Διάλεξη #3

Όρια συναρτήσεων

Ανακοινώσεις

- Πέμπτη 5/10, ΔΙΑΛΕΞΗ
- Παρασκευή 6/10, **ΔΙΑΛΕΞΗ**
- Τρίτη 10/10, **κενό**
- Πέμπτη 12/10, **ΦΡΟΝΤΗΣΤΗΡΙΟ**
- Παρασκευή 13/10, **ΔΙΑΛΕΞΗ**

[Felix Baumgartner](#).
Date: 14/10/2012,
Altitude: 39km,
Max speed 1357km/h (Mach 1.25)

[Felix Baumgartner](#).
Date: 14/10/2012,
Altitude: 39km,
Max speed 1357km/h (Mach 1.25)

Alan Eustace
Date: 24/10/2014,
Altitude: 41.42km,
Max speed 1323km/h

Robert Alan Eustace (born 1956/1957) is an American computer scientist who served as Senior Vice President of Engineering at Google until retiring in 2015

Μέση ταχύτητα

Galileo Galilei
1564-1642

Ελεύθερη πτώση

y: απόσταση (μέτρα), t : χρόνος (δευτερόλεπτα)

$$y = f(t) = \frac{1}{2} g t^2 = 4.9 t^2$$

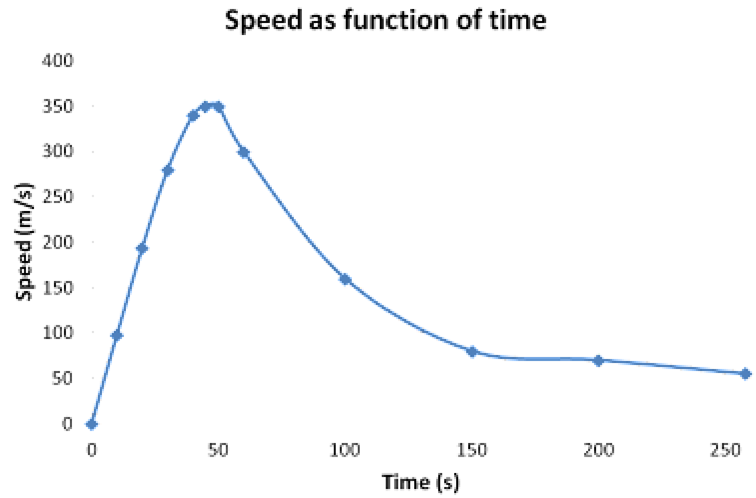
Μέση ταχύτητα = $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

Μέση vs Στιγμιαία ταχύτητα

39000km /260 sec=150 m/s

Διάστημα	Μέση ταχύτητα
0s – 2s	19.6 m/s (70 km/h)
2s – 10s	58.8 m/s (211 km/h)
10s – 20s	154 m/s (554 km/h)
20s – 40s	294 m/s (1058 km/h)
40s – 60s	*490 m/s (1764 km/h)*

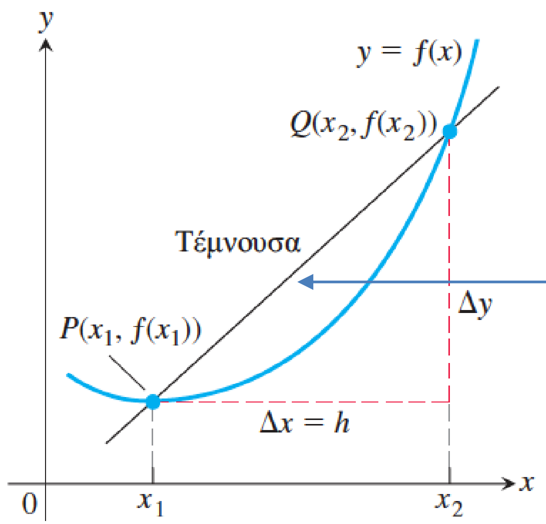
«Στιγμή»	Στιγμιαία ταχύτητα
0s	0 m/s (0 km/h)
2s	19.6 m/s (70 km/h)
10s	98 (352 km/h)
20s	196 (705 km/h)
40s	392 m/s (1411 km/h)
60s	*588 m/s (2116 km/h)*



Μέσος ρυθμός μεταβολής

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $y = f(x)$ ως προς x στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δίνεται από

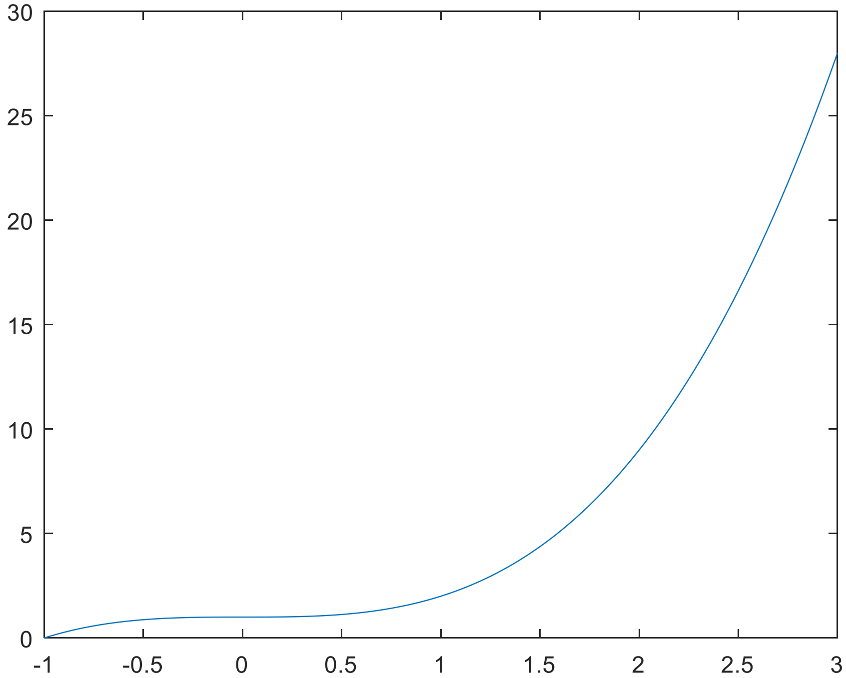
$$\frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, h \neq 0$$

