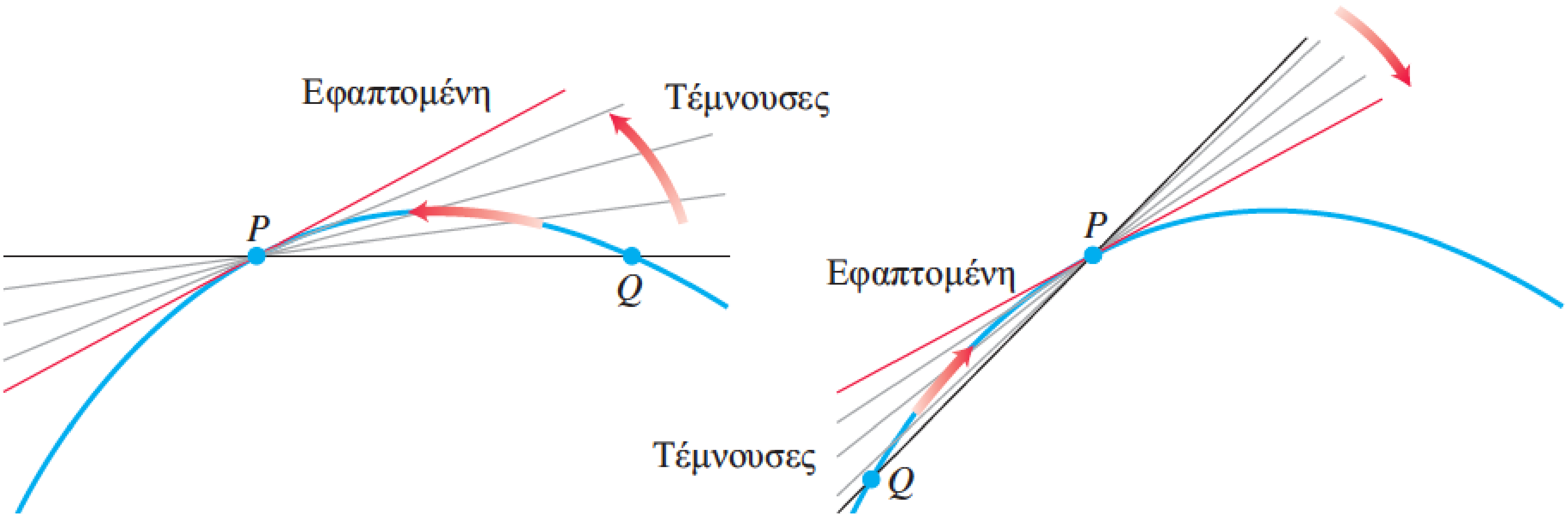
Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $y = f(x)$ ως προς x στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δίνεται από

$$\frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, h \neq 0$$



Κλίση της τέμνουσας

Κλίση καμπύλης



ΣΧΗΜΑ 2.3 Η εφαπτομένη της καμπύλης στο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση το όριο των κλίσεων των τεμνουσών καθώς $Q \to P$ από οποιαδήποτε πλευρά.

Άτυπος ορισμός ορίου

- Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται στο ανοικτό διάστημα εκατέρωθεν του σημείου c, εκτός στο ίδιο το c
- Αν η $f(x)$ πλησιάζει κοντά στην τιμή L για κάθε x αρκούντως κοντά στο c, λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο όριο L καθώς το x τείνει στο c

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Κανόνες ορίων

Έστω $L, M, c, k \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to c} f(x) = L$ $\lim_{x \to c} g(x) = M$

- $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$
- $\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$
- $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- $\lim_{x \to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M},\ M \neq 0$
- $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [L]^n$ όπου n $\theta\varepsilon\tau\iota\kappa$ό$\varsigma$ $\alpha\kappa\alpha\iota\rho\varepsilon o\varsigma$
- $\lim_{x \to c}[\sqrt[n]{f(x)}] = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$

Περιπτώσεις

Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων

Αν $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0$$

Όρια ρητών συναρτήσεων

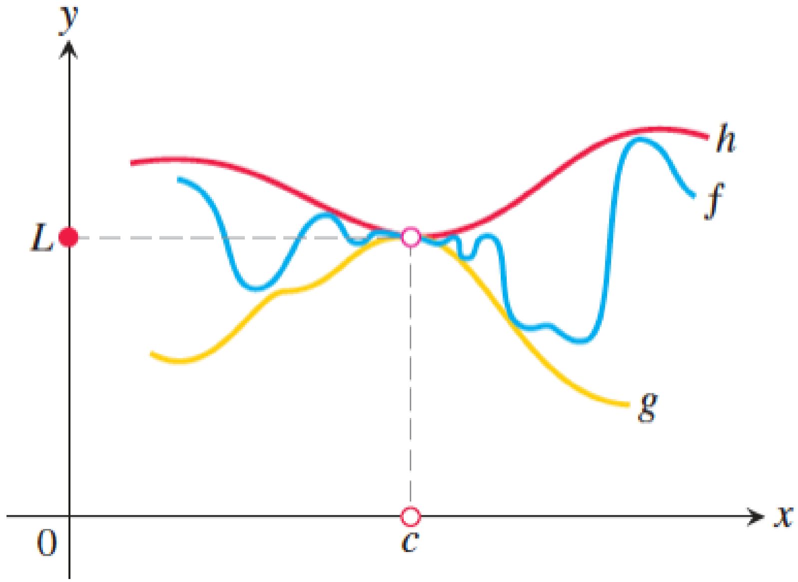
$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$ για $Q(c) \neq 0$

