Διάλεξη 9
Γραμμικοποίηση, Διαφορικά, Ακρότατα

Ανακοινώσεις #1

Αύριο

Το Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών
του Πανεπιστημίου Κρήτης

Σας προσκαλεί στην εκδήλωση υποδοχής των πρωτοετών φοιτητών 2023, **την Παρασκευή, 27 Οκτωβρίου 2023 στις 10:00 το πρωί στο Αμφιθέατρο "Στέλιος Ορφανουδάκης"** στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών στην Πανεπιστημιούπολη Βουτών και σύμφωνα με το παρακάτω πρόγραμμα:

Ζωντανή μετάδοση στο link **https://uoc-gr.zoom.us/j/88410785860**

Ώρα	Διάρκεια	Δραστηριότητα
10:00-10:05	5′	**Χαιρετισμός από τον Κοσμήτορα της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης, Καθηγητή κ. Μανόλη Στρατάκη**
10:05-10:20	15′	**Καλωσόρισμα - το CSD σήμερα** Αντώνης Αργυρός, Πρόεδρος Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών
10:20-10:35	15′	**Παρουσίαση του Ινστιτούτου Πληροφορικής του ΙΤΕ** Δημήτρης Πλεξουσάκης, Διευθυντής Ινστιτούτου Πληροφορικής, ΙΤΕ και καθηγητής Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών
10:35-10:50	15′	**Απονομή υποτροφιών Στέλιου Ορφανουδάκη** Δημήτρης Πλεξουσάκης, Διευθυντής Ινστιτούτου Πληροφορικής, ΙΤΕ και καθηγητής Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών
10:50-11:35	45′	**Απονομή τίτλου Ομότιμου Καθηγητή του Τμήματος στον κ. Μανόλη Κατεβαίνη**
11:35-11:50	15′	Απόφοιτοι, τάξη 1993: Ομιλία, **Βασίλης Ορφανάκης** Προϊστάμενος Τμήματος Δ' Πληροφορικής & Νέων Τεχνολογιών της Διεύθυνσης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Λασιθίου **"CSD... η καλύτερη επιλογή διαχρονικά - Μια πρόταση"**
11:50-12:05	15′	Απόφοιτοι, τάξη 1993: Ομιλία, **Θανάσης Παπαθανασίου** Director, Engineering at Databricks
12:05-12:20	15′	Απόφοιτοι, τάξη 1993: Ομιλία, **Γιώργος Τζανετάκης,** **"30 χρόνια υπολογιστές και μουσική"** Professor of Computer Science, Faculty of Engineering and Computer Science, University of Victoria, Canada
12:20-12:35	15′	Απόφοιτοι, τάξη 1993: Ομιλία, **Γιώργος Χαλκιαδάκης** Professor, School of Electrical and Computer Engineering, Technical University of Crete **"Πως δεν έγινα ναυπηγός μηχανικός και πως αυτό οδήγησε σε ένα ωραίο ταξίδι"**
12:35-12:50	10′	**Απονομή Επαίνων Διακεκριμένων Επικουριών Προπτυχιακών Φοιτητών (ΔΕΠΡΟΦΟΙΤ)** Αντώνης Αργυρός, Πρόεδρος Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών
12:50-		**Ελαφρύς μπουφές**

Σας περιμένουμε όλους σε μια ευχάριστη εκδήλωση!

Ανακοινώσεις #2

Επόμενη εβδομάδα

Τρίτη 31/10: φροντιστήριο
Πέμπτη 2/11 και Παρασκευή 3/11: διάλεξη

Πρόοδος
Σάββατο 25/11 στις 14:00

Παράδοση ασκήσεων

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Τυπικές μορφές συναρτήσεων είναι οι $y = f(x)$, που εκφράζει ότι η τιμής της y εξαρτάται από τις τιμές του x

Μια άλλη κατηγορία συναρτήσεων είναι οι πεπλεγμένες συναρτήσεις που εκφράζονται από τις εξισώσεις $F(x, y) = 0$.