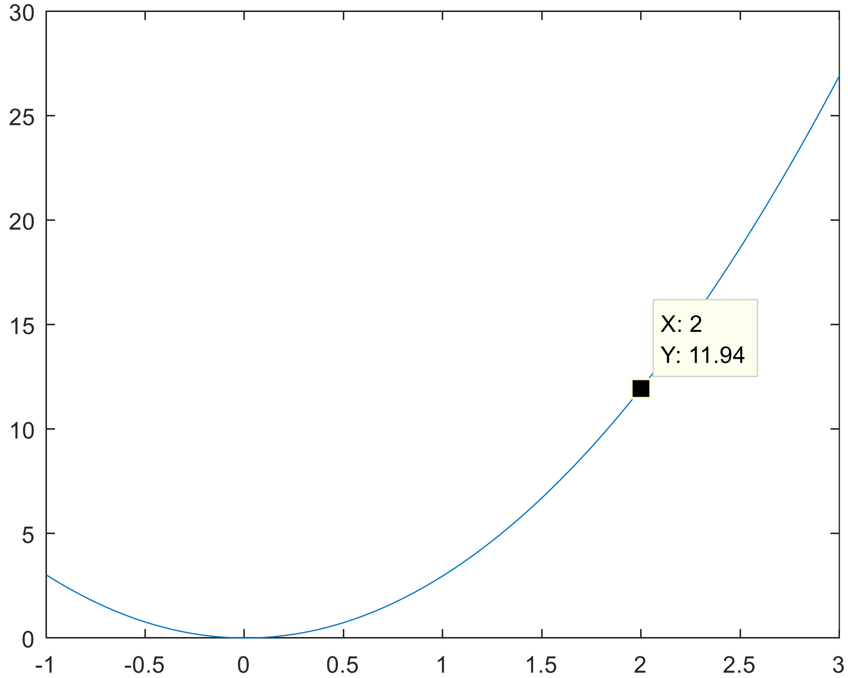


Κλίση της τέμνουσας

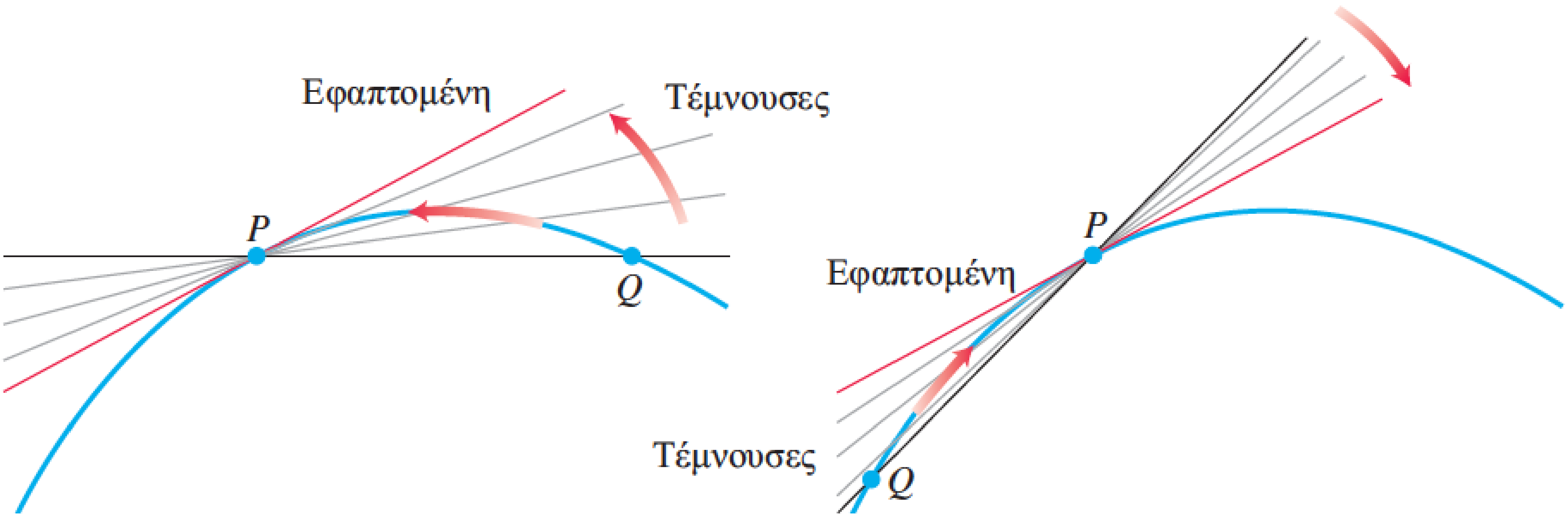
Παράδειγμα

Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $f(x) = x^3 + 1$ στα διάστημα [2,3] και [-1,1]





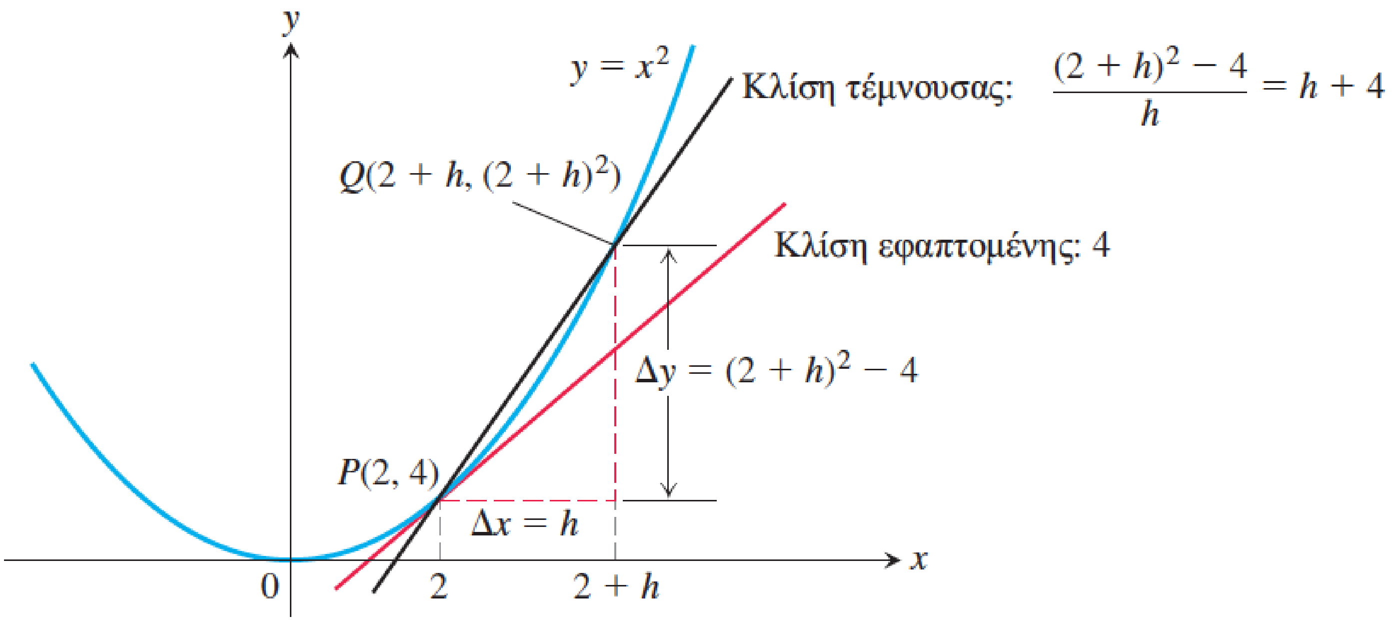
Κλίση καμπύλης



ΣΧΗΜΑ 2.3 Η εφαπτομένη της καμπύλης στο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση το όριο των κλίσεων των τεμνουσών καθώς $Q \to P$ από οποιαδήποτε πλευρά.