Θεώρημα «σάντουιτς»

Έστω ότι $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε x που ανήκει στο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c (ενδεχομένως εκτός του $x = c$). Αν ισχύει ότι

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

τότε $\lim_{x \to c} f(x) = L$



Ακριβής ορισμός του ορίου

Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το c. Το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο c είναι ο αριθμός L

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

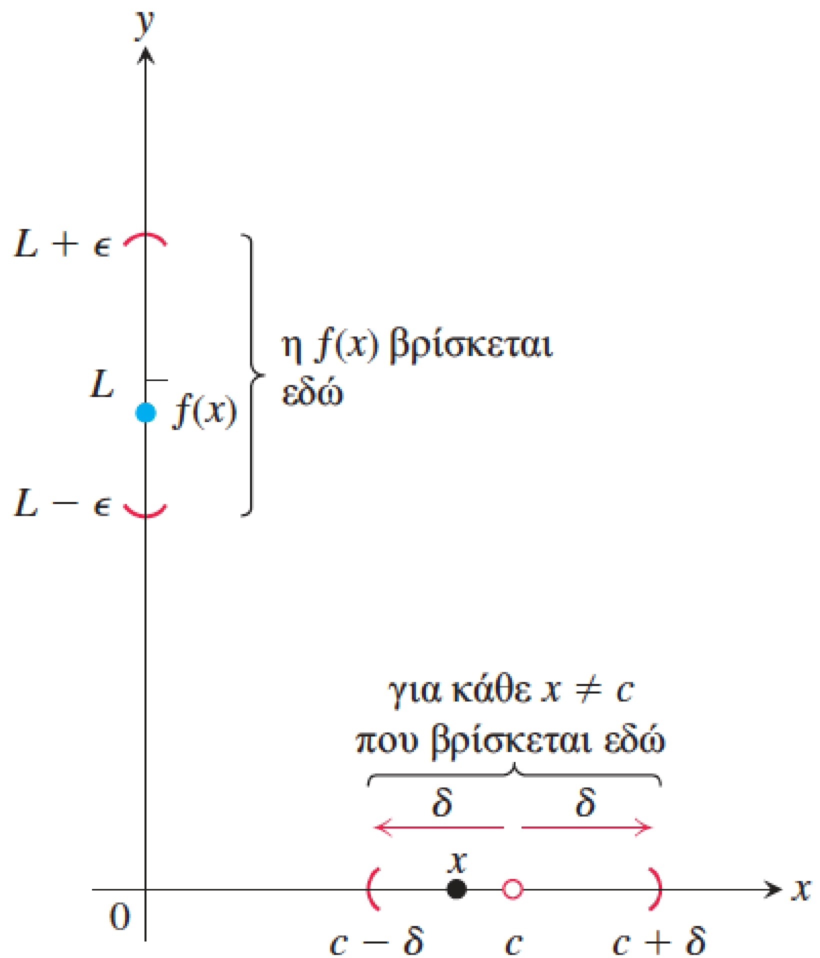
Ακριβής ορισμός του ορίου

Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το c. Το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο c είναι ο αριθμός L

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \, \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