- $y^5 - y = x$
- $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Η παράγωγος μπορεί να βρεθεί χωρίς να λύσουμε τις εξισώσεις ως προς y, μέσω της παραγώγισης πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

1. Παραγωγίζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ώς προς x, θεωρώντας τη μεταβλητή y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x
2. Συγκεντρώνουμε όλους τους όρους που περιέχουν την παράγωγο dy/dx στο ένα μέλος και επιλύουμε ως προς dy/dx

Παράγωγος ώς ρυμθός μεταβολής

Ο στιγμιαίος ρυμθός μεταβολής της f ως προς x στο x_0 είναι η παράγωγος

$$f'(x_0) = \lambda\iota\mu_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

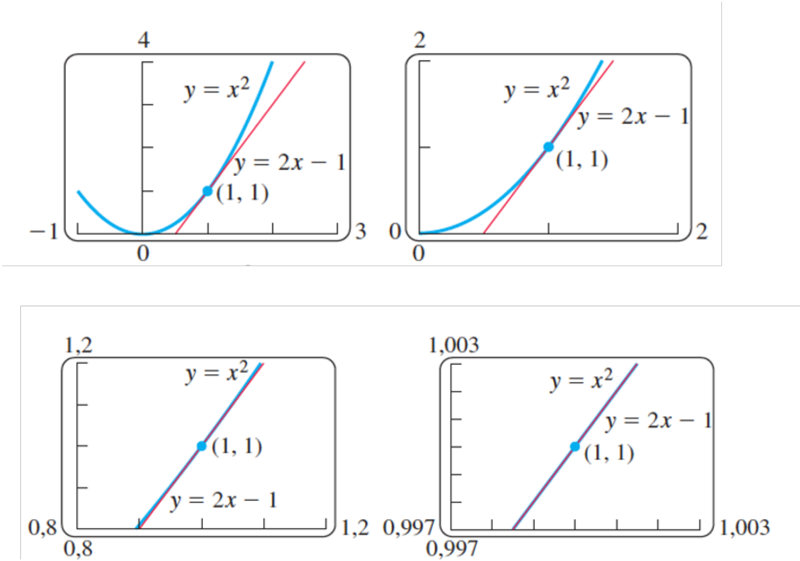
υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

- Ταχύτητα $u(t) = \frac{ds}{dt} = \lambda\iota\mu_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$
- Επιτάχυνση $a(t) = \frac{du}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

Συναφείς ρυθμοί

Ένα αερόστατο που ανυψώνεται κατακόρυφα από επίπεδη περιοχή εντοποίζεται από μια συσκευή *radar* που απέχει $150m$ από το σημείο απογείωσης.
Την στιγμή που η γωνία ανύψωσης είναι $\pi/4$, ο ρυθμος αύξησης αυτής της γωνίας είναι $0,14 rad/min$.
Πόση είναι η ταχύτητα ανύψωσης του αερόστατου;

Γραμμικοποίηση



Γραμμικοποίηση ή Γραμμική Προσέγγιση

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = a$, τότε η προσεγγιστική συνάρτηση

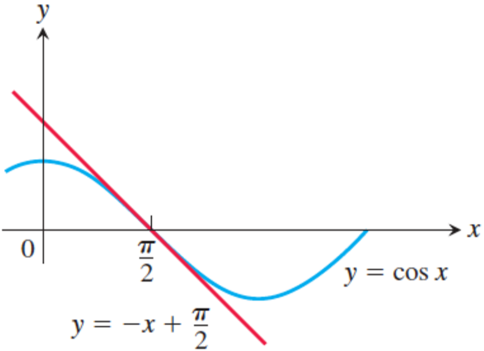
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

είναι η γραμμικοποίηση της f στο a. Η προσέγγιση $f(x) \approx L(x)$ είναι η κανονική γραμμική προσέγγιση της f στο a και το a το κέντρο της προσέγγισης

Σημείωση
Εφαπτομένη: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Παράδειγμα

- Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = \cos x$ στο σημείο $a = \frac{\pi}{2}$
- Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ στο σημείο $a = -1$



Γραμμική προσέγγιση δυνάμεων και ριζών

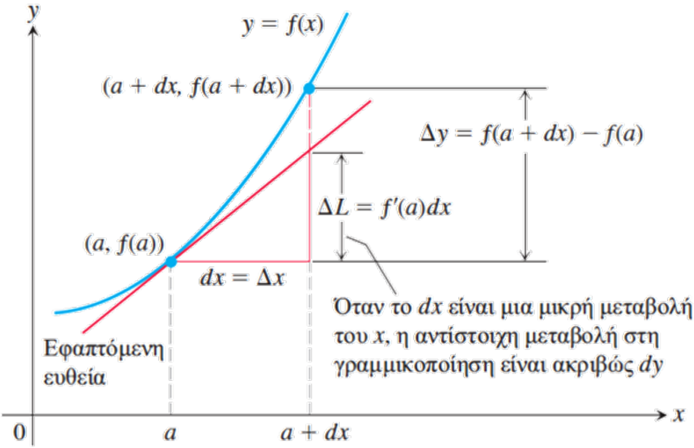
Για $x \approx 0$ τότε $(1+x)^k \approx 1 + kx$
Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση της $\sqrt{1+x}$ κοντά στο μηδέν.

Διαφορικά

Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση.

- Το διαφορικό dx είναι μια ανεξάρτηση μεταβλητή
- Το διαφορικό dy είναι μια εξαρτημένη μεταβλητή που ισούται με $dy = f'(x)dx$

Διαφορικά



y
y = f(x)
(a + dx, f(a + dx))
Δy = f(a + dx) − f(a)
ΔL = f′(a)dx
(a, f(a))
dx = Δx
Όταν το dx είναι μια μικρή μεταβολή
του x, η αντίστοιχη μεταβολή στη
γραμμικοποίηση είναι ακριβώς dy
Εφαπτόμενη
ευθεία
0
a
a + dx
x

Εκτιμήση σε χρήση διαφορικών

Έστω ότι γνωρίζουμε την τιμή μιας διαφορίσημης συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο a και θέλουμε να δούμε πόσο θα αλλάξει αυτή η τιμή αν μετακινηθούμε στο $a + dx$.
Αν το $dx = \Delta x$ είναι μικρό, τότε το $\Delta y \approx dy$, δηλαδή $f(a + dx) = f(a) + \Delta y$. Η διαφορική προσέγγιση μας δίνει $f(a + dx) \approx f(a) + dy$ όταν $dx = \Delta x$

Σφάλμα διαφορικής προσέγγισης

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ διαφορίσημη στο $x = a$ και έστω $dx = \Delta x$ μια μικρή μεταβολλή του x.

- Πραγματική μεταβολλή του $f(x)$ είναι $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$
- Διαφρορική εκτίμηση της μεταβολλής είναι $df = f'(a)dx$

Σφάλμα διαφορικής προσέγγισης

Αν η $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = a$ και το x μεταβάλλεται από a σε $a + \Delta x$, η μεταβολή Δy της f δίνεται από την σχέση

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

όπου $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$

Παράδειγμα

- Αν η ακτίνα ενός κύκλου αυξηθεί από $a = 10m$ σε $10.1m$, πόσο θα αυξηθεί το εμβαδόν;
- Έστω η $f(x) = x^3 - x$ στο $x_0 = 1$ και $dx = 0.1$. Να υπολογιστούν τα Δf, df και το σφάλμα προσέγγισης. Για $dx = 0.2$

Ολικά ακρότατα

Έστω $f(x)$ συνάρτηση με πεδίο ορισμού D. Η $f(x)$ αποκτά την απόλυτα μεγαλύτερη τιμή της (ολικό ή απόλυτο μέγιστο) στο σημείο c του Π.Ο, αν