Παράδειγμα

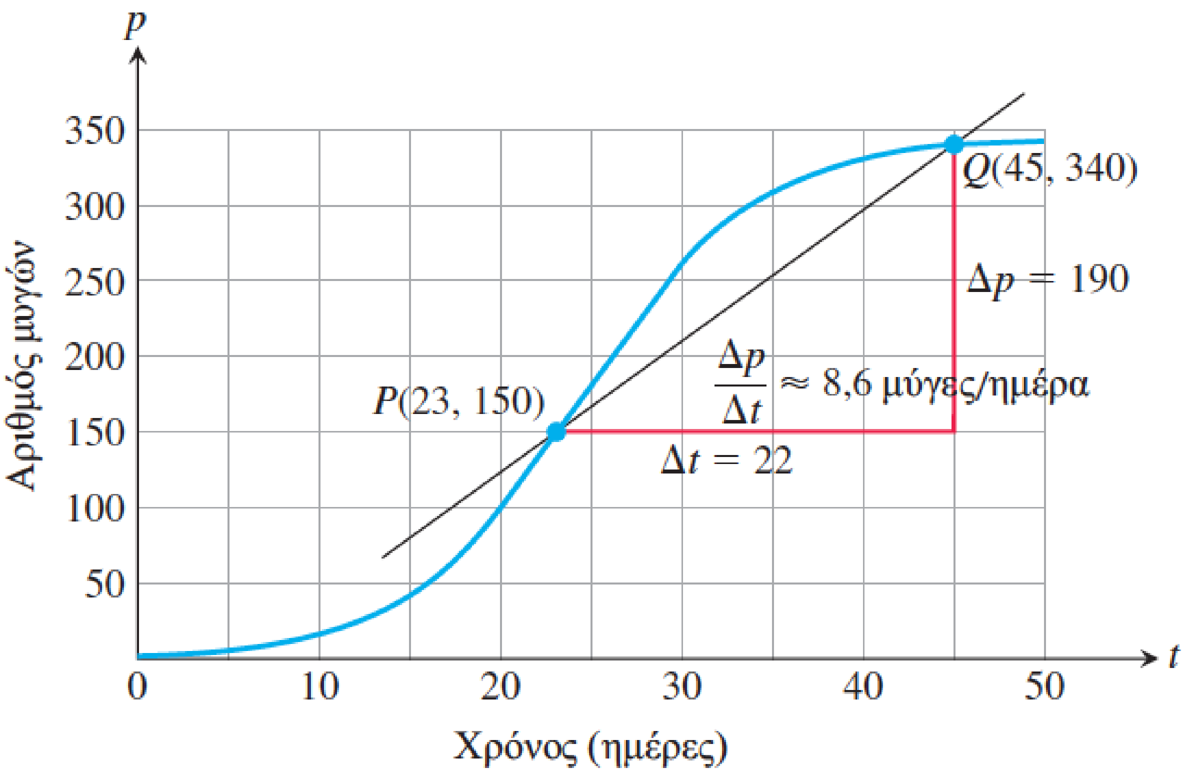
- Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης στην $y = x^2$ στο σημείο (2,4)



ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

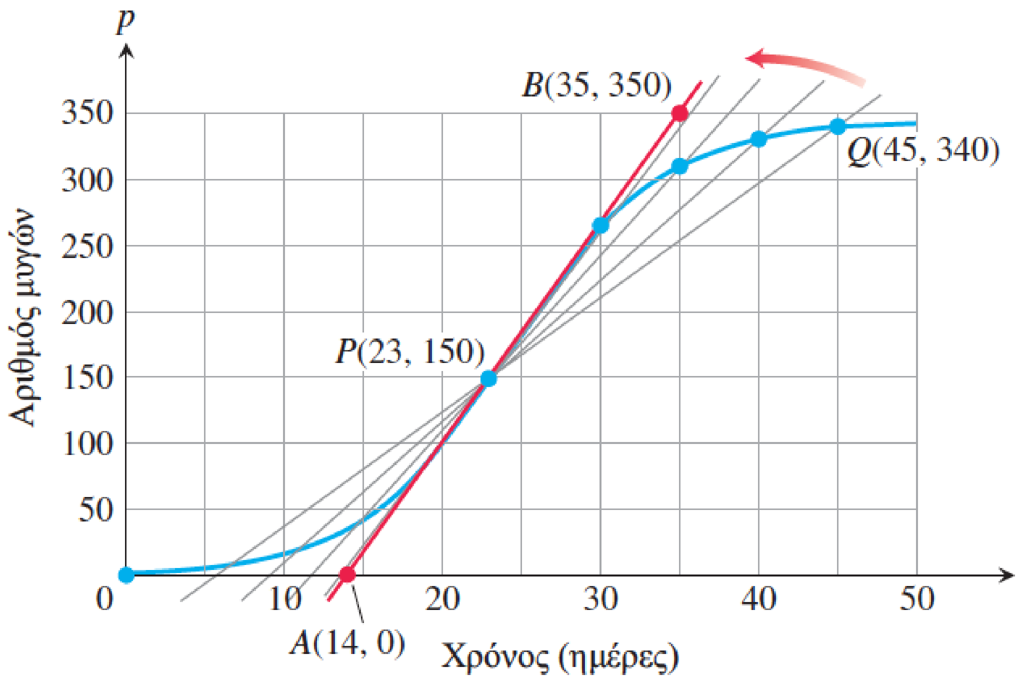
Μέσος ρυθμός μεταβολής

Μέσος ρυθμός μεταβολής



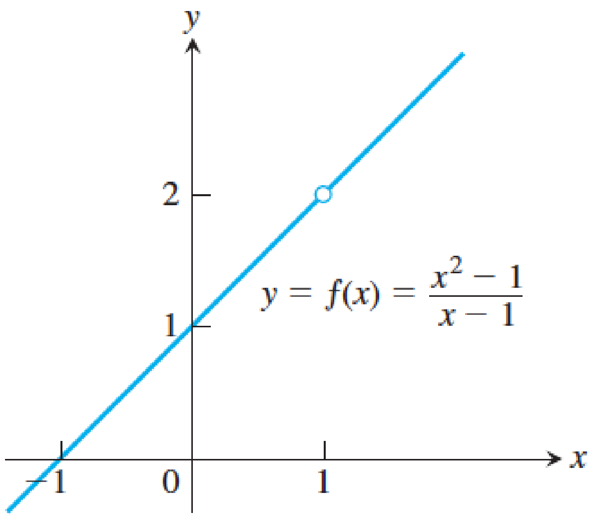
Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής