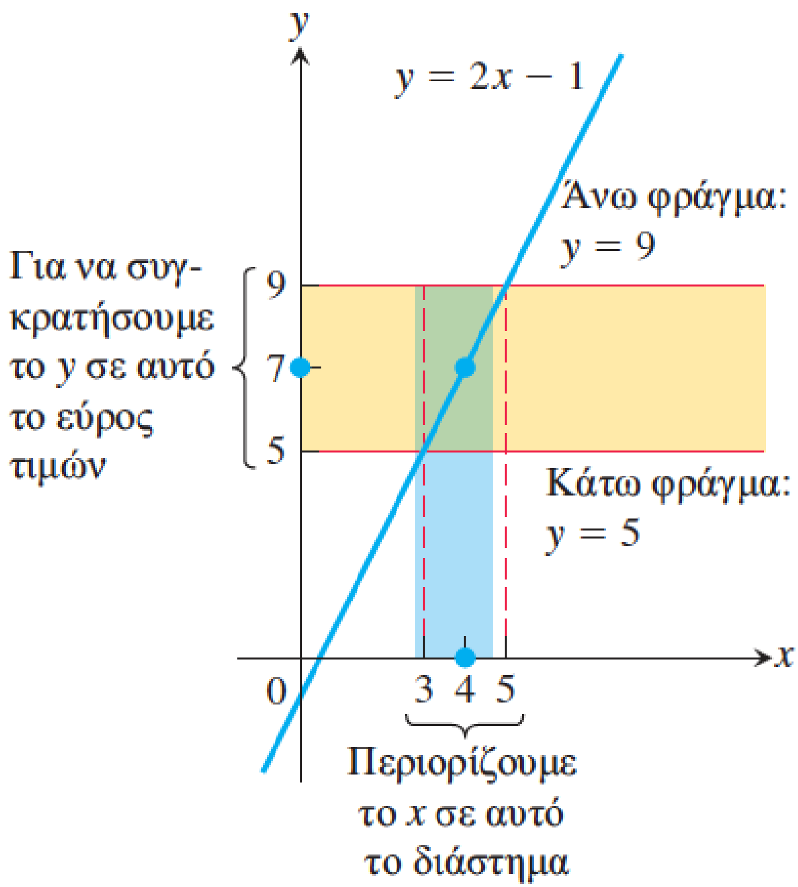
Ακριβής ορισμός του ορίου



Bernard Bolzano
1781-1848

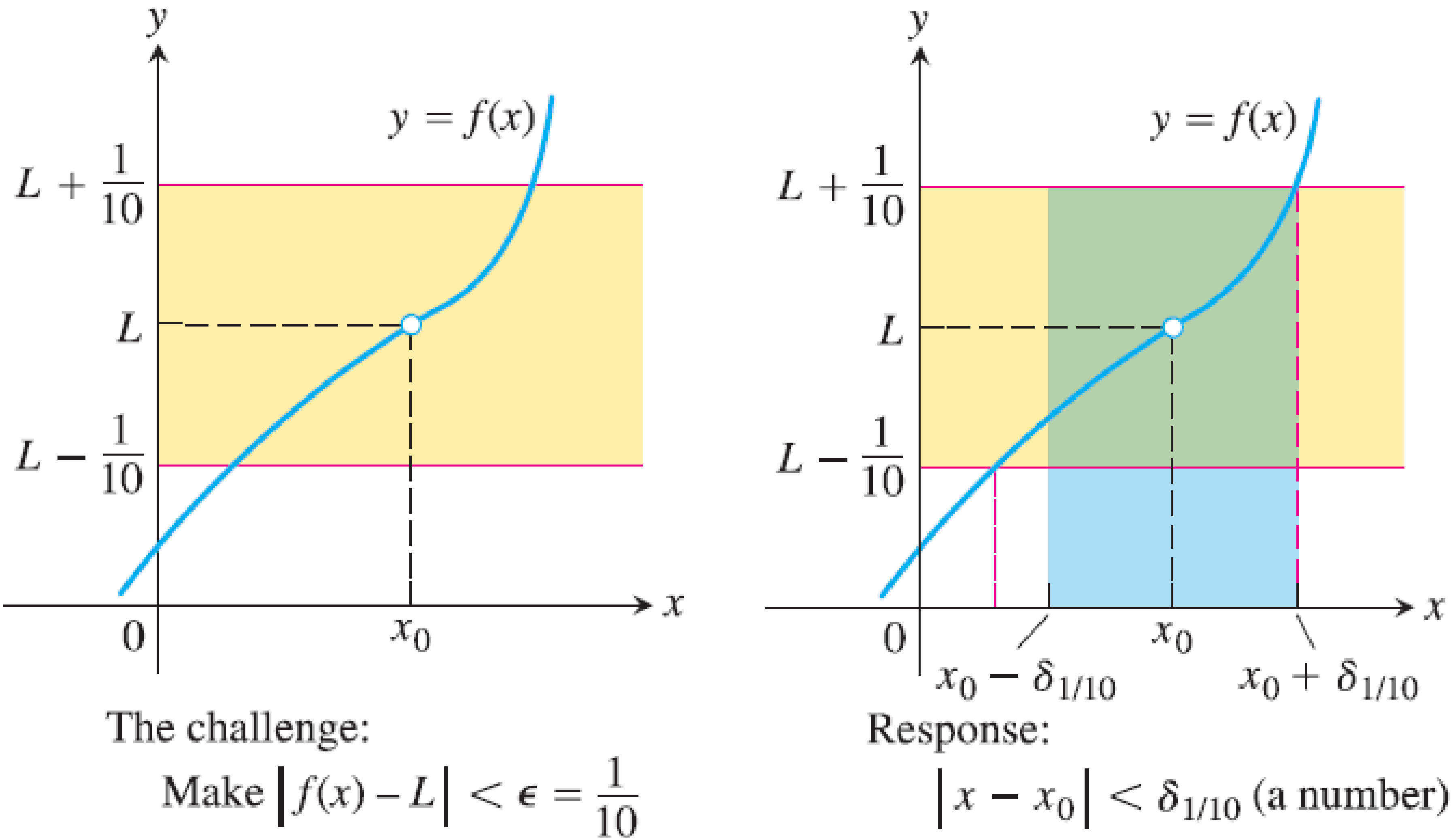
Augustin-Louis Cauchy
1789 –1857

Παράδειγμα

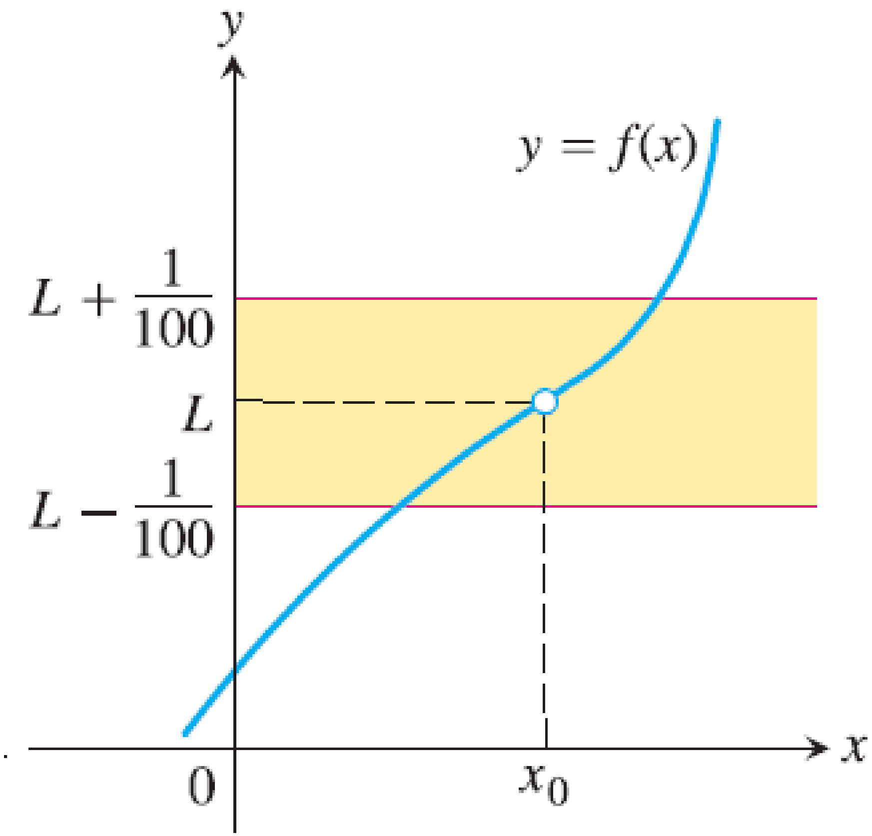


