Διάλεξη 8
Παράγωγοι συναρτήσεων

Παράγωγοι

Η παράγωγος μια συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και δίνεται από

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.
Ισοδύναμες διατυπώσεις

- Η κλήση της γραφικής παράστασης $y = f(x)$ στο $x = x_0$
- Η κλήση της εφαπτομένης στην $y = f(x)$ στο $x = x_0$
- Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x στο $x = x_0$
- Η παράγωγος $f'(x)$ στο $x = x_0$

Παράγωγος ως συνάρτηση

Η παράγωγος της $f(x)$ ως προς x, είναι η συνάρτηση $f'(x)$ και η οποία ισούται με

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

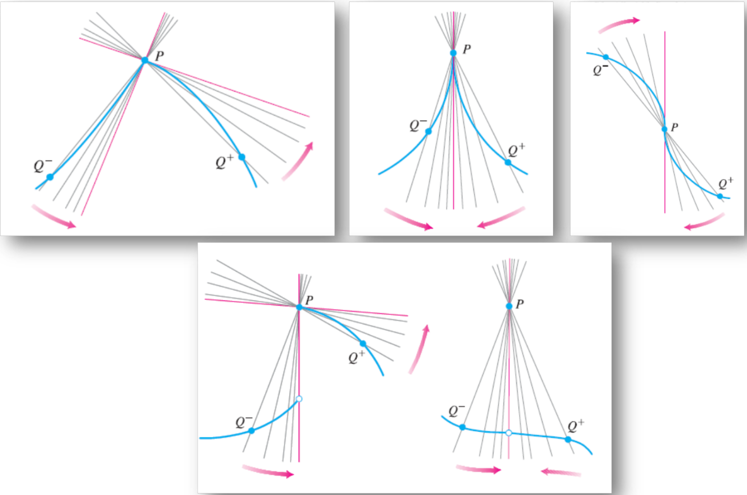
υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

- Εναλλακτικά: $f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$
- Επίσης γράφεται και: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$

Διαφορισιμότητα σε διαστήματα

- Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (πεπερασμένο ή άπειρο) αν υπάρχει η παράγωγος της σε κάθε σημείο του διαστήματος
- Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] αν είναι διαφορίσιμη στο (α,β) και υπάρχουν τα όρια
  $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ και $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

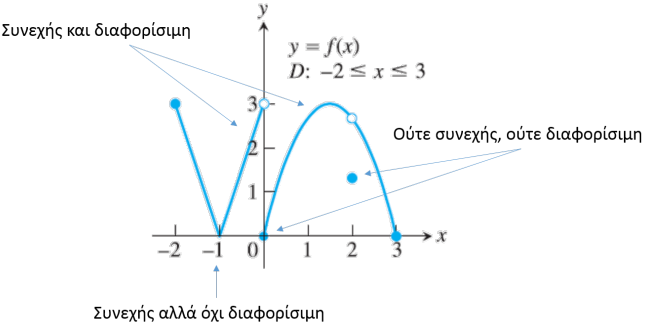
Μη ύπαρξη παραγώγου



Διαφορισιμότητα και συνέχεια

Αν η $f(x)$ έχει παράγωγο στο $x = c$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = c$

Το αντίστροφο δεν ισχύει



Κανόνες παραγώγισης: άθροισμα

- Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και c μια σταθερά, τότε $\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}$
- Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x, τότε το άθροισμα $f + g$ είναι παραγωγίσιμο σε κάθε σημείο όπου οι f και g είναι και οι δύο παραγωγίσιμες. Σε αυτά τα σημεία
$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Κανόνες παραγώγισης: γινόμενο

Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x, τότε και το γινόμενο τους είναι παραγωγίσιμο

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Κανόνες παραγώγισης: πηλίκο

Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x και $g(x) \neq 0$ το πηλίκο τους είναι παραγωγίσιμο

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2(x)}$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Κανόνες παραγώγισης: δυνάμεις

- Αν η f έχει σταθερή τιμή $f(x) = c$, τότε $\frac{df}{dx} = 0$
- Αν n θετικός ακέραιος, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
- και γενικά, n πραγματικός αριθμός, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ για κάθε x που ορίζονται οι x^n και x^{n-1}