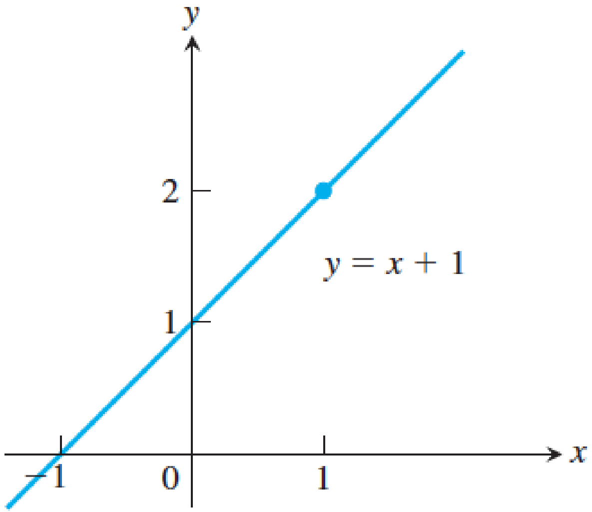
Q	Κλίση της $PQ = \Delta p/\Delta t$ (μύγες / ημέρα)
(45, 340)	$\dfrac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8{,}6$
(40, 330)	$\dfrac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10{,}6$
(35, 310)	$\dfrac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13{,}3$
(30, 265)	$\dfrac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16{,}4$



ΣΧΗΜΑ 2.6 Οι θέσεις και οι κλίσεις τεσσάρων τεμνουσών που διέρχονται από το P στη γραφική παράσταση για τον πληθυσμό της μύγας (Παράδειγμα 5).

Όρια τιμών συνάρτησης





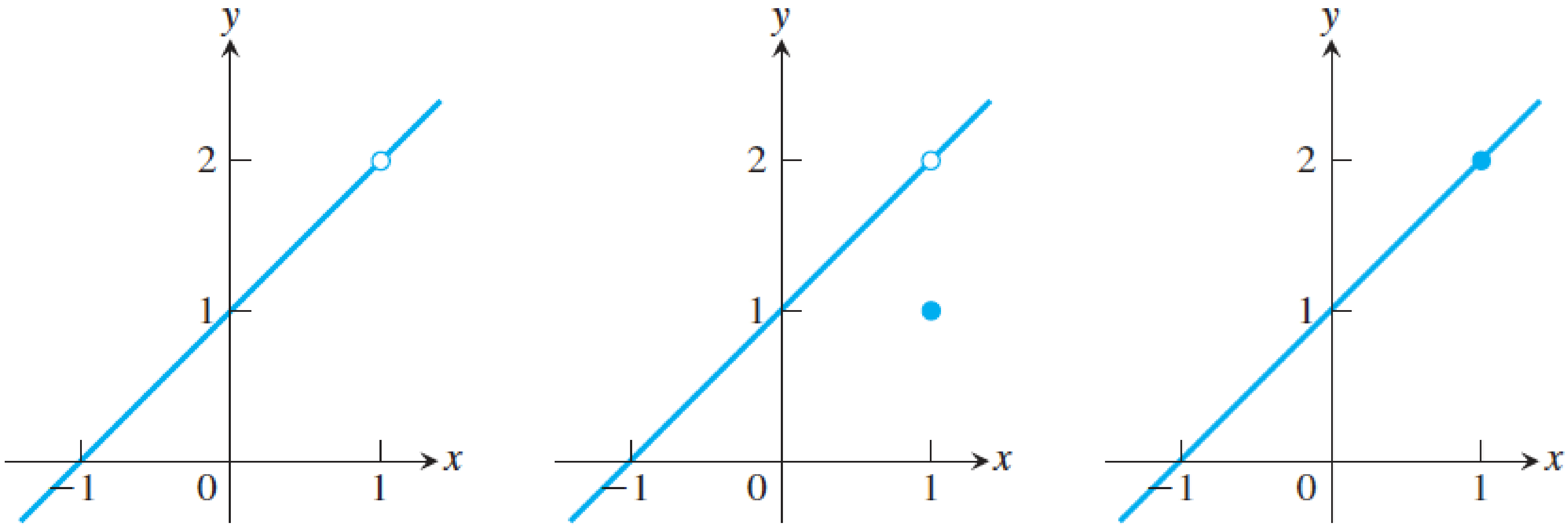
$$\lim_{x \to 1} f(x) = x + 1$$

Άτυπος ορισμός ορίου

- Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται στο ανοικτό διάστημα εκατέρωθεν του σημείου c, εκτός στο ίδιο το c
- Αν η $f(x)$ πλησιάζει κοντά στην τιμή L για κάθε x αρκούντως κοντά στο c, λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο όριο L καθώς το x τείνει στο c

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Παραδείγματα ορίων



(α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

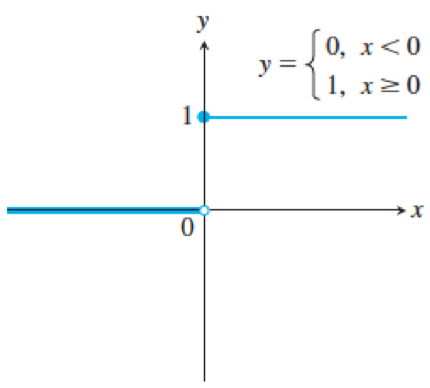
(β) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(γ) $h(x) = x + 1$

ΣΧΗΜΑ 2.8 Τα όρια των $f(x)$, $g(x)$, και $h(x)$ ισούνται όλα με 2 καθώς το x τείνει στη μονάδα. Μόνο η τιμή της $h(x)$ ισούται με το όριό της στο $x = 1$ (Παράδειγμα 2).

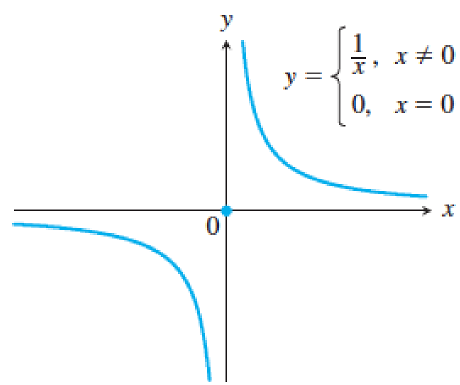
Ειδικές περιπτώσεις

- Αν $f(x) = x$, τότε για κάθε c: $\lim_{x \to c} f(x) = c$
- Αν $f(x) = k$, τότε για κάθε c: $\lim_{x \to c} f(x) = k$
- Συναρτήσεις χωρίς όρια (στο 0)



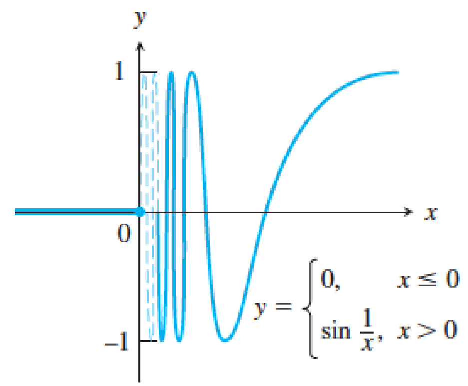
(α) Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος $U(x)$

άλμα



(β) $g(x)$

απεριόριστα μεγάλες τιμές



(γ) $f(x)$

ταλάντωση

Κανόνες ορίων

Έστω $L, M, c, k \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to c} f(x) = L$ $\lim_{x \to c} g(x) = M$