ΣΧΗΜΑ 2.15 Περιορίζοντας το x σε απόσταση μικρότερη της μίας μονάδας από το $x = 4$, καταφέρνουμε να συγκρατήσουμε το y σε απόσταση μικρότερη των δύο μονάδων από το $y = 7$ (Παράδειγμα 1).

Ακριβής ορισμός του ορίου

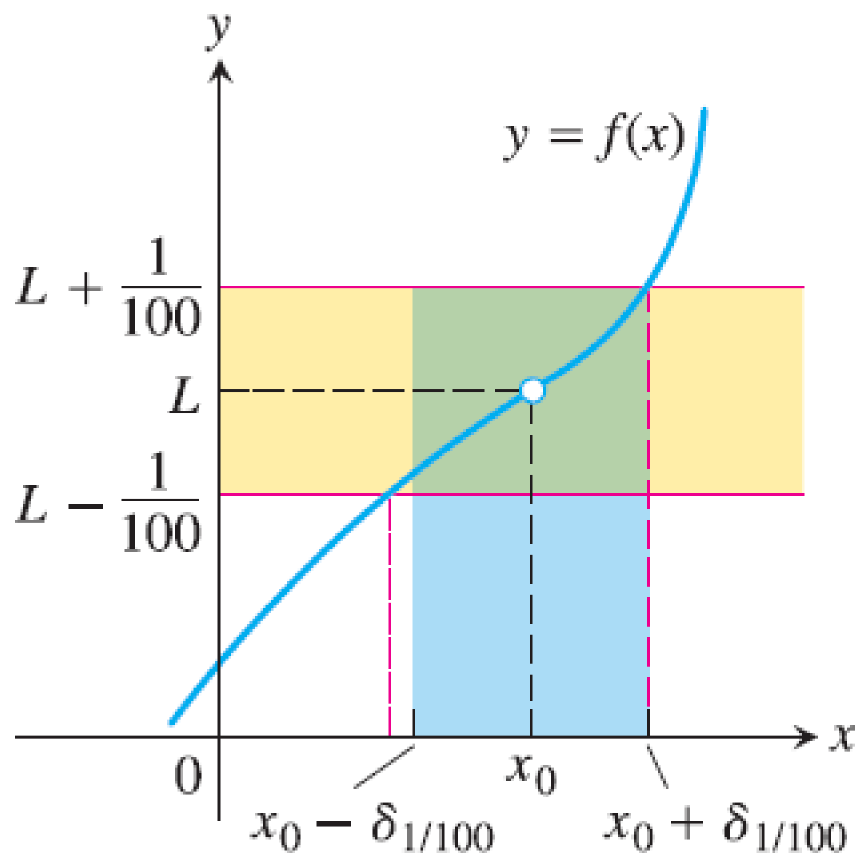


Ακριβής ορισμός του ορίου



New challenge:

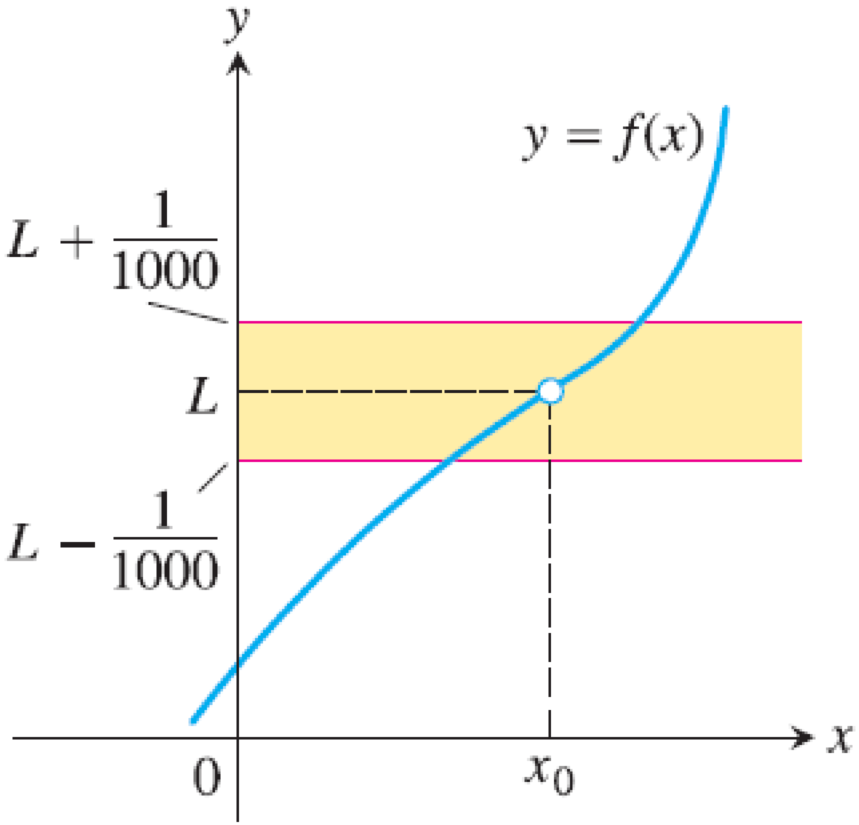
Make $\left|f(x) - L\right| < \epsilon = \dfrac{1}{100}$



Response:

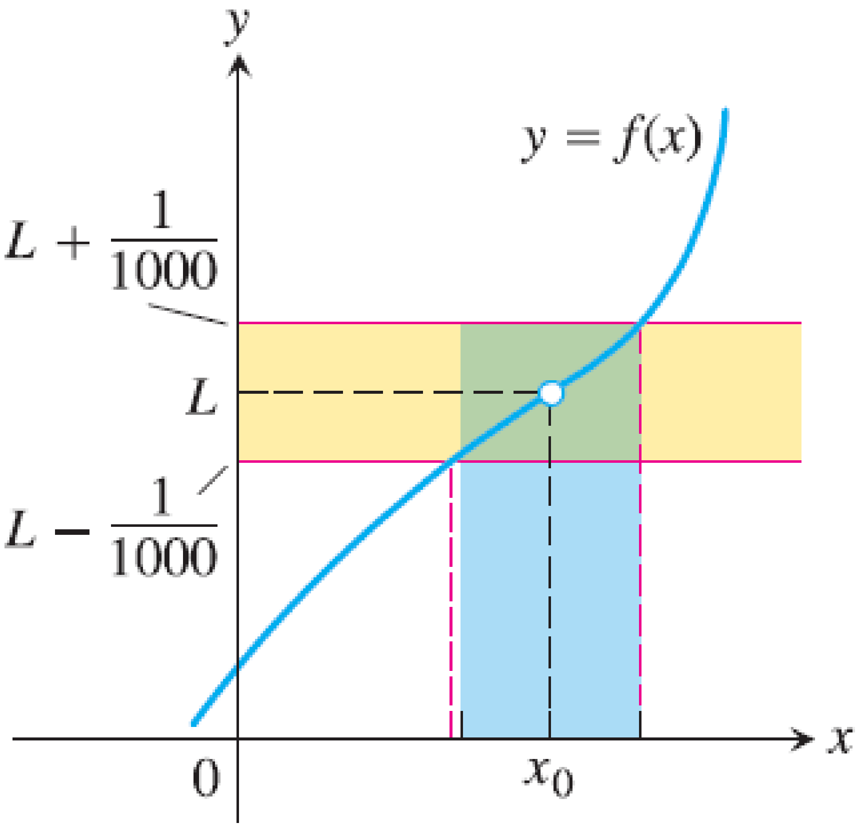
$\left|x - x_0\right| < \delta_{1/100}$

Ακριβής ορισμός του ορίου



New challenge:

$$\epsilon = \frac{1}{1000}$$



Response:

$$|x - x_0| < \delta_{1/1000}$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} x = c$

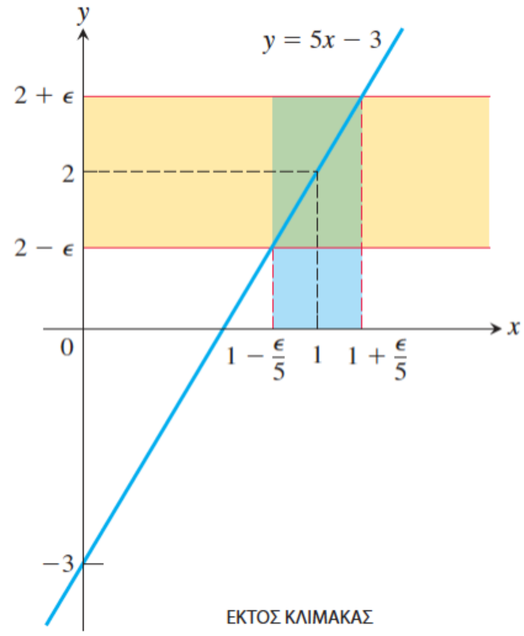
Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} k = k$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} x = c$

