

Διάλεξη #2

Συνήθεις συναρτήσεις Πράξεις συναρτήσεων



Ανακοινώσεις

- Όχι φροντιστήριο αύριο (29/9)



2023 ΒΡΑΔΙΑ ΤΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΗ
Ερευνα, παιχνίδι, μουσική!

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ
29 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΕΙΣΟΔΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗ



ΧΡΟΝΙΑ
ΙΤΕ
Ερευνα - Τεχνολογία - Καινοτομία
ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ



ΦΟΡΕΙΣ ΔΙΟΡΓΑΝΩΣΗΣ



ΜΕ ΤΗΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ

ΧΟΡΗΓΟΙ



ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΚΡΗΤΗΣ
REGION OF CRETE



ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΟ
ΤΑΜΕΙΟ
ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΚΡΗΤΗΣ

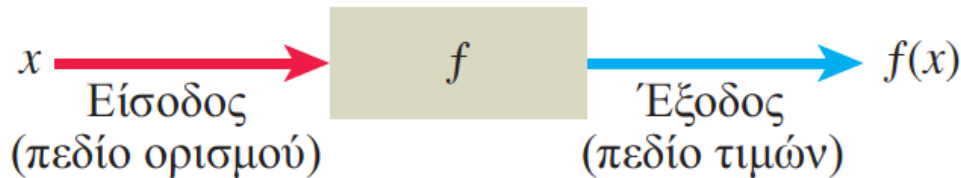


ΔΗΜΟΣ ΜΑΛΕΒΙΖΙΟΥ
Municipality of Maleviziou



Συναρτήσεις

- Συνάρτηση $y = f(x)$
 - x : ανεξάρτητη μεταβλητή
 - y : εξαρτημένη μεταβλητή



- Εναλλακτικά
 - $z = g(t)$
 - $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$
 - $f: x \rightarrow y$



Gottfried
Wilhelm Leibniz
1646-1716

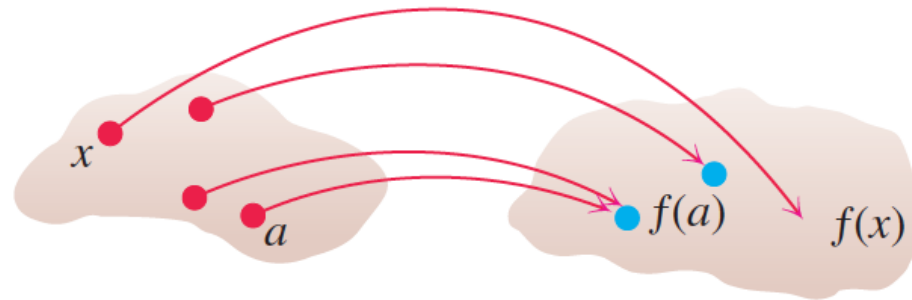


Leonhard Euler
1707-1783



Συναρτήσεις

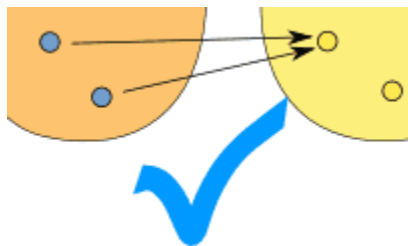
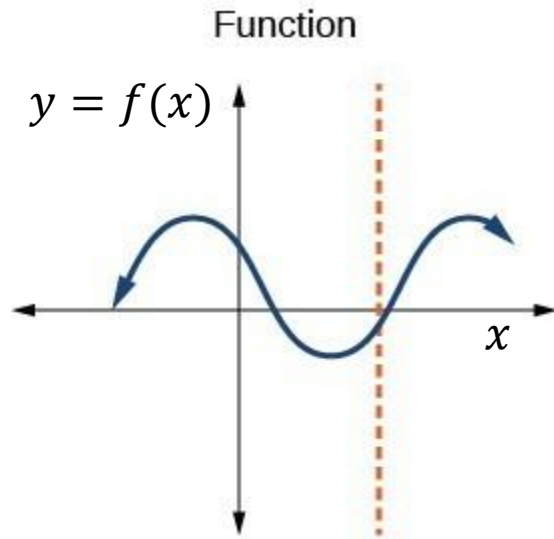
Μια συνάρτηση f από το πεδίο ορισμού D στο πεδίο τιμών Y είναι ένας κανόνας που αναθέτει μια **μοναδική** τιμή $f(x) \in Y$ για κάθε $x \in D$



$D =$ πεδίο ορισμού

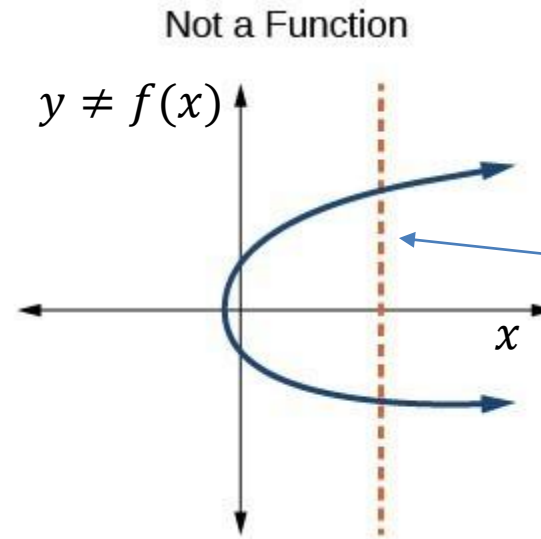
$Y =$ σύνολο που περιέχει
το πεδίο τιμών

Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων

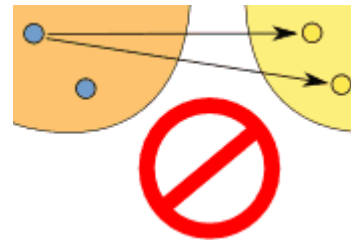


(many-to-one)

This **is** OK in a function



Κριτήριο
κατακόρυφης
ευθείας



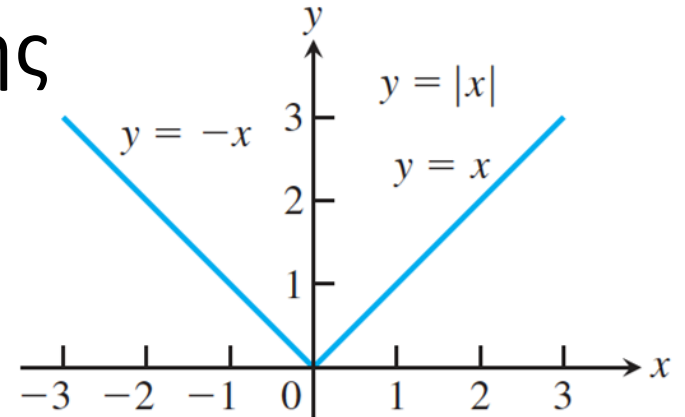
(one-to-many)

This is **NOT** OK in a
function

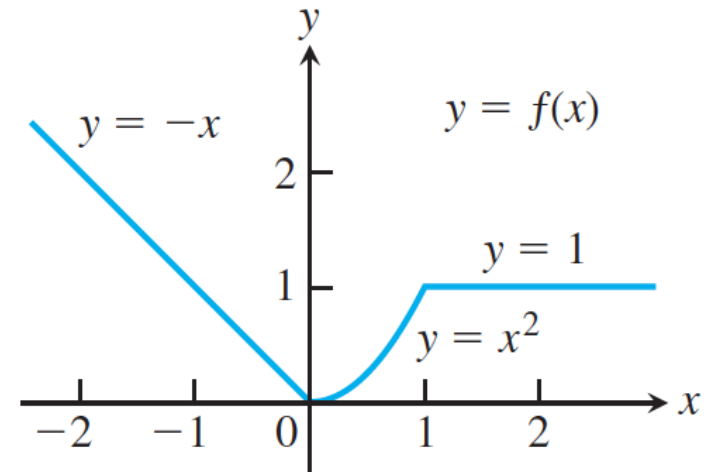
Τμηματικές συναρτήσεις

- Η συνάρτηση απόλυτης τιμής

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



Συναρτήσεις μέγιστου/ελάχιστου ακεραίου

- Συνάρτηση μέγιστου ακεραίου: μέγιστος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x
 $[2.5] = 2, [0] = 0, [-1.5] = -2$
- Συνάρτηση ελάχιστου ακεραίου: ελάχιστος ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του x
 $[2.5] = 3, [0] = 0, [-1.5] = -1$



Αύξουσες και Φθίνουσες συναρτήσεις

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε ένα διάστημα I και $x_1, x_2 \in I$

- Αν $f(x_2) > f(x_1)$ για κάθε $(\forall) x_2 > x_1$, τότε η $f(x)$ ονομάζεται αύξουσα στο I
- Αν $f(x_2) < f(x_1)$ για κάθε $(\forall) x_2 > x_1$, τότε η $f(x)$ ονομάζεται φθίνουσα στο I

Το I μπορεί να είναι πεπερασμένο (φραγμένο) ή άπειρο (μη φραγμένο)



Αύξουσες και Φθίνουσες συναρτήσεις

Σε ποια διαστήματα είναι αύξουσες/φθίνουσες οι παρακάτω συναρτήσεις

- $y = -\frac{1}{x}$
- $y = \frac{1}{|x|}$



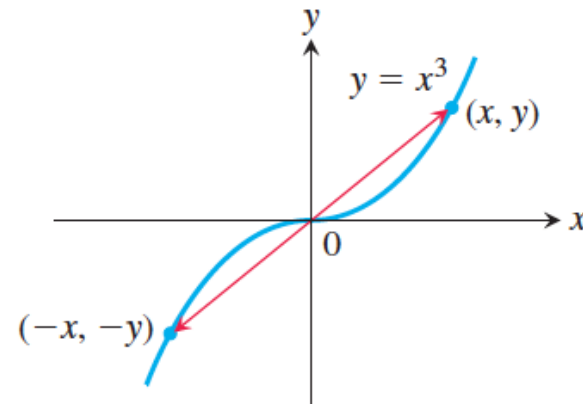
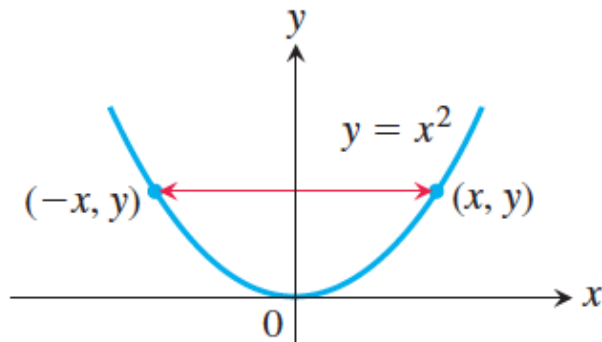
Άρτιες και Περιττές συναρτήσεις

- Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι
 - Άρτια συνάρτηση του x αν $f(-x) = f(x)$
 - Περιττή συνάρτηση του x αν $f(-x) = -f(x)$
- Προέλευση
 - Σχέση με δυνάμεις του x
 - $y = x^2$, $y = x^4$... -> άρτιες γιατί $(-x)^2 = x^2$
 - $y = x^1$, $y = x^3$... -> περιττές γιατί $(-x)^3 = -x^3$



Άρτιες και Περιττές συναρτήσεις

- Συμμετρίες
 - Οι άρτιες είναι συμμετρικές ως προς y
 - Οι περιττές είναι συμμετρικές ως προς $(0,0)$



Άρτιες και Περιττές συναρτήσεις

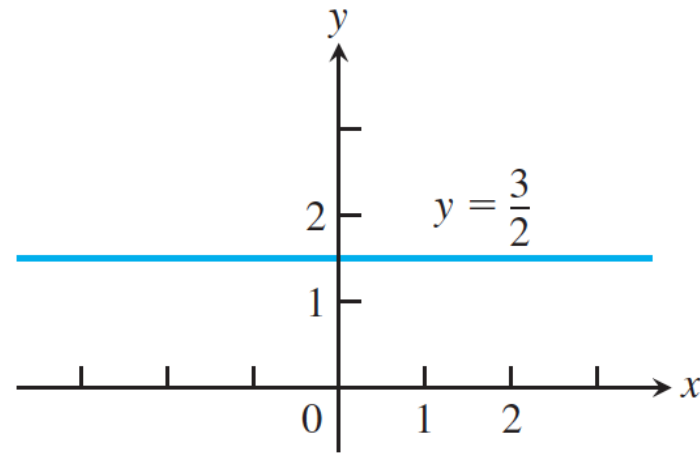
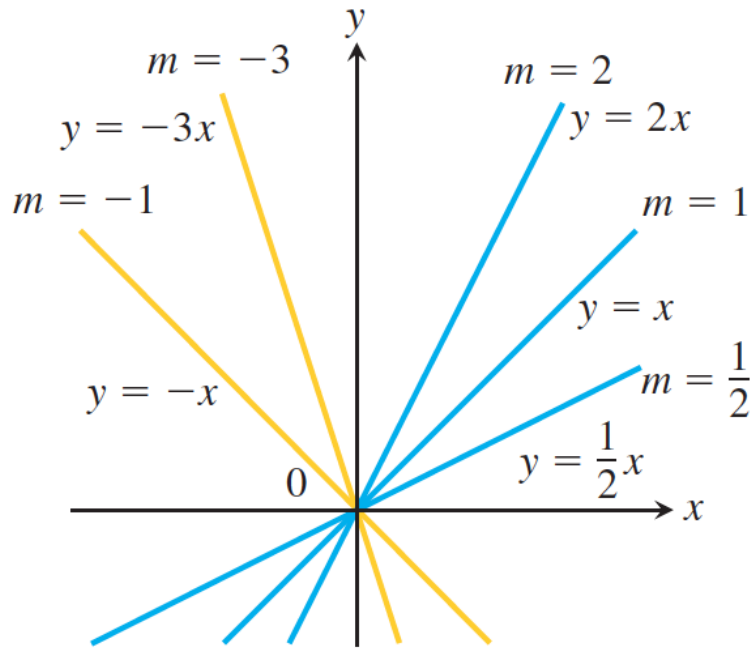
- Παραδείγματα
 - $f(x) = x^3 + x$
 - $f(x) = 3$
 - $f(x) = x^2 + 1$



Συνήθης συναρτήσεις

Γραμμικές

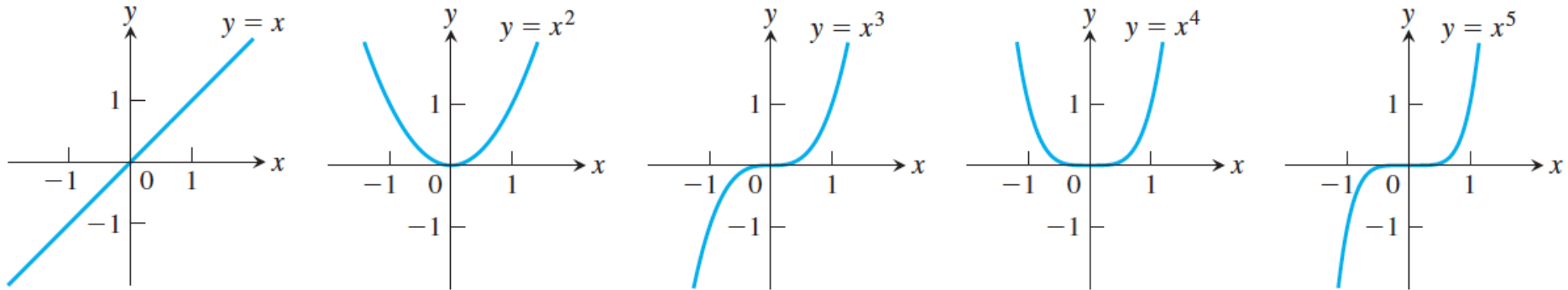
$f(x) = mx + b$ όπου m (κλίση) και b σταθερές



Συνήθεις συναρτήσεις

Συναρτήσεις δυνάμεων

$$f(x) = x^a \text{ όπου } a \text{ σταθερά}$$

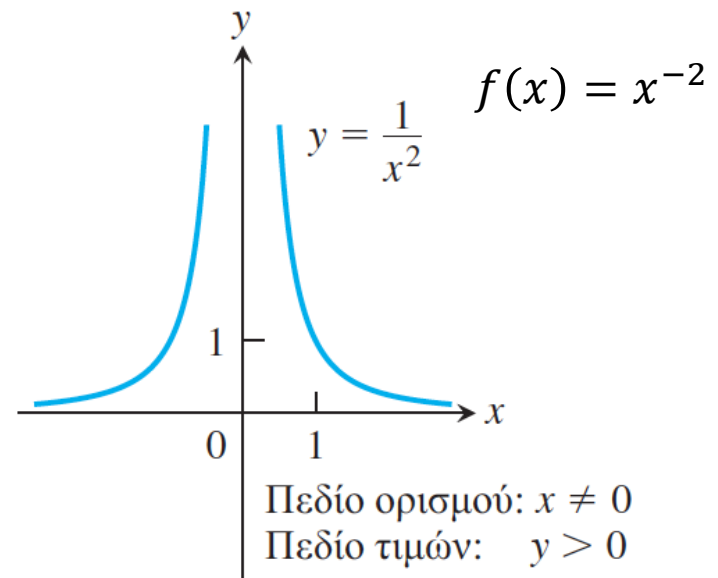
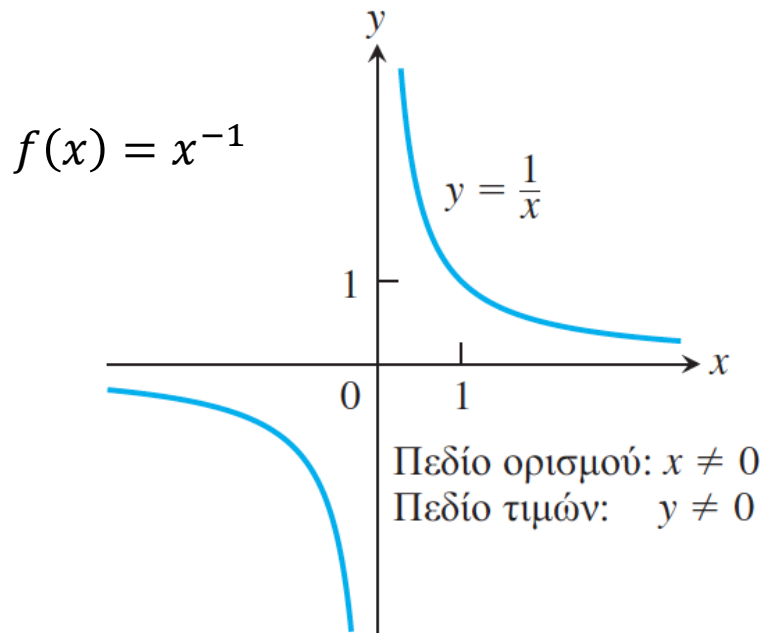


ΣΧΗΜΑ 1.15 Γραφικές παραστάσεις της $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, ορισμένης στο $-\infty < x < \infty$.

Συνήθης συναρτήσεις

Συναρτήσεις δυνάμεων

$$f(x) = x^a \text{ όπου } a \text{ σταθερά}$$

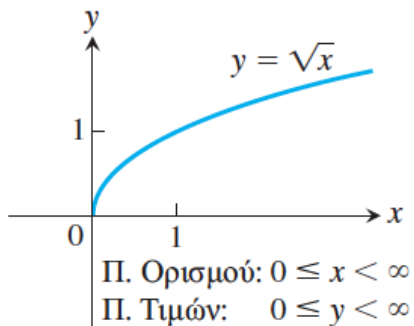


Συνήθεις συναρτήσεις

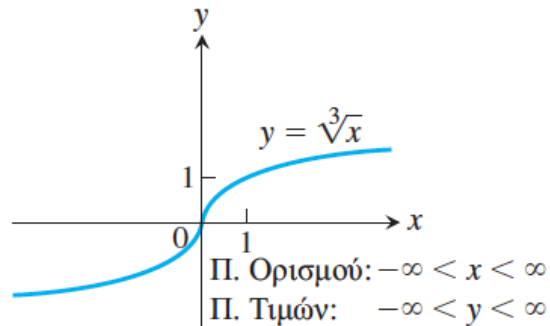
Συναρτήσεις δυνάμεων

$f(x) = x^a$ όπου a σταθερά

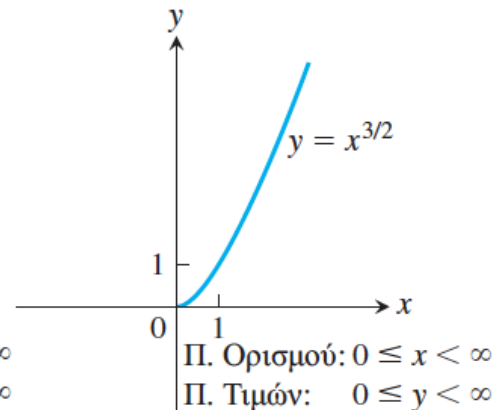
$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$



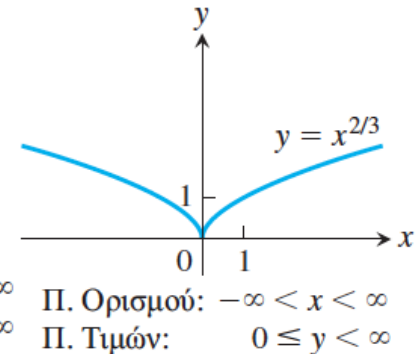
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$



$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$



$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$



Συνήθης συναρτήσεις

Πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n μη αρνητικός ακέραιος (βαθμός)