- $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$
- $\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$
- $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- $\lim_{x \to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M},\ M \neq 0$
- $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [L]^n$ όπου n $\theta\varepsilon\tau\iota\kappa$ός $\alpha\kappa\alpha\iota\rho\varepsilon o\varsigma$
- $\lim_{x \to c}[\sqrt[n]{f(x)}] = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$

Περιπτώσεις

Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων

Αν $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0$$

Όρια ρητών συναρτήσεων

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)} \text{ για } Q(c) \neq 0$$

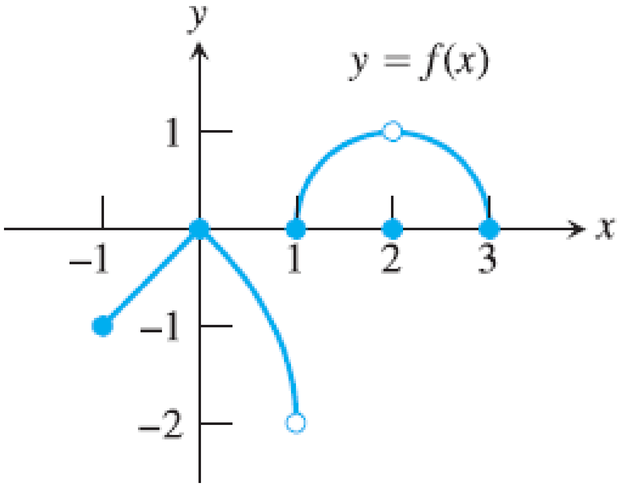
Παράδειγμα

Να υπολογιστούν τα όρια

- $\lim\limits_{x \to c} (x^3 + 4 x^2 - 3)$
- $\lim\limits_{x \to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$
- $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$
- $\lim\limits_{x \to -\pi} (\sqrt{x + 4})(\cos(x + \pi))$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ για $f(x) = x^2$ και $x = -2$

Παράδειγμα

Για την συνάρτηση $f(x)$



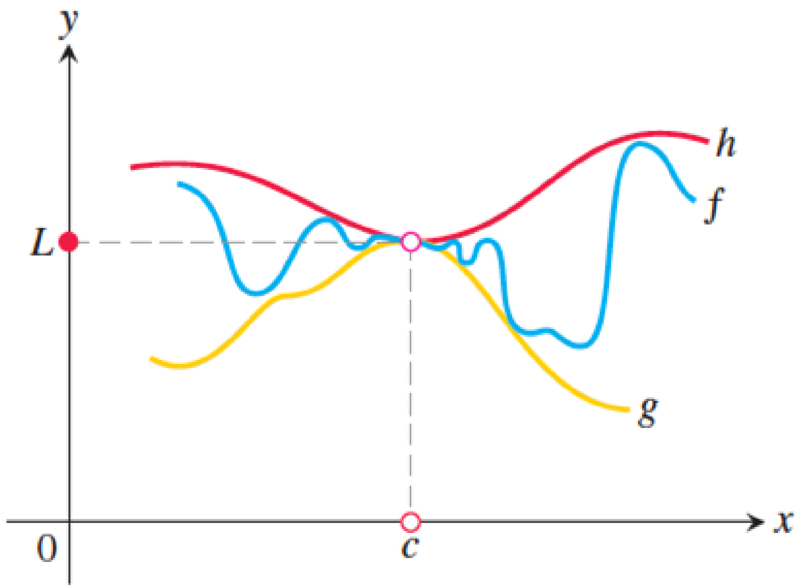
- Υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$
- Ισχύει ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$?
- Υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$
- Το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρχει για κάθε c στο (-1,1)
- Το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρχει για κάθε c στο (1,3)

Θεώρημα «σάντουιτς»

Έστω ότι $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε x που ανήκει στο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c (ενδεχομένως εκτός του $x = c$). Αν ισχύει ότι

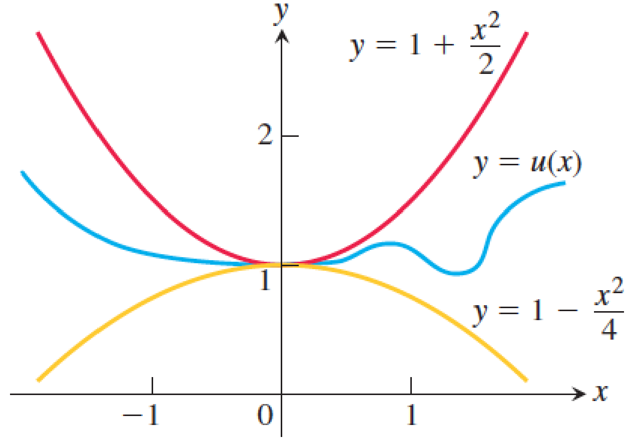
$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

τότε $\lim_{x \to c} f(x) = L$



Παράδειγμα

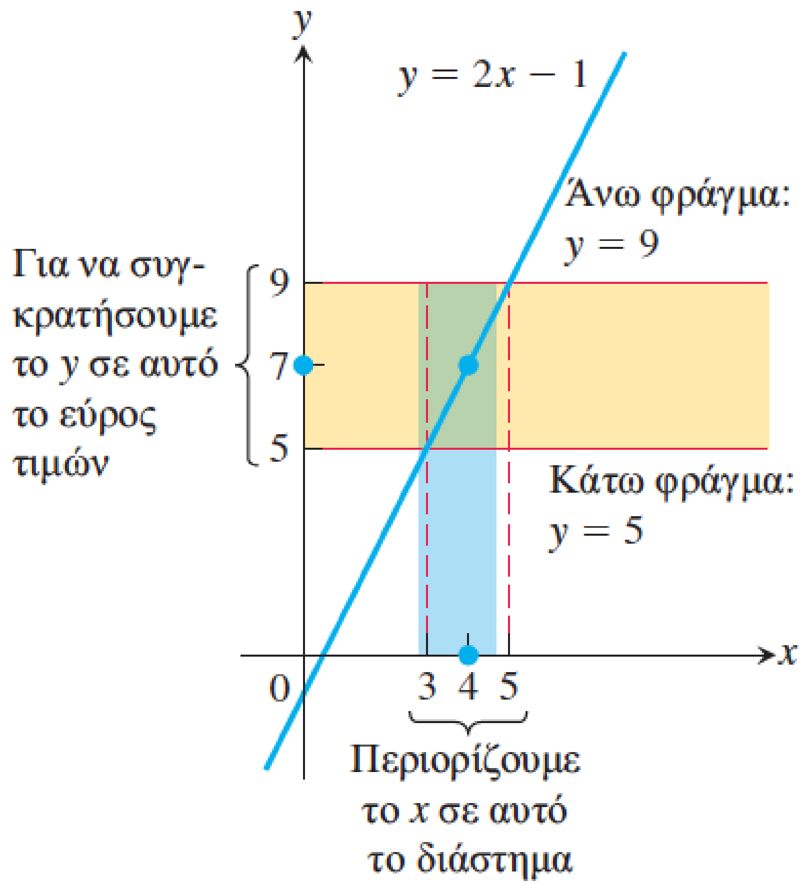
Αν $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{4}$, να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} u(x)$