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} k = k$

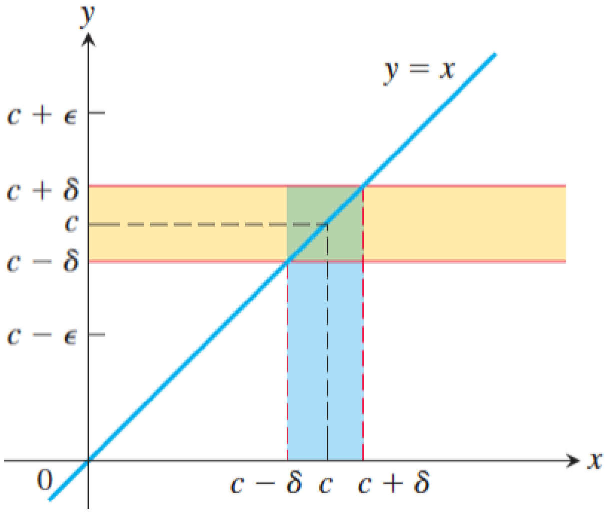


Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2$

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} x = c$

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} k = k$

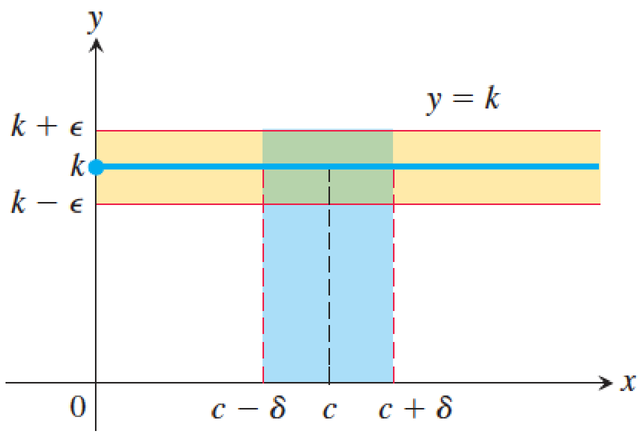


Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$

Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} x = c$

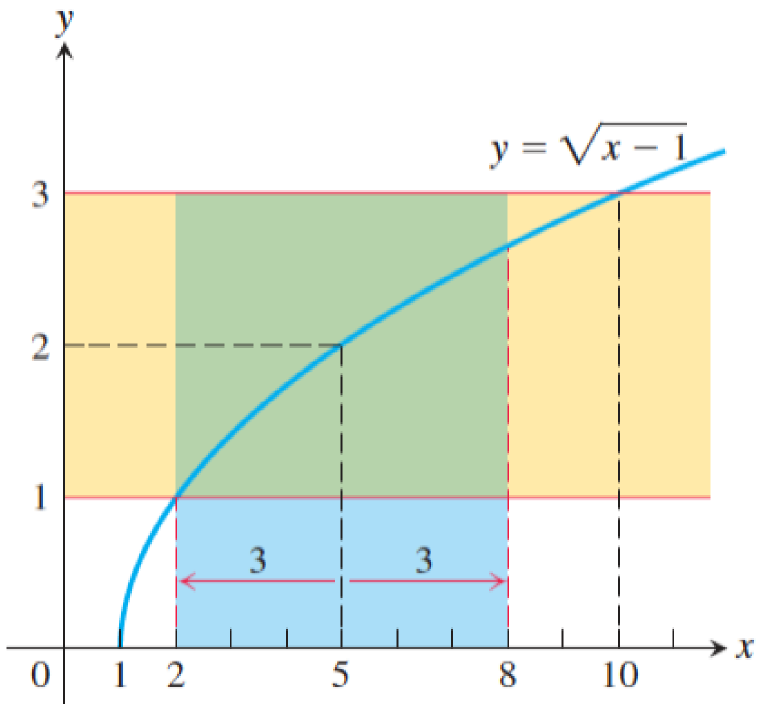
Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to c} k = k$

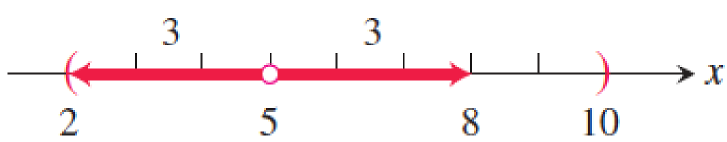


Παράδειγμα

Για $\varepsilon = 1$, βρείτε $\delta > 0$ το τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$$