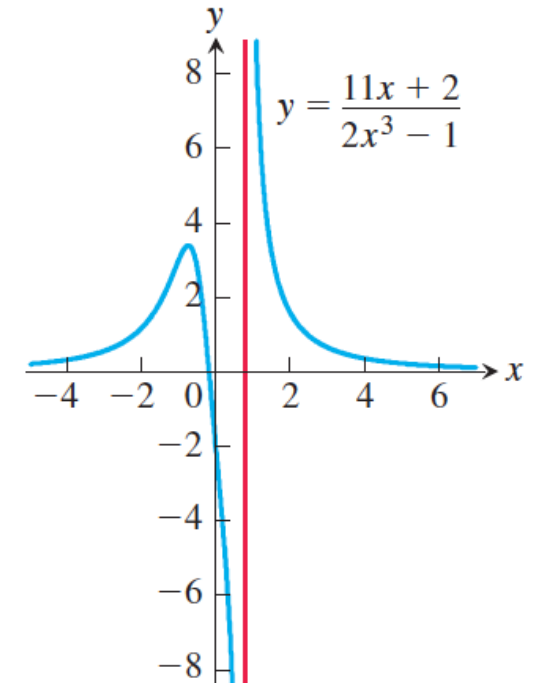
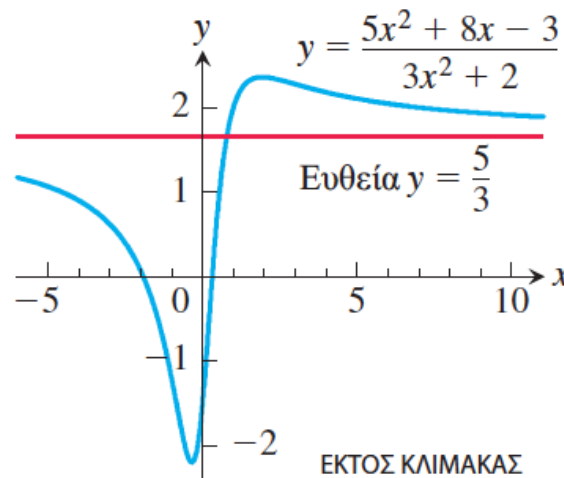
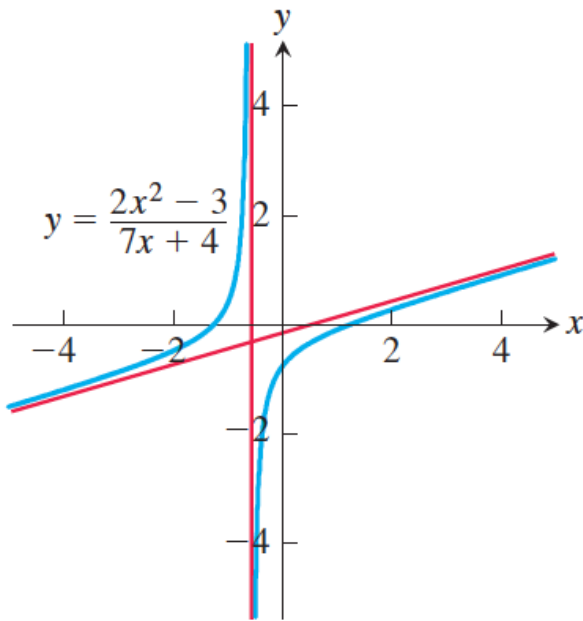
a_0, a_1, \dots, a_n πραγματικές σταθερές
(συντελεστές)



Συνήθης συναρτήσεις

Ρητές συναρτήσεις

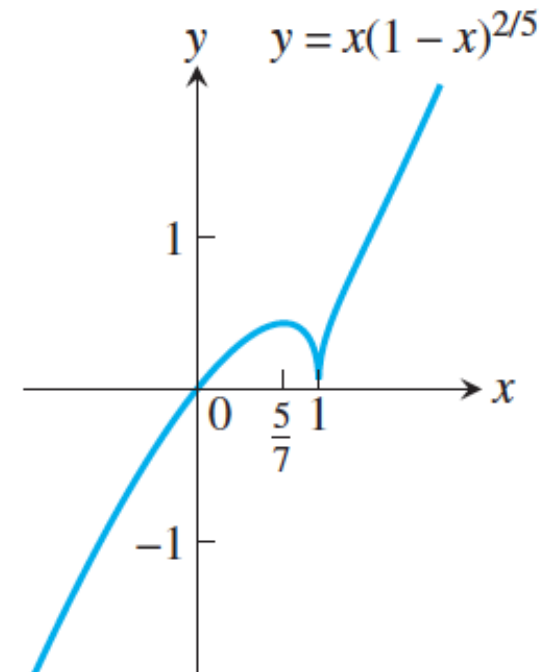
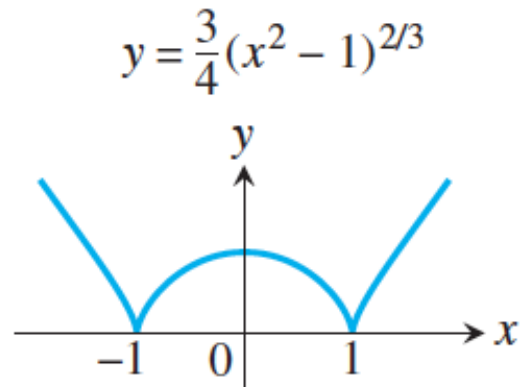
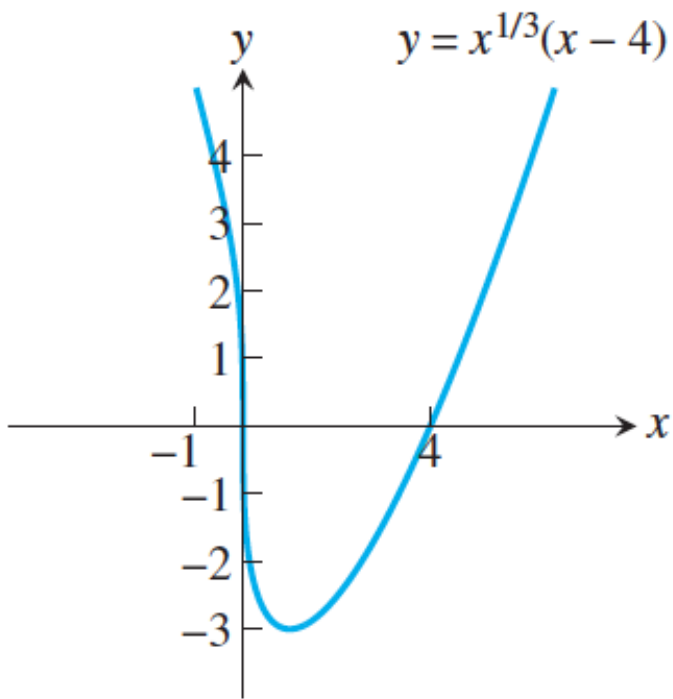
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ όπου $p(x)$, $q(x)$ πολυώνυμα



Συνήθης συναρτήσεις

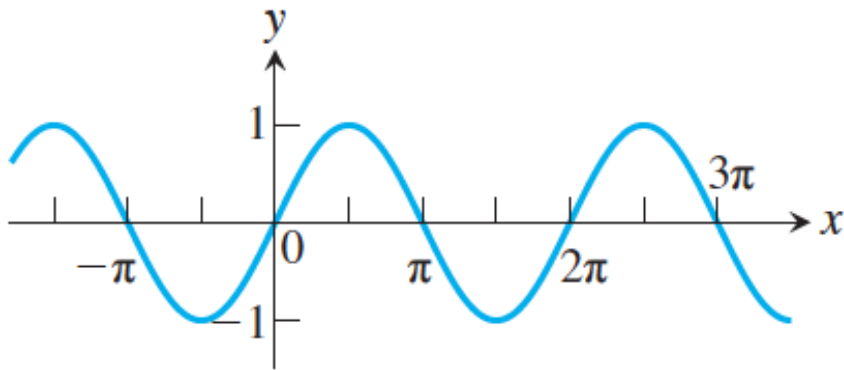
Αλγεβρικές συναρτήσεις

- Πολυώνυμα και αλγεβρικές πράξεις

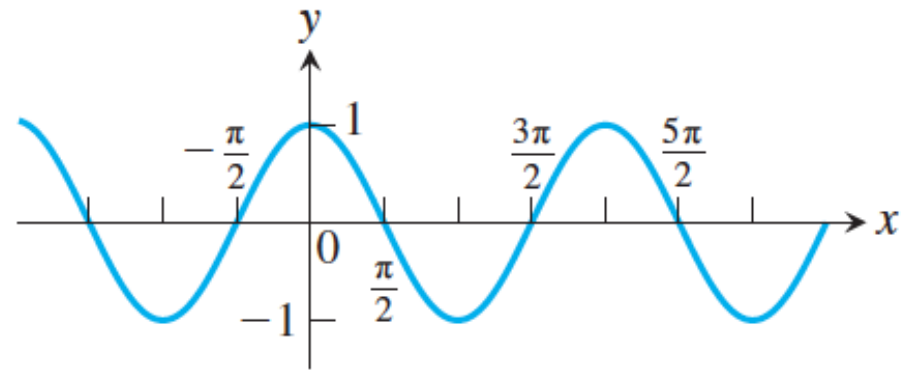


Συνήθης συναρτήσεις

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις



(α) $f(x) = \sin x$

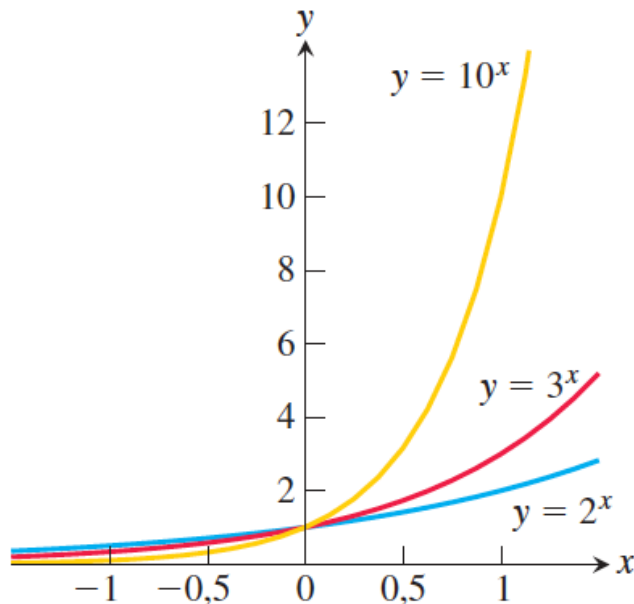


(β) $f(x) = \cos x$

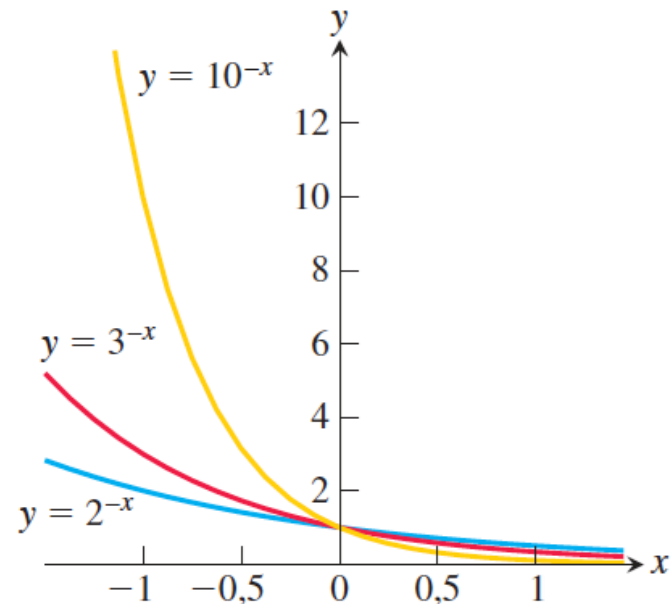
Συνήθης συναρτήσεις

Εκθετικές συναρτήσεις

$f(x) = a^x$ όπου $a > 0$ και $a \neq 1$ σταθερά
 $(-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$