Να δειχθεί ότι $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$

Αν $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$ πόσο είναι το $\lim_{x \to 4} f(x)$

Ακριβής ορισμός ορίου



Ακριβής ορισμός του ορίου

Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το c. Το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο c είναι ο αριθμός L

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

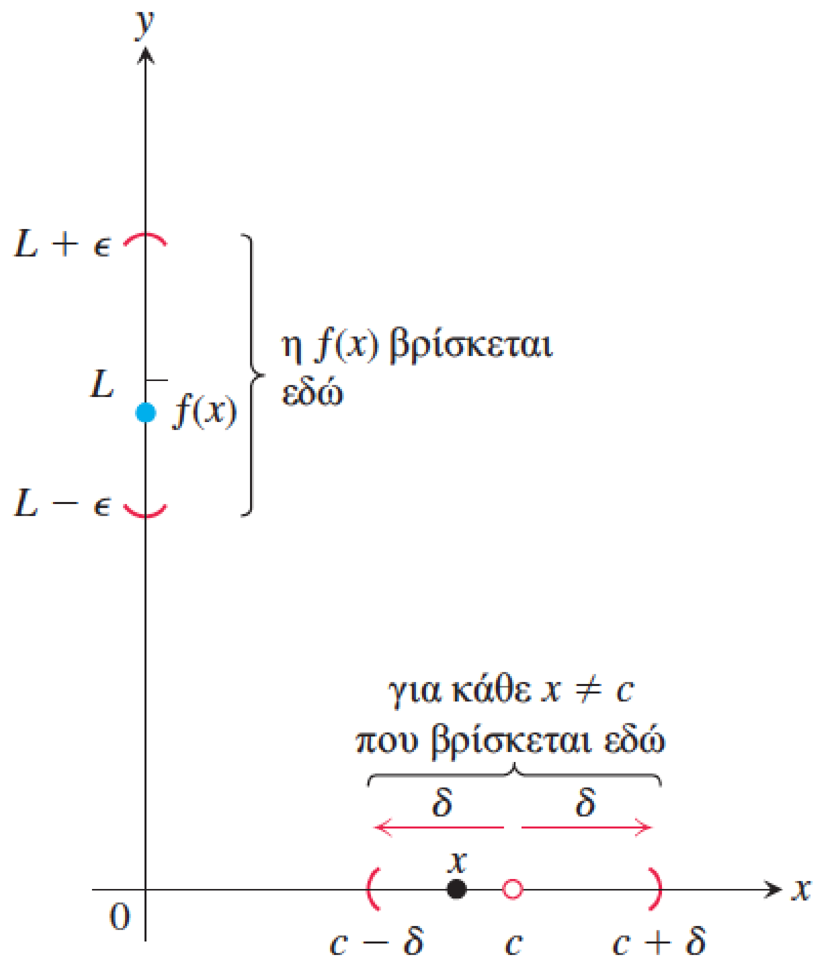
Ακριβής ορισμός του ορίου

Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το c. Το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο c είναι ο αριθμός L