Εύρεση ανοχής δ

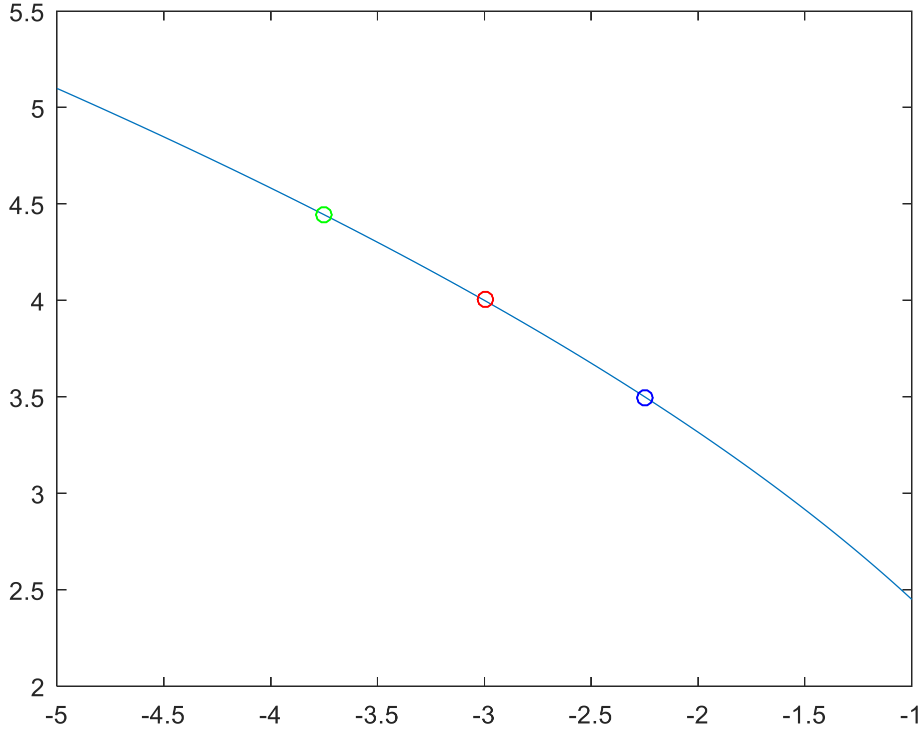
Διαδικασία εύρεσης ενός $\delta > 0$ τέτοιου ώστε $|f(x) - L| < \varepsilon$ οποτεδήποτε $0 < |x - c| < \delta$

1. Επιλύουμε την ανισότητα $|f(x) - L| < \varepsilon$ για να βρούμε ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) που να περιέχει το c στο οποίο η ανισότητα ισχύει $\forall x \neq c$
2. Βρίσκουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το ανοιχτό διάστημα $(c - \delta, c + \delta)$ με κέντρο το c να βρίσκεται εντός του (a, b).
   Η ανισότητα $|f(x) - L| < \varepsilon$ θα ισχύει $\forall x \neq c$ εντός αυτού του δ-διαστήματος

Παράδειγμα

(α) Να βρεθεί το $\lim_{x \to -3} f(x) = \sqrt{1-5x}$

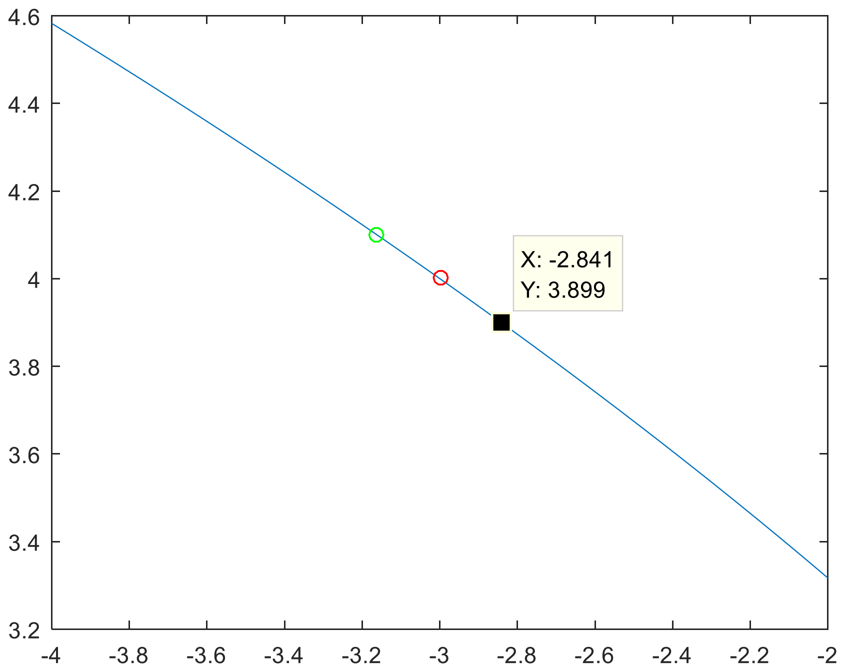
(β) Να βρεθεί δ>0 για $\varepsilon = 0.5$ ώστε να ισχύει το όριο