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D$$

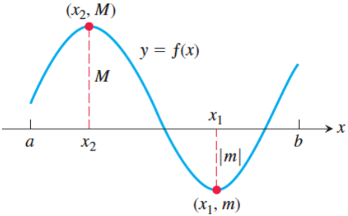
και την απόλυτα μικρότερη τιμή της (ολικό ή απόλυτο ελάχιστο) αν

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in D$$

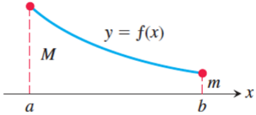
Θεώρημα ακροτάτων

Αν η f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\left[a, b\right]$, τότε έχει ολικό μέγιστο M και ολικό ελάχιστο m στο $\left[a, b\right]$.
Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 τέτοιοι ώστε
$f(x_1) = m, \; f(x_2) = M$ και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε άλλο
$x \in [a, b]$

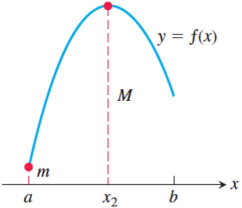
Παράδειγμα



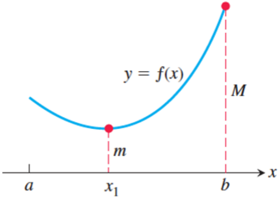
Μέγιστο και ελάχιστο
σε εσωτερικά σημεία



Μέγιστο και ελάχιστο
σε άκρα



Μέγιστο σε εσωτερικό σημείο,
ελάχιστο σε άκρο

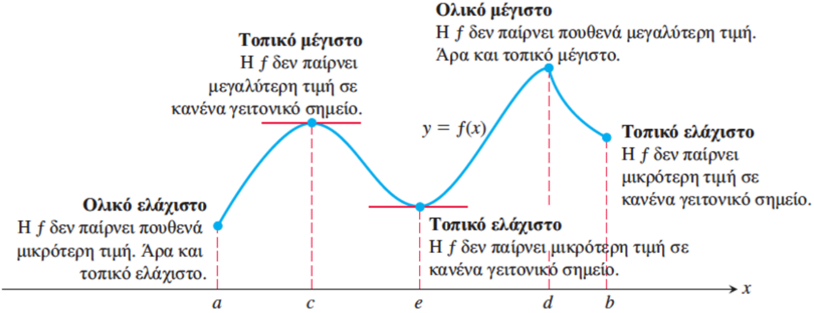


Ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο,
μέγιστο σε άκρο

Τοπικά ακρότατα

- Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο c εντός του πεδίου ορισμού της D, αν $f(x) \leq f(c)$ για κάθε $x \in D$ που ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c.
- Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο c εντός του πεδίου ορισμού της D, αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε $x \in D$ που ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το c.

Παράδειγμα



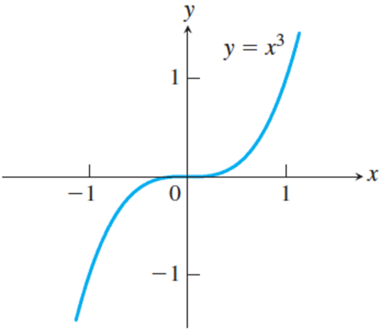
Τοπικό μέγιστο
Η f δεν παίρνει μεγαλύτερη τιμή σε κανένα γειτονικό σημείο.
Ολικό μέγιστο
Η f δεν παίρνει πουθενά μεγαλύτερη τιμή. Άρα και τοπικό μέγιστο.
$y = f(x)$
Τοπικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει μικρότερη τιμή σε κανένα γειτονικό σημείο.
Ολικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει πουθενά μικρότερη τιμή. Άρα και τοπικό ελάχιστο.
Τοπικό ελάχιστο
Η f δεν παίρνει μικρότερη τιμή σε κανένα γειτονικό σημείο.
a
c
e
d
b
x