(α)



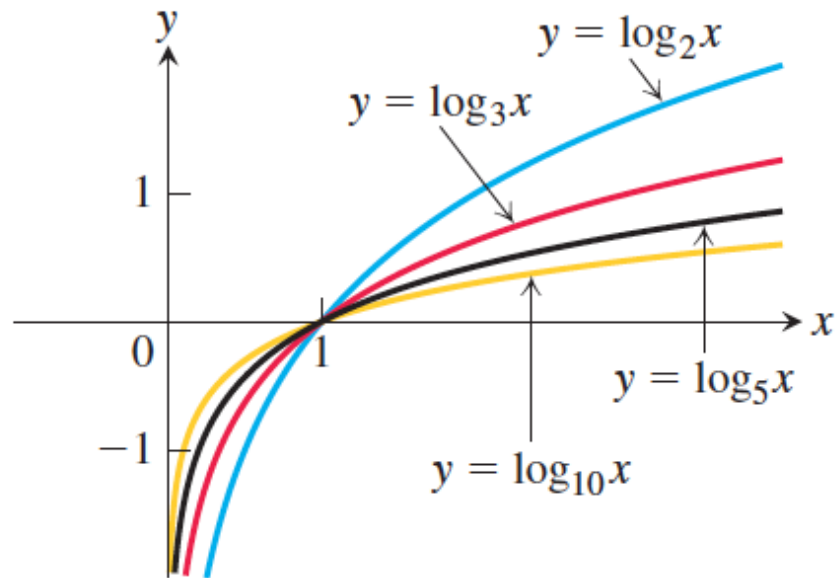
(β)



Συνήθης συναρτήσεις

Λογαριθμικές συναρτήσεις

$f(x) = \log_a x$ όπου $a > 0$ και $a \neq 1$ σταθερά
 $(0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$



Πράξεις συναρτήσεων

Έστω η $f(x)$ με πεδίο ορισμού $D(f)$ και η $g(x)$ με πεδίο ορισμού $D(g)$.

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$, ορίζουμε τις

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

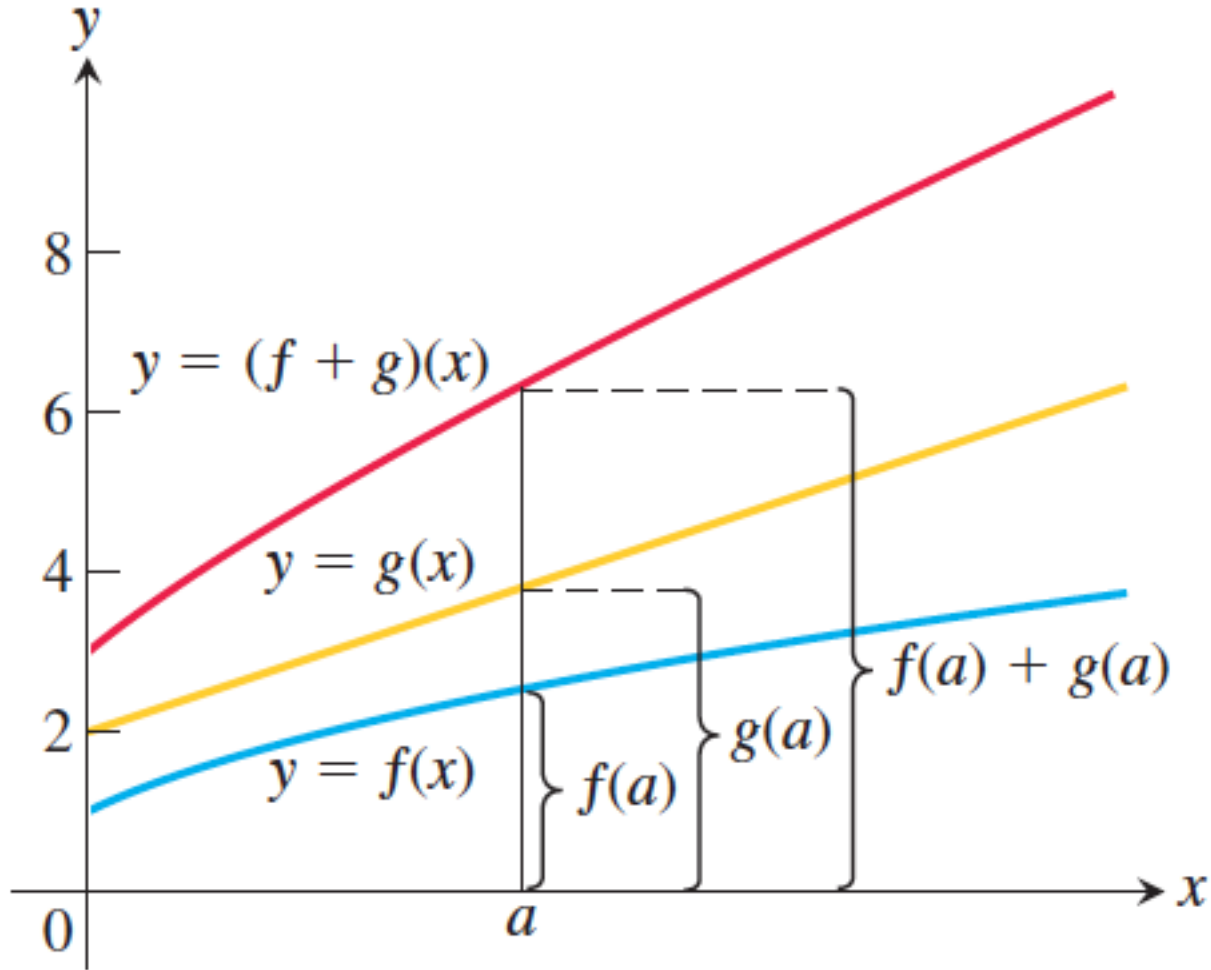
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ όπου } g(x) \neq 0$$

$$(cf)(x) = cf(x) \text{ όπου } c \text{ σταθερά}$$



Πρόσθεση συναρτήσεων



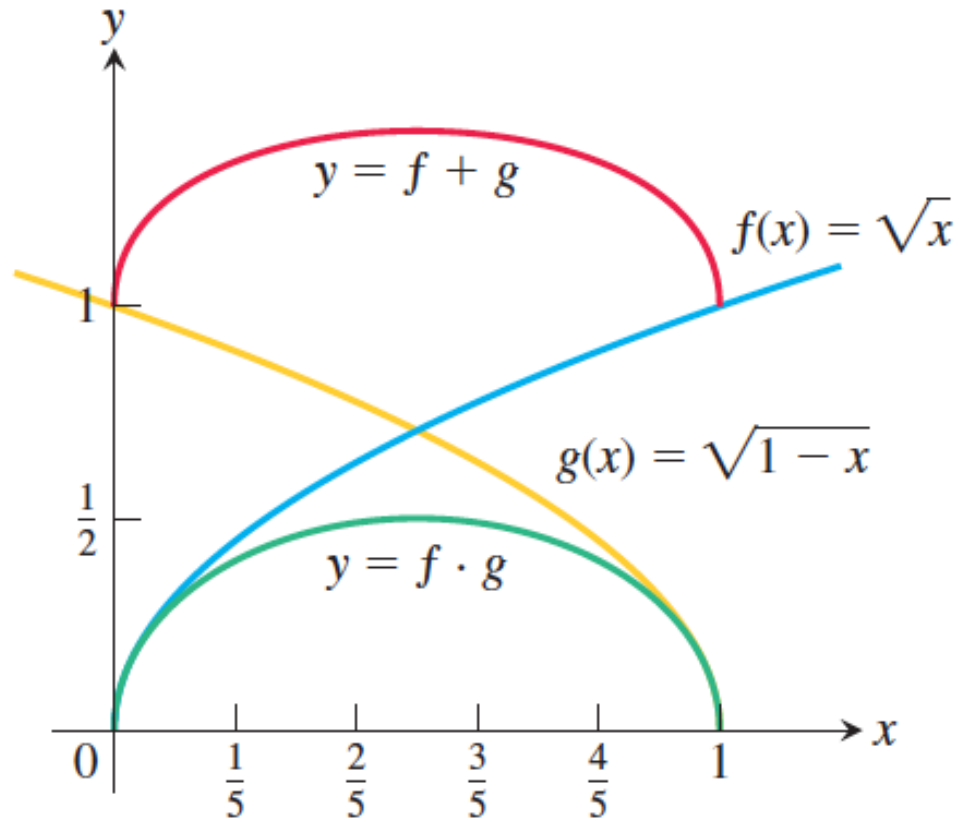
Παράδειγμα

Έστω οι $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$ με πεδία ορισμού $D(f) = [0, \infty)$ και $D(g) = (-\infty, 1]$.