Παράδειγμα

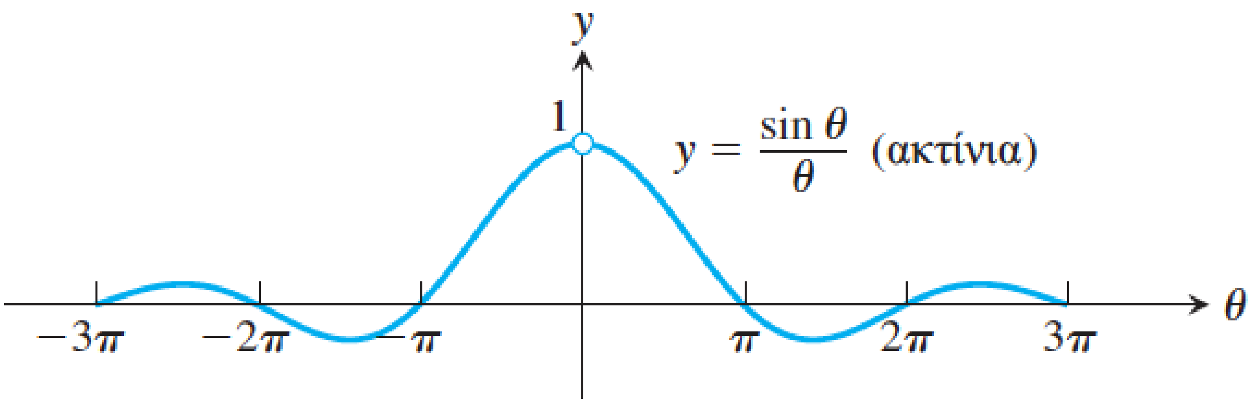
(α) Να βρεθεί το $\lim_{x \to -3} f(x) = \sqrt{1 - 5x}$

(γ) Να βρεθεί δ>0 για $\varepsilon = 0.1$ ώστε να ισχύει το όριο



Περίπτωση με τριγωνομετρικό αριθμό

- $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ όπου θ σε ακτίνια



- Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

Whiteboard

Ν.δ.ο $\lim_{x \to 1} (5x-3) = 2$

$c = 1$, $f(x) = 5x-3$, $L = 2$

Για κάθε $\epsilon > 0$, να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

$0 < |\underbrace{x-1}| < \delta \longrightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$

$|f(x) - 2| < \epsilon \Rightarrow |(5x-3) - 2| < \epsilon \Rightarrow |5x - 5| < \epsilon \Rightarrow$

$5|x-1| < \epsilon \Rightarrow |\underbrace{x-1}| < \frac{\epsilon}{5}$

$0 < |x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$ $\quad |(5x-3)-2| = 5|x-1| < \frac{5\epsilon}{5} = \epsilon$

ν.τ.ο $\lim_{x \to c} x = c$

Για δεδομένο $\epsilon > 0$, να βρεθεί $\delta > 0$

$|x-c| < \epsilon$ όποτε $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \delta \leq \epsilon$

Για $\epsilon = 1$, να βρεθεί $\delta > 0$

τέτοιο ώστε $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$

1ο: $|f(x) - 2| < \epsilon \Rightarrow |\sqrt{x-1} - 2| < 1 \Rightarrow$

$-1 \leq \sqrt{x-1} - 2 < 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x-1} < 3 \Rightarrow$

$1 < x-1 < 9 \Rightarrow 2 < x < 10$

2ο: $5 - \delta < x < 5 + \delta \Leftrightarrow |x-5| < \delta$

$5 - \delta = 2 \rightarrow \delta_1 = 3$

$5 + \delta = 10 \rightarrow \delta_2 = 5$

$\delta_1 = 3 \qquad 10 \qquad \delta_2 = 5$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 3$

Να βρεθεί $\lim_{x \to -3} f(x) = L$, $f(x) = \sqrt{1-5x}$ $\quad \underline{\epsilon = 0,5}$

(a) $\lim_{x \to -3} \sqrt{1-5x} = \sqrt{\lim_{x \to -3} 1-5x} = \sqrt{16} = 4 = L$

(b)

1º: $|f(x) - 4| < \epsilon \Rightarrow \left| \sqrt{1-5x} - 4 \right| < 0,5 \Rightarrow$

$-0,5 < \sqrt{1-5x} - 4 < 0,5 \Rightarrow 3,5 < \sqrt{1-5x} < 4,5$

$12,25 < 1-5x < 20,25 \Rightarrow -3,85 < x < -2,25$

2º: $|x-(-3)| < \delta \Rightarrow -\delta - 3 < x < \delta - 3$

$-\delta_1 - 3 = -3,85 \Rightarrow \delta_1 = 0,85$

$\delta - 3 = -2,25 \Rightarrow \delta_2 = 0,75$

$\delta = \min(0,85,\ 0,75) = 0,75$

$\epsilon = 0,1 \qquad L = 4$

1^{o}: $|f(x) - 4| < \epsilon \Rightarrow |\sqrt{1-5x} - 4| < 0,1 \Rightarrow$
$-3,162 < x < -2,942$

2^{o}: $|x - (-3)| < \delta \Rightarrow -\delta - 3 < x < \delta - 3$

$-\delta - 3 = -3,162 \rightarrow \delta^1 = 0,162$

$\delta - 3 = -2,942 \rightarrow \delta^2 = 0,158$

$\delta = \min(0,162 \;\; 0,158)$
$\Rightarrow \delta = 0,158$

$\epsilon = 2$

$|f(x) - 6| < 2 \Rightarrow$

$-12,6 < x < -3$

$-\delta - 3 = 12,6 \Rightarrow \delta_1 = 9,6$

$\delta - 3 = -3 \Rightarrow \underline{\delta_2 = 0} > 0$

ν.δ.ο $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{5}\sin 2x}{\frac{2}{5}\cdot 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2/5\ \sin 2y}{2x} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \overset{\theta=2x}{=} \frac{2}{5}\cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{2}{5}$$