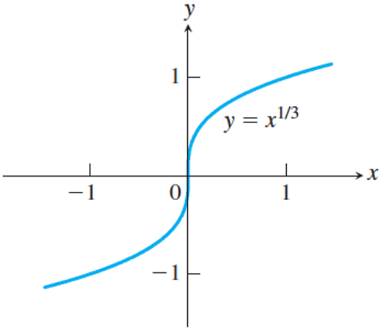
Θεώρημα πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο c του Π.Ο της και αν η $f'(x)$ ορίζεται στο c τότε $f'(c) = 0$

- ¨Ενα εσωτερικό σημείο του Π.Ο μιας συνάρτησης f όπου η $f'(x) = 0$ ή δεν ορίζεται λέγεται κρίσιμο σημείο της f

Παράδειγμα





Εύρεση ολικών ακροτάτων

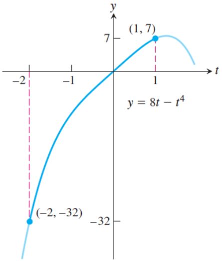
Για να βρούμε τα ολικά ακρότατα μια συνεχούς συνάρτησης f σε ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα

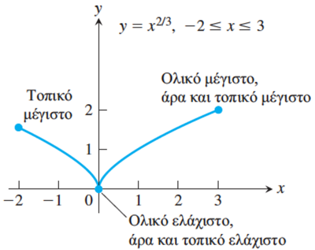
1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία στο διάστημα
2. Υπολογίζουμε τις τιμές στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα
3. Πέρνουμε την μέγιστη/ελάχιστη τιμή

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

- $f(x) = x^2$ στο $[-2, 1]$
- $g(t) = 8t - t^4$ στο $[-2, 1]$
- $f(x) = x^{2/3}$ στο $[-2, 3]$





whiteboard

$$f(x) = \cos(x) \qquad a = \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

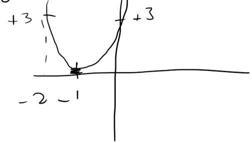
$$L(x) = 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -x + \frac{\pi}{2}$$

$f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ πο $a = -1$

$f'(x) = 4x + 4$

$f(-1) = -5$, $f'(-1) = 0$

$L(x) = -5 + 0 \cdot x$



$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}x + 1$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)\cdot(-x) = 1 + x$$

$y = x^5 + 37x \qquad dy \quad dx$

$dy = f'(x)\,dx$

$dy = (5x^4 + 37)\cdot dx$

(α) $x = 1 \qquad dy, \quad dx = 0{,}01$

$dx = 0{,}01: \; dy = (5\cdot 1 + 37)\cdot 0{,}01 = 0{,}42$

$dx = 0{,}1: \; dy = (5\cdot 1 + 37)\cdot 0{,}1 = 4{,}2$

$dx = 0{,}2: \; dy = (5\cdot 1 + 37)\cdot 0{,}2 = 8{,}4$

(5.13)

$a = 10m \rightarrow a' = 10{,}1$ $\quad dr = 10{,}1 - 10 = 0{,}1$

$A = \pi r^2 \Rightarrow A(r) = \pi r^2$

$dA = A'(a) \cdot dr = 2\pi a dr = 2\pi 10 \cdot 0{,}1 = \underline{2\pi} \, m^2$

$\underline{\Delta A} = \pi (10{,}1)^2 - \pi \cdot 10^2 = \underline{2\pi} + 0{,}01\pi$

(5.13) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$ $dx = 0{,}1$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

(α) $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f(1{,}1) - f(1) =$

$= 1{,}331 - 1{,}1 = \underline{0{,}231}$

(β) $df = f'(x_0)dx = (3 \cdot 1 - 1) \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}2}$

(γ) σφάλμα $|\Delta f - df| = |0{,}231 - 0{,}2| = \underline{0{,}031}$
ΕΔΚ

(83) $f(x) = x^2$ $[-2, 1]$ ΤΜ. Ο.Ε

$f'(x) = 2x$, $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

Ακρ. $x=0$, $x=-2$, $x=1$

$f(0) = 0 \leftarrow$ ολικ min

$f(-2) = 4 \leftarrow$ ολικ μεγ.

$f(1) = 1$