Τα κοινά σημεία ορισμού $D(f) \cap D(g) = [0, 1]$

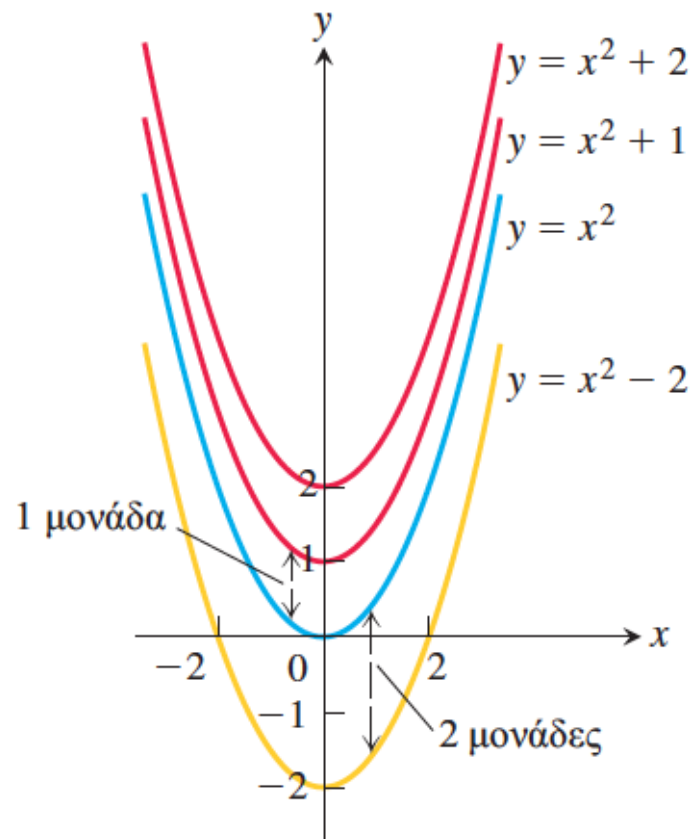
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1)$ ($x = 1$ excluded)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1]$ ($x = 0$ excluded)

Παράδειγμα



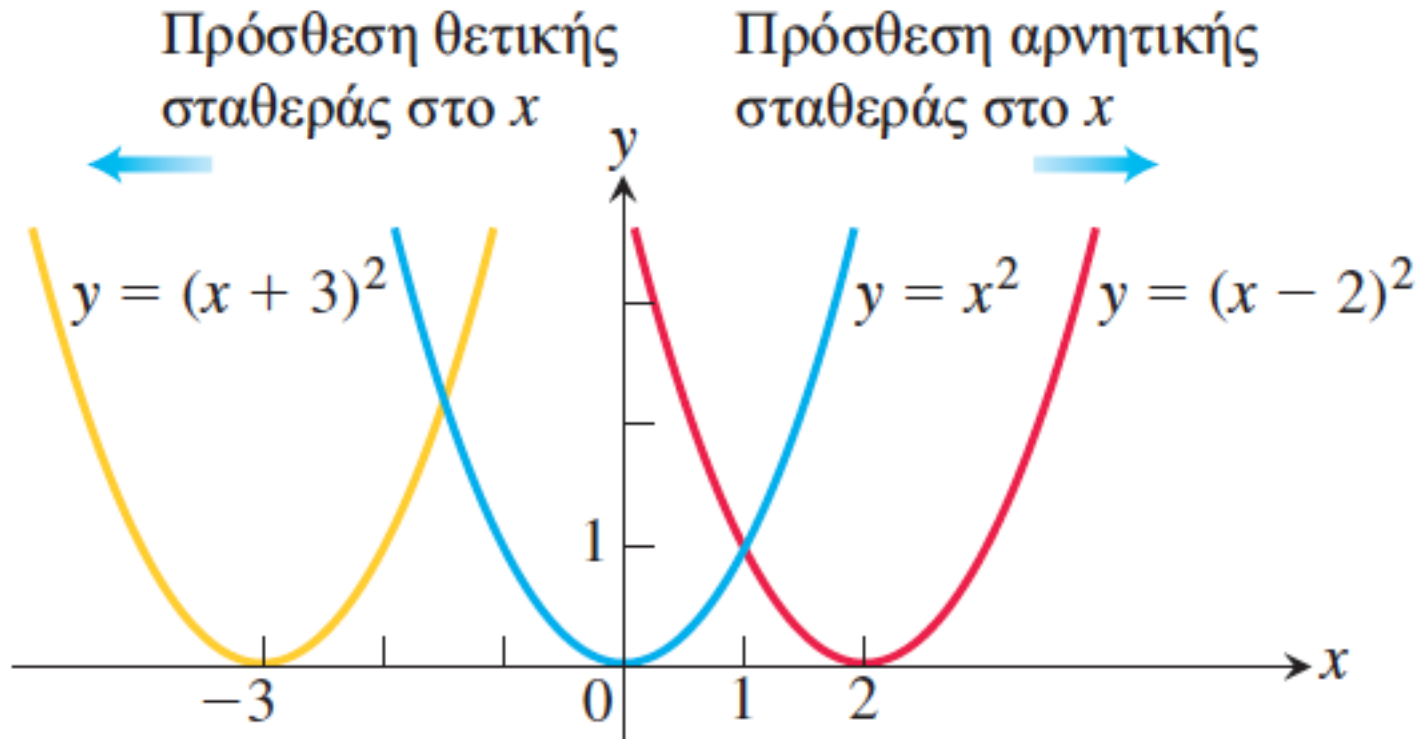
Μετατόπιση συναρτήσεων

- Κατακόρυφη μετακίνηση: $y = f(x) + k$

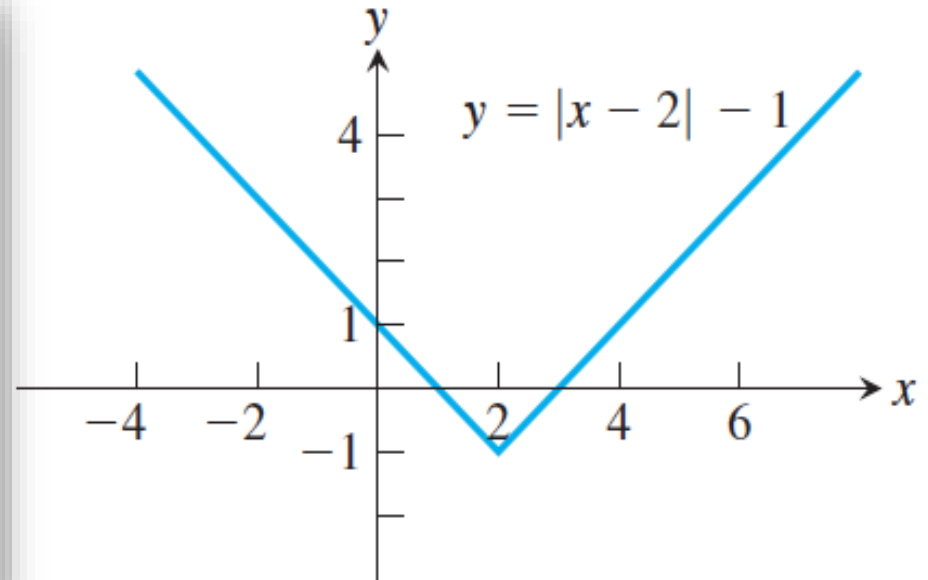
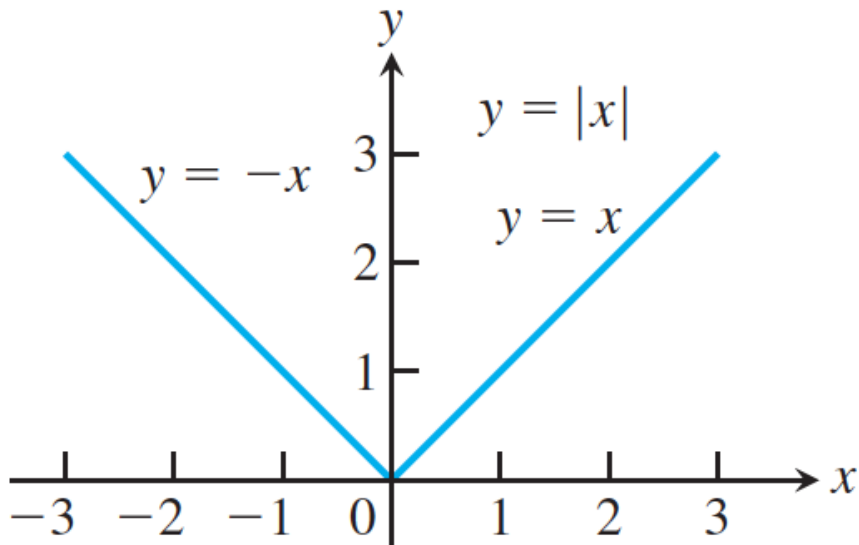


Μετατόπιση συναρτήσεων

- Οριζόντια μετακίνηση: $y = f(x + h)$



Μετατόπιση συναρτήσεων



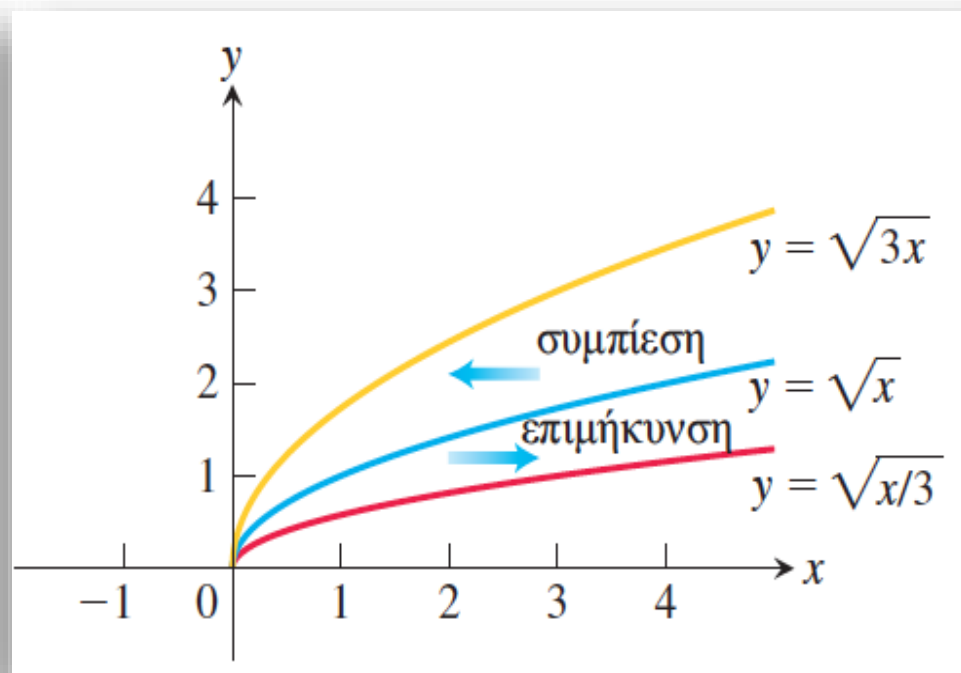
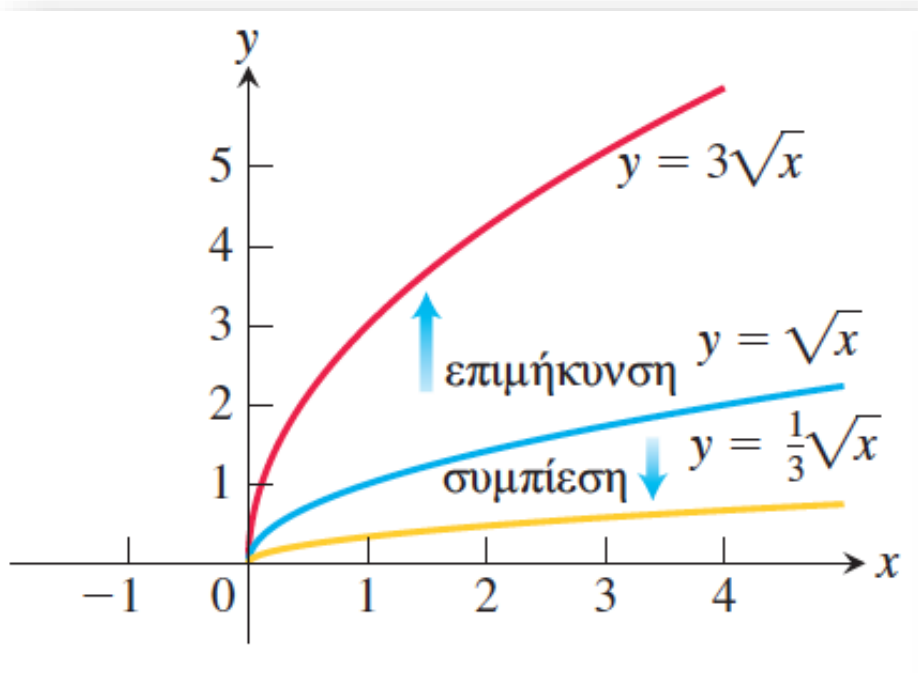
Αλλαγή κλίμακας