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

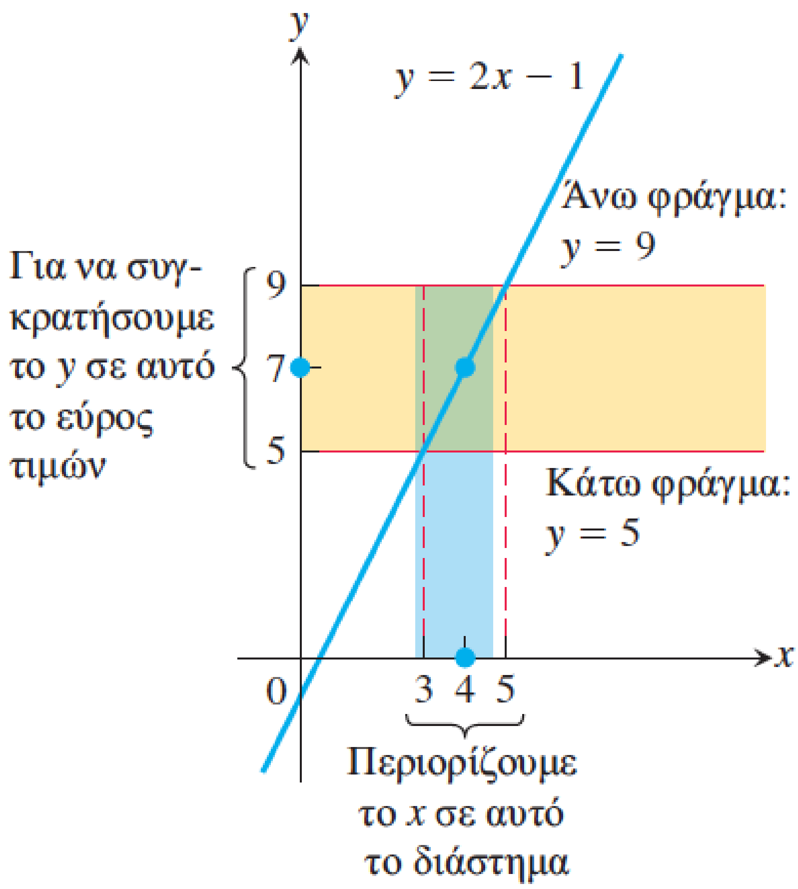
Ακριβής ορισμός του ορίου



Bernard Bolzano
1781-1848

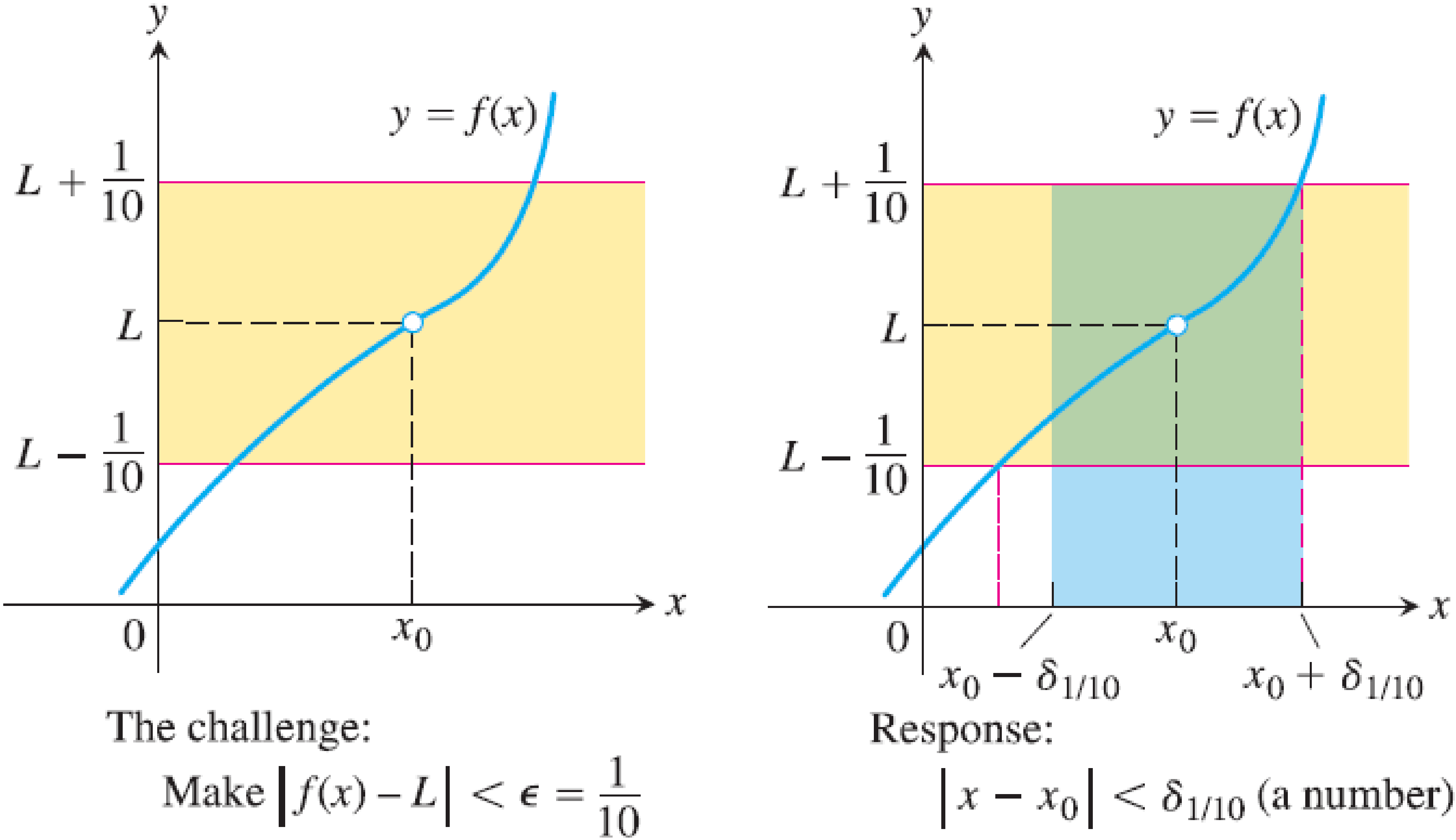
Augustin-Louis Cauchy
1789 –1857

Παράδειγμα

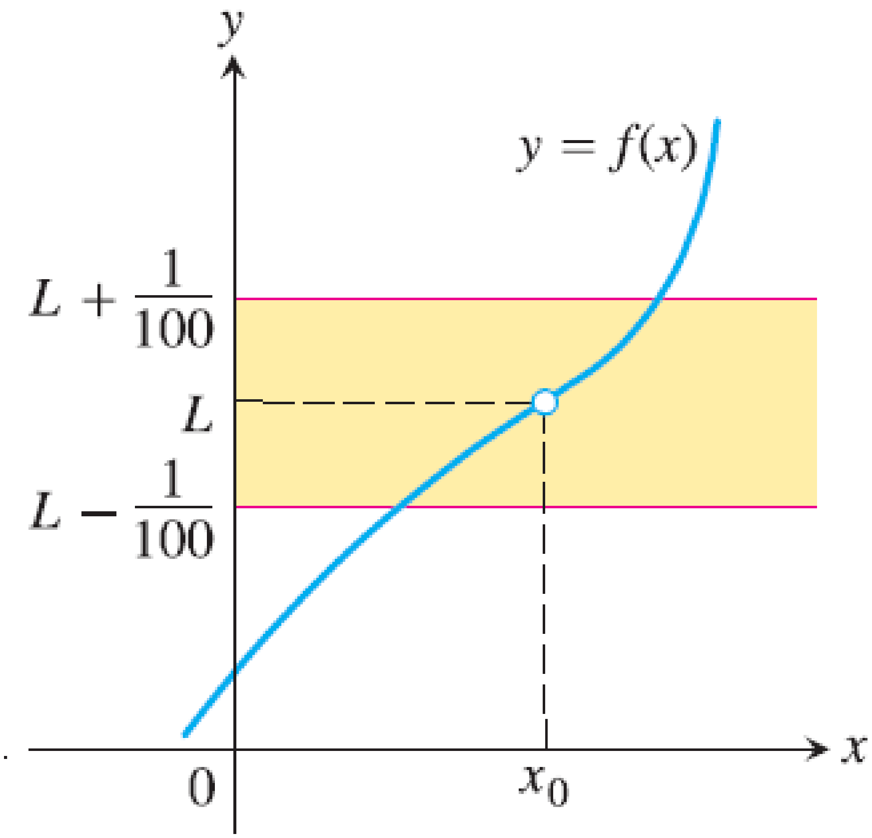


ΣΧΗΜΑ 2.15 Περιορίζοντας το x σε απόσταση μικρότερη της μίας μονάδας από το $x = 4$, καταφέρνουμε να συγκρατήσουμε το y σε απόσταση μικρότερη των δύο μονάδων από το $y = 7$ (Παράδειγμα 1).

Ακριβής ορισμός του ορίου

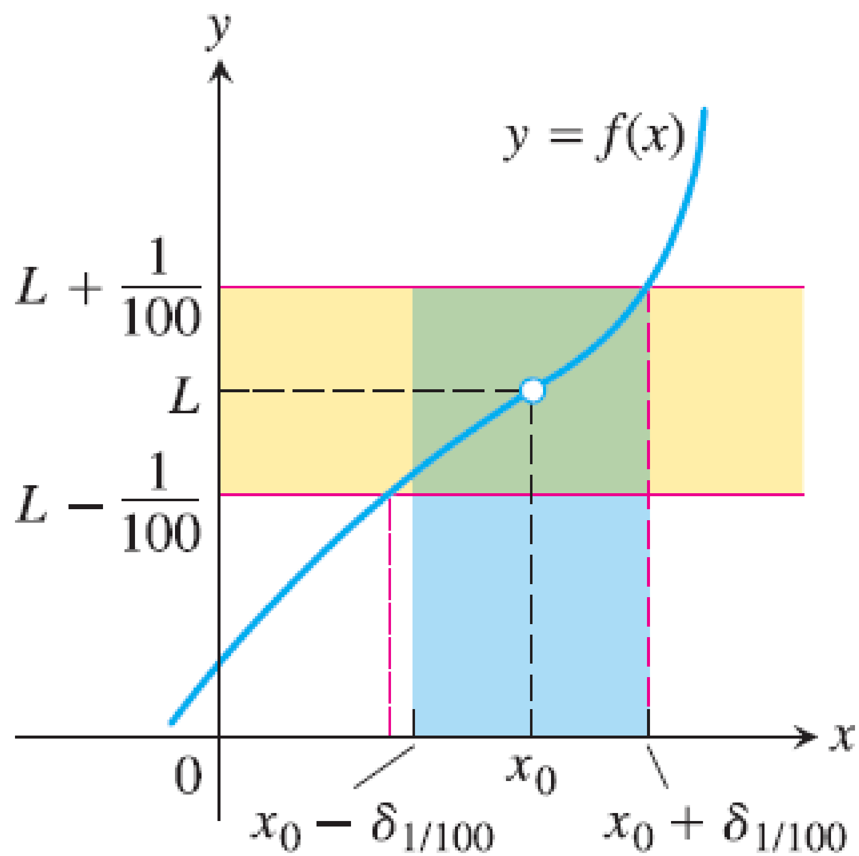


Ακριβής ορισμός του ορίου



New challenge:

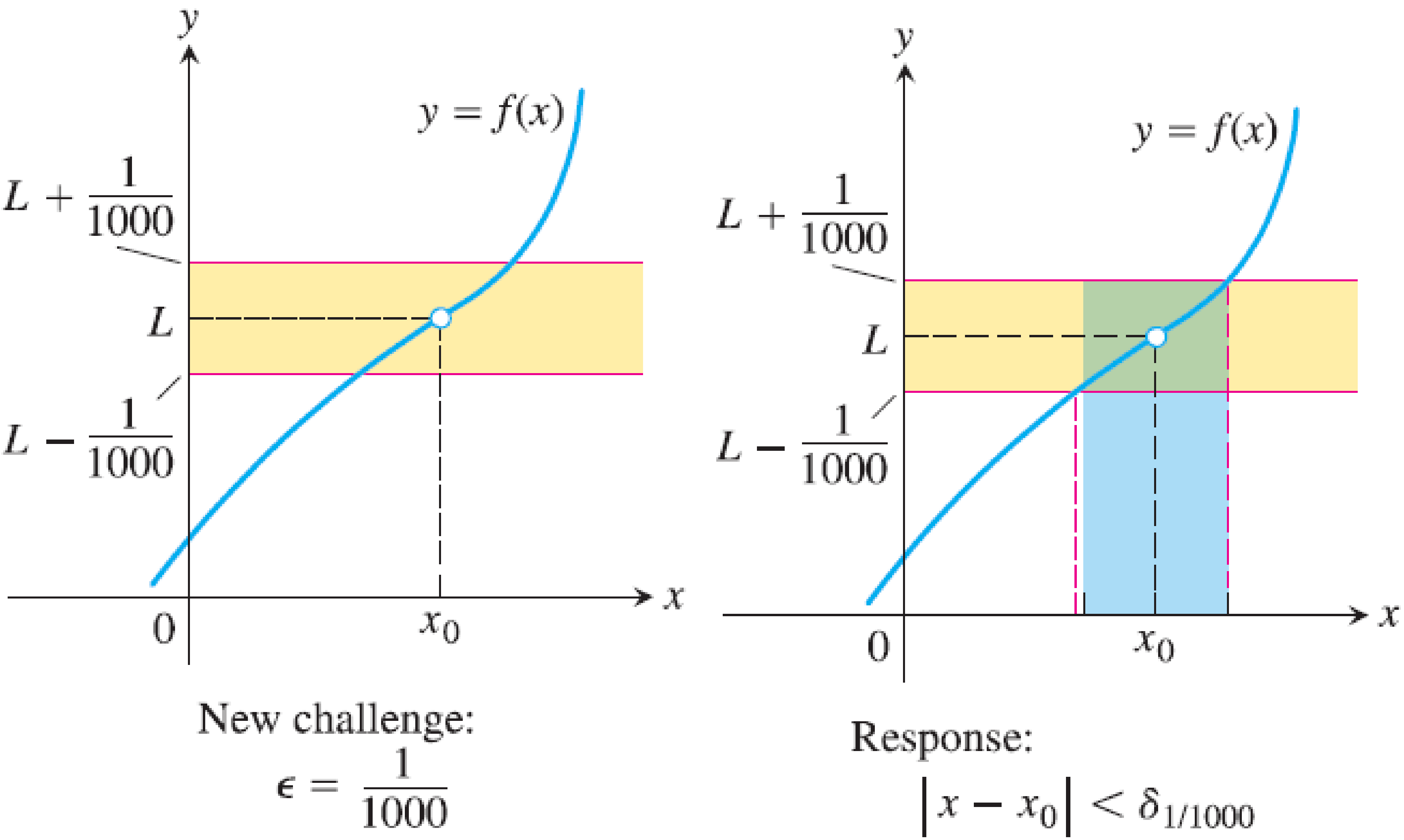
Make $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$



Response:

$|x - x_0| < \delta_{1/100}$

Ακριβής ορισμός του ορίου



Whiteboard

$$\lim_{x \to -\pi} \left(\sqrt{x+4}\right) \cdot \cos(x+\pi) =$$

$$= \lim_{x \to -\pi} \left(\sqrt{x+4}\right) \cdot \lim_{x \to -\pi} \cos(x+\pi)$$

$$= \sqrt{-\pi+4} \cdot \cos(0) = \sqrt{4-\pi}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x) = x^2 \qquad x = -2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4-4h+h^2-4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-4)}{h} = \lim_{h \to 0} (h-4) = -4$$

$$\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3) = \lim_{x\to c} \overset{P_1(x)}{\overset{\downarrow}{x^3}} + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 =$$

$$= c^3 + 4c^2 - 3$$

$$\lim_{x\to c} \frac{x^4+x^2-1}{x^2+5} = \frac{\lim_{x\to c} x^4+x^2-1}{\lim_{x\to c} x^2+5} = \frac{c^4+c^2-1}{c^2+5}$$

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{4x^2-3} = \sqrt{\lim_{x\to 2} 4x^2-3} = \sqrt{16-3} = \sqrt{13}$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} \qquad \lim_{x\to 2}\sqrt{g(x)}$$

$$g(x) = 4x^2-3$$

$$\lim_{x \to -\pi} \left(\sqrt{x+4}\right) \cdot \cos(x+\pi) =$$

$$= \lim_{x \to -\pi} \left(\sqrt{x+4}\right) \cdot \lim_{x \to -\pi} \cos(x+\pi)$$

$$= \sqrt{-\pi+4} \cdot \cos(0) = \sqrt{4-\pi}$$

$$f(x) = x^2$$

$$x = -2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

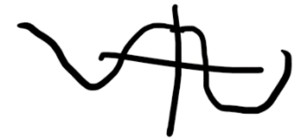
$$\lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h-4)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h-4) = -4$$

$$-|\theta| \le \sin(\theta) \le |\theta|$$

$$\lim_{\theta \to 0} -|\theta| = 0 \qquad \lim_{\theta \to 0} |\theta| = 0$$

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$$



$$-|\theta| \le 1 - \cos(\theta) \le |\theta|$$

$$\lim_{\theta \to 0} 1 - \cos(\theta) = 0 \longrightarrow \lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) = 1$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\lim\limits_{x \to 4} f(x) - \overset{5}{\cancel{\lim\limits_{x \to 4} 5}}}{\overset{4}{\cancel{\lim\limits_{x \to 4} x}} - \overset{2}{\cancel{\lim\limits_{x \to 4} 2}}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 7$$