Για $c > 1$

- $y = cf(x)$ επιμηκύνεται κατακόρυφα κατά c
- $y = \frac{1}{c}f(x)$ συμπιέζεται κατακόρυφα κατά c
- $y = f(cx)$ συμπιέζεται οριζόντια κατά c
- $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$ επιμηκύνεται οριζόντια κατά c



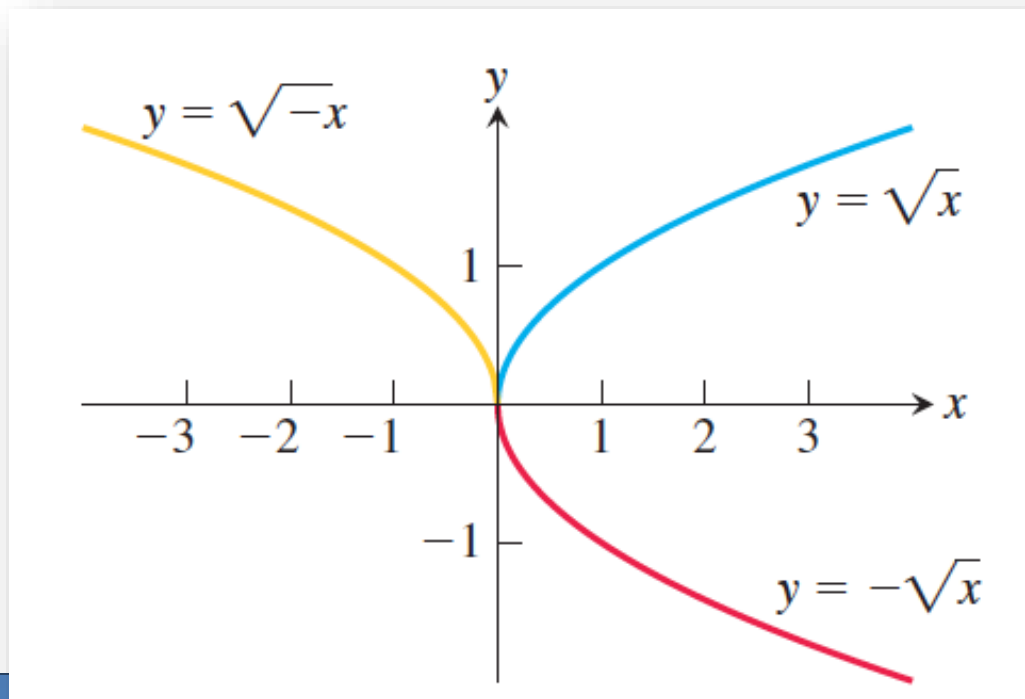
Αλλαγή κλίμακας



Αλλαγή κλίμακας

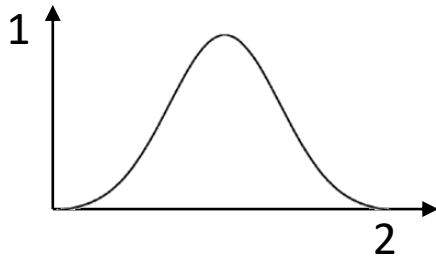
Για $c = -1$

- $y = -f(x)$ ανάκλαση ως προς άξονα x
- $y = f(-x)$ ανάκλαση ως προς άξονα y



Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x): [0,2] \rightarrow [0,1]$



Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών των
ακολουθών συναρτήσεων

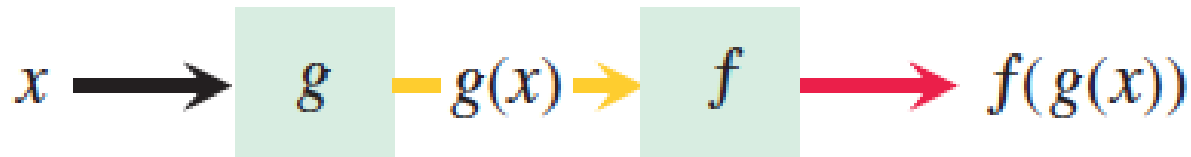
- $f(x) + 2$ $f(-x)$
- $2f(x)$ $-f(x + 1) + 1$
- $-f(x)$

Σύνθετες συναρτήσεις

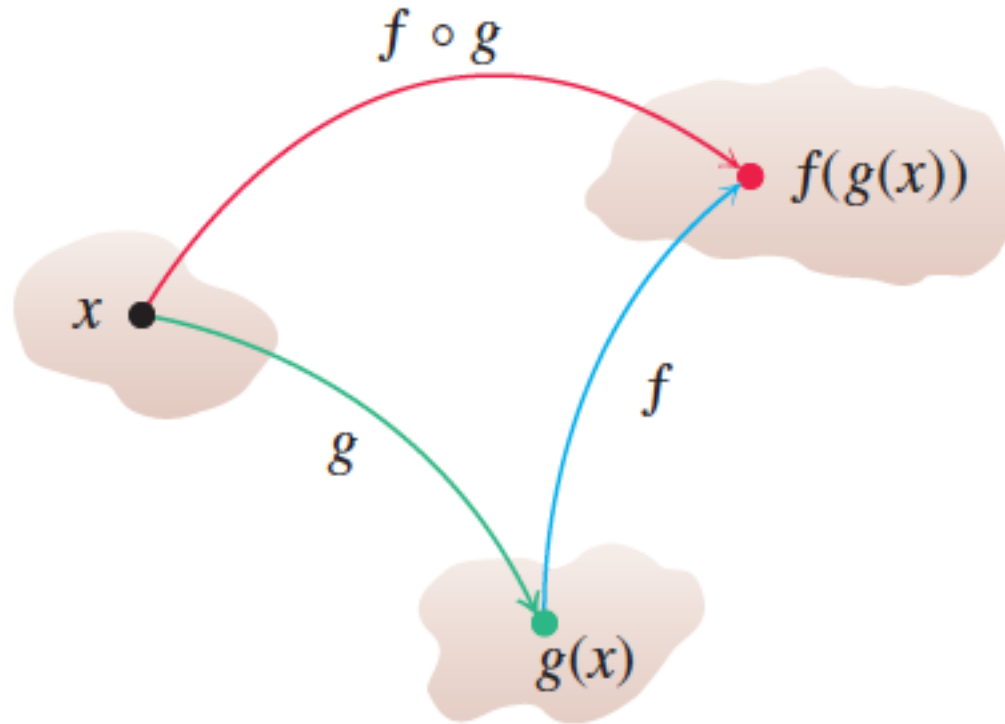
Έστω οι συναρτήσεις f και g , τότε η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ (« f σύνθεση g ») ορίζεται ως

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

με πεδίο ορισμού τους αριθμούς x του πεδίου ορισμού της g για τους οποίους το $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .



Σύνθετες συναρτήσεις



Αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και το $g(x)$ στο πεδίο ορισμού της f , τότε οι f και g μπορούν να συντεθούν

Παράδειγμα

Αν η $f(x) = x + 5$ και η $g(x) = x^2 - 3$

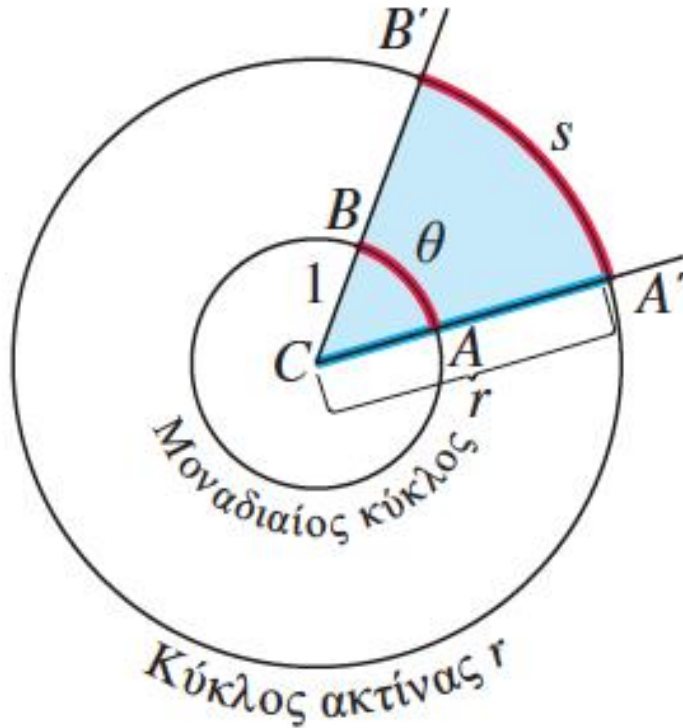
- $f(g(x))$
- $f(g(0))$
- $g(f(x))$

Έστω οι $f(x)$, $g(x)$ και $h(x) = 4 - x$

- $f(g(h(x)))$



Γωνίες



ΣΧΗΜΑ 1.36 Το ακτινιακό μέτρο της επίκεντρης γωνίας $A'CB'$ είναι ο αριθμός $\theta = s/r$. Για μοναδιαίο κύκλο ακτίνας $r = 1$, θ είναι το μήκος του τόξου AB που η επίκεντρη γωνία ACB αποκόπτει από τον μοναδιαίο κύκλο.

Γωνίες

- Τις μετράμε σε μοίρες ή ακτίνια (radians)

– 1 μοίρα $\leftrightarrow \frac{\pi}{180} \approx 0.017$ ακτίνια

– 1 ακτίνιο $\leftrightarrow \frac{180}{\pi} \approx 57.3$ μοίρες

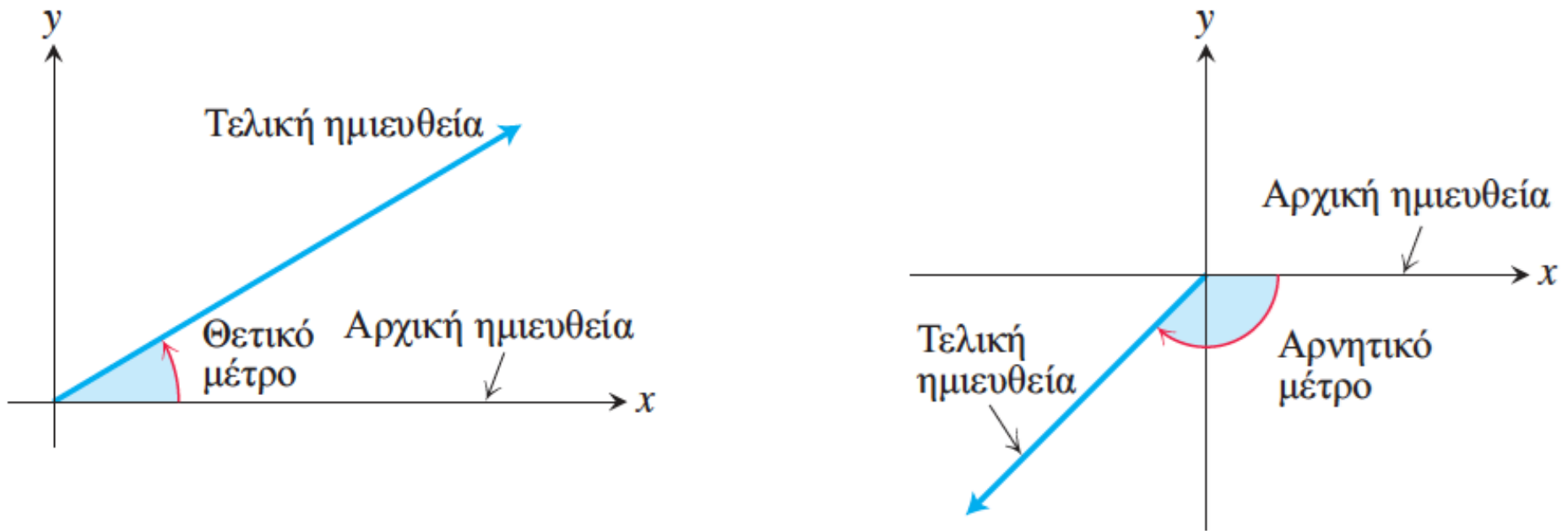
μοίρες

– 180	– 135	– 90	– 45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
– π	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ακτίνια

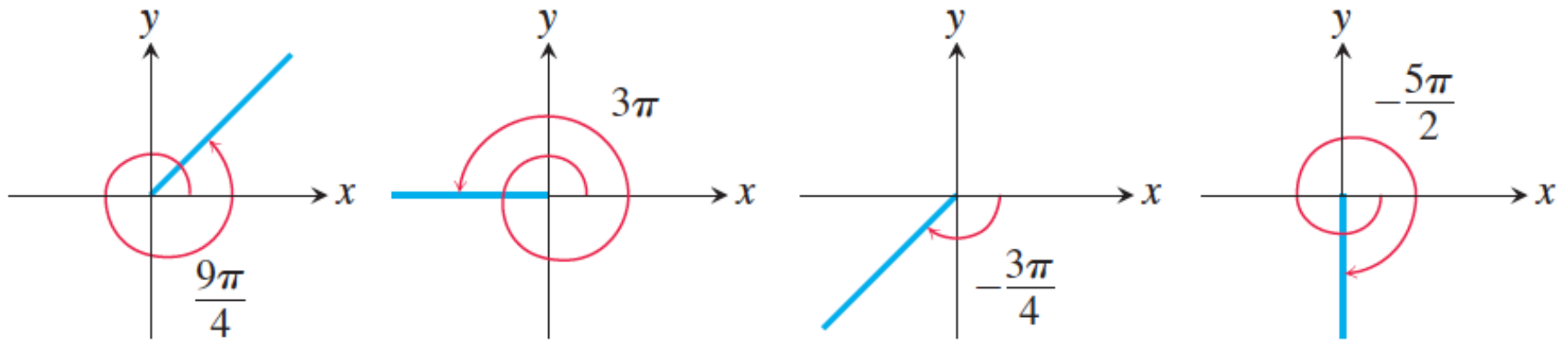


Κανονική θέση γωνιών



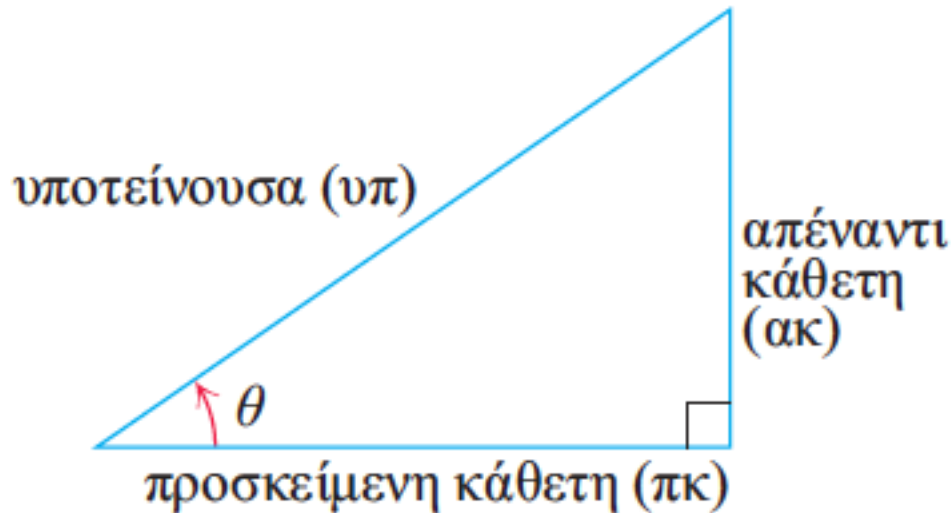
ΣΧΗΜΑ 1.37 Γωνίες σε κανονική θέση στο επίπεδο xy .

Σύμβαση μέτρησης γωνιών



ΣΧΗΜΑ 1.38 Τα μη μηδενικά ακτινιακά μέτρα μπορούν να είναι θετικά ή αρνητικά και να υπερβαίνουν το 2π .

Τριγωνομετρικοί αριθμοί



$$\sin \theta = \frac{\alpha\kappa}{\upsilon\pi} \quad \csc \theta = \frac{\upsilon\pi}{\alpha\kappa}$$

$$\cos \theta = \frac{\pi\kappa}{\upsilon\pi} \quad \sec \theta = \frac{\upsilon\pi}{\pi\kappa}$$

$$\tan \theta = \frac{\alpha\kappa}{\pi\kappa} \quad \cot \theta = \frac{\pi\kappa}{\alpha\kappa}$$

$\sin \theta$: ημίτονο,
 $\csc \theta$: συντέμνουσα

$\cos \theta$: συνημίτονο,
 $\sec \theta$: τέμνουσα

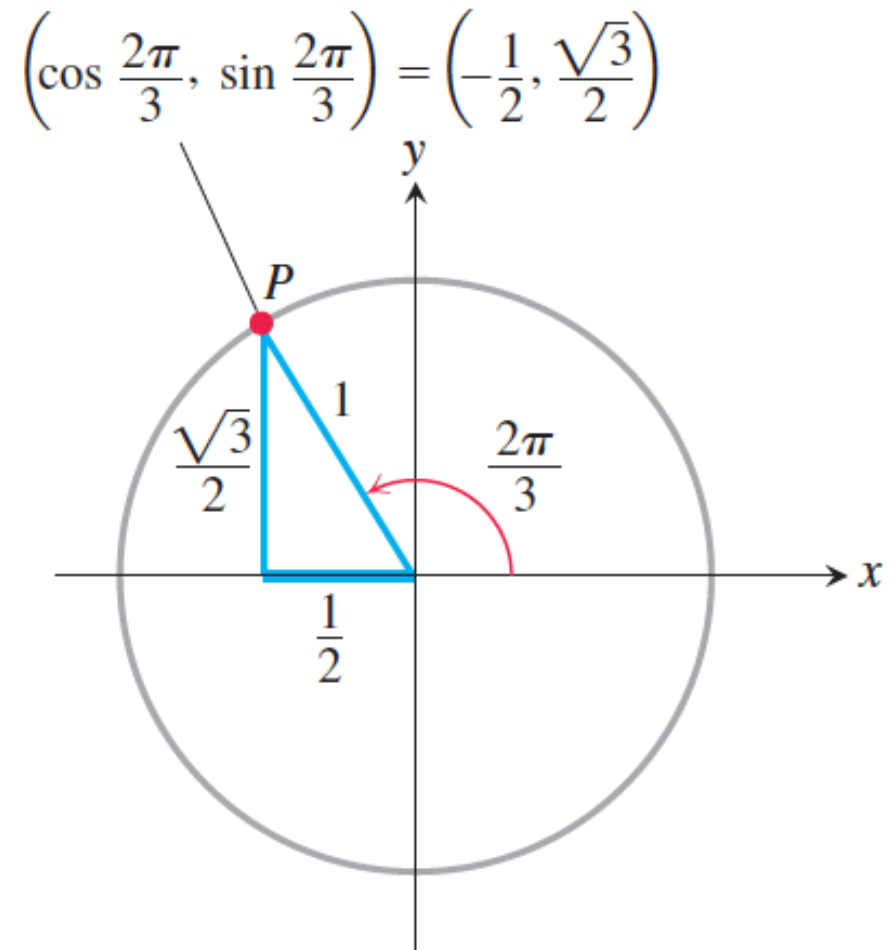
$\tan \theta$: εφαπτομένη
 $\cot \theta$: συνεφαπτομένη



Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Σχέσεις

- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
- $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$
- $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$



Περιοδικότητα

Μια συνάρτηση λέγεται περιοδική αν υπάρχει ένα θετικός αριθμός p για τον οποίο $f(x + p) = f(x)$ για κάθε x . Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός p ονομάζεται περίοδος

$$\text{Period } \pi: \quad \tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\cot(x + \pi) = \cot x$$

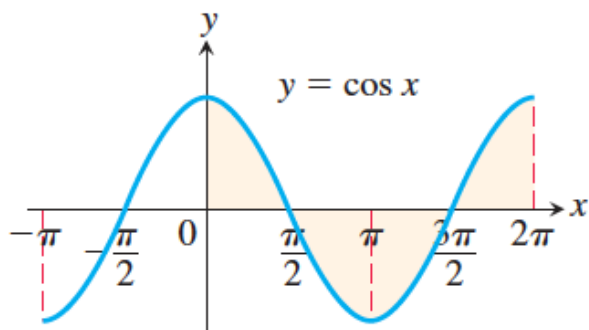
$$\text{Period } 2\pi: \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

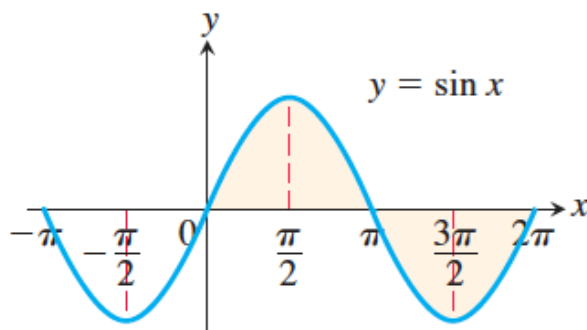
$$\sec(x + 2\pi) = \sec x$$

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x$$

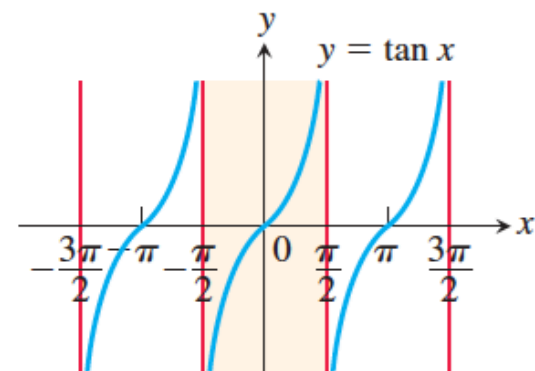




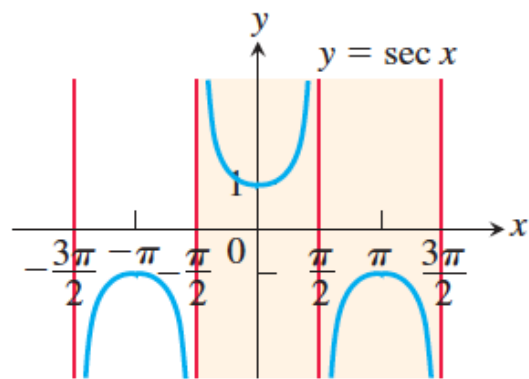
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
 Πεδίο τιμών: $-1 \leq y \leq 1$
 Περίοδος: 2π
 (α)



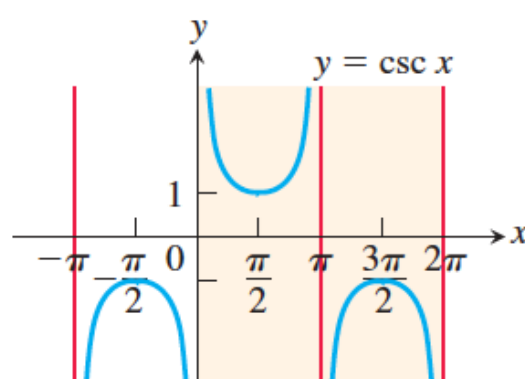
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
 Πεδίο τιμών: $-1 \leq y \leq 1$
 Περίοδος: 2π
 (β)



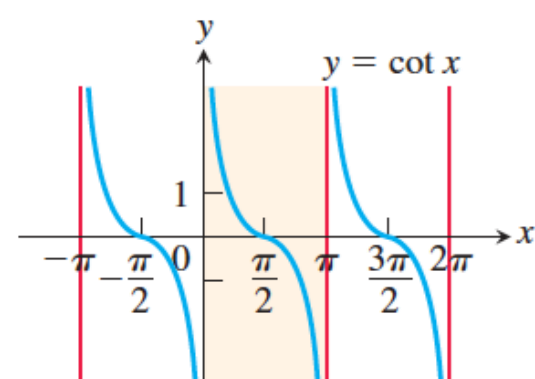
Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
 Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$
 Περίοδος: π
 (γ)



Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
 Πεδίο τιμών: $y \leq -1$ ή $y \geq 1$
 Περίοδος: 2π
 (δ)



Πεδίο ορισμού: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
 Πεδίο τιμών: $y \leq -1$ ή $y \geq 1$
 Περίοδος: 2π
 (ε)

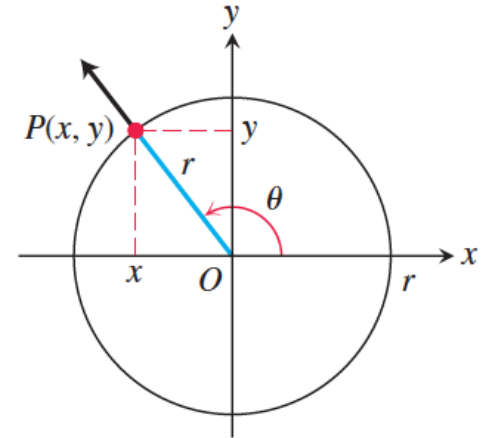


Πεδίο ορισμού: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
 Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$
 Περίοδος: π
 (στ)



Τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
- $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$
- $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$



- $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

Ειδικές ανισότητες

Για γωνία θ σε ακτίνια

- $-|\theta| \leq \sin \theta \leq |\theta|$
- $-|\theta| \leq 1 - \cos \theta \leq |\theta|$

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$1 - \cos \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$	0.707	0.707	0.292
$\frac{\pi}{2} \approx 1.570$	1	0	1
$\pi \approx 3.14$	0	1	0
$-\frac{\pi}{2} \approx -1.570$	-1	0	1



Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών γραφικών παραστάσεων

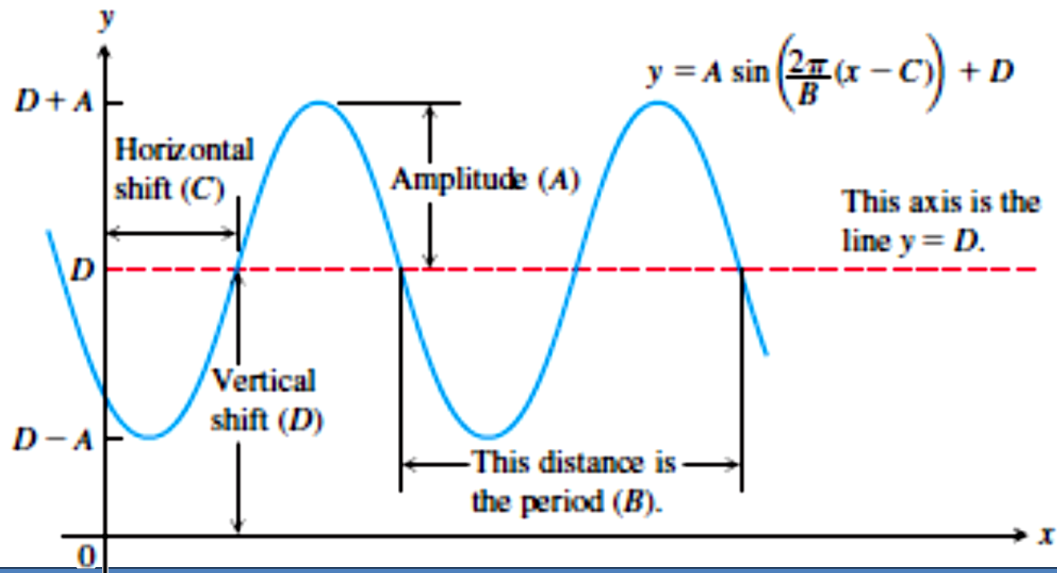
$$y = af(b(x + c)) + d \Rightarrow f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

πλάτος

περίοδος

οριζόντια μετατόπιση

Κατακόρυφη μετατόπιση

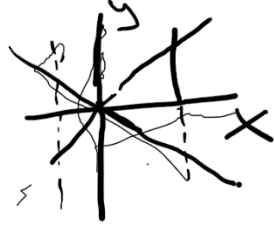
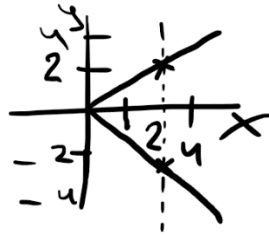


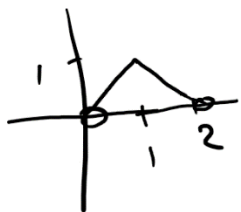
Whiteboard



$$|y| = x$$

$$y^2 = x^2$$



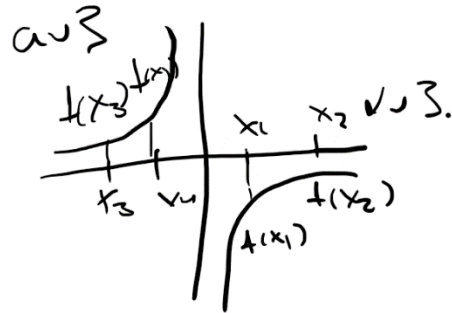


$$y = f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

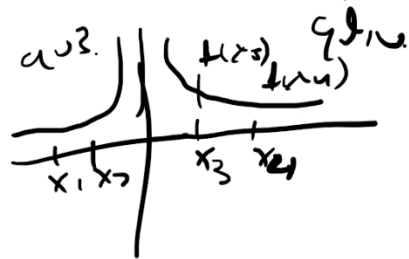
$$y = ax + b$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= a + b \\ 0 &= 2a + b \end{aligned} \right\} \rightarrow \dots$$

$$y = -\frac{1}{x}$$



$$y = \frac{1}{|x|}$$



$$f(x) = x^2 + 1$$
$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x) \quad \text{αρτ.}$$

$$f(x) = 3$$

$$f(-x) = 3 = f(x) \quad \text{αρτ.}$$

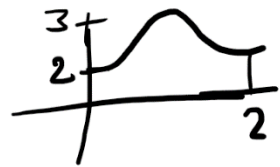
$$f(x) = x^3 + x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \quad \text{αρστ.}$$



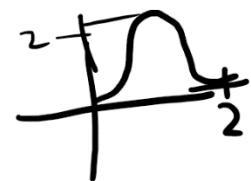
n.o. $[0, 2]$
 n.T $[0, 1]$ $f(x)$

$f(x) + 2$



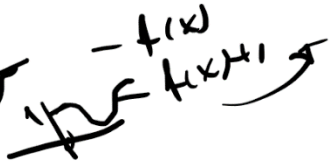
n.o. $[0, 2]$
 n.T $[2, 3]$

$2f(x)$



n.o. $[0, 2]$
 n.T $[0, 2]$

$-f(x+1) + 1$



n.o. $[-1, 1]$
 n.T $[0, 1]$



$$f(x) = x + 5 \quad g(x) = x^2 - 3$$

$$f(g(x)) = g(x) + 5 = (x^2 - 3) + 5 = x^2 + 2 \stackrel{?}{=} h(x)$$

$$f(g(0)) = g(0) + 5 = -3 + 5 = 2$$

$$g(f(x)) = (f(x))^2 - 3 = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 22$$

$$h(x) = 4 - x$$

$$f(g(h(x))) = g(h(x)) + 5 =$$

$$= (h(x))^2 - 3 + 5 =$$

$$= (4 - x)^2 - 3 + 5 = x^2 - 8x + 18$$