Παράγωγοι ανωτέρων τάξεων

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε η παράγωγος της $f'(x)$ είναι επίσης συνάρτηση.
Αν η $f'(x)$ είναι διαφορίσιμη, τότε μπορούμε να πάρουμε την παράγωγο της $\frac{df'(x)}{dx}$, που είναι μια καινούργια συνάρτηση και γράφεται

$$f^{''}(x) = y^{''}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{dy'}{dx}$$

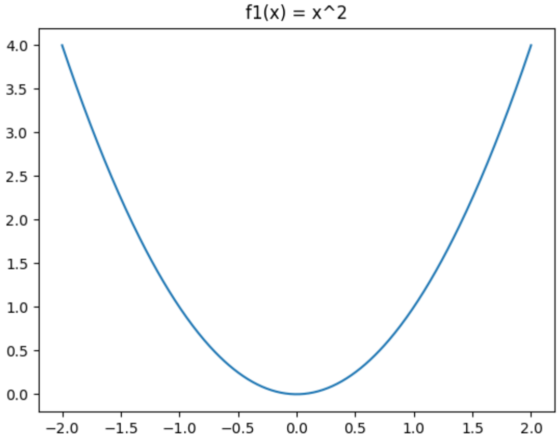
Παραδείγματα

- Να υπολογιστεί η 1 και 2 παράγωγος της $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
- Να υπολογιστούν οι παράγωγοι όλων των τάξεων της $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$

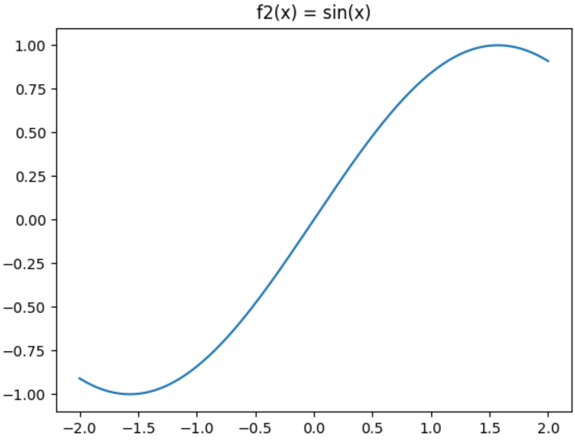
Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)\tan(x)$
- $\frac{d}{dx}(\csc(x)) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sin(x)} = \csc(x)\cot(x)$
- $\frac{d}{dx}(\cot(x)) = \frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\csc^2(x)$
- csc: συντέμνουσα, sec: τέμνουσα, cot: συνεφαπτομένη

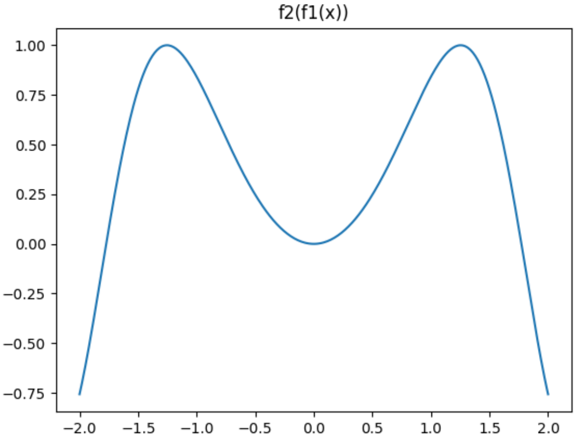
Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης



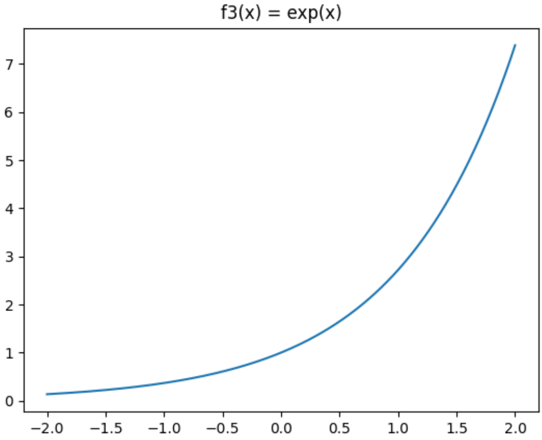
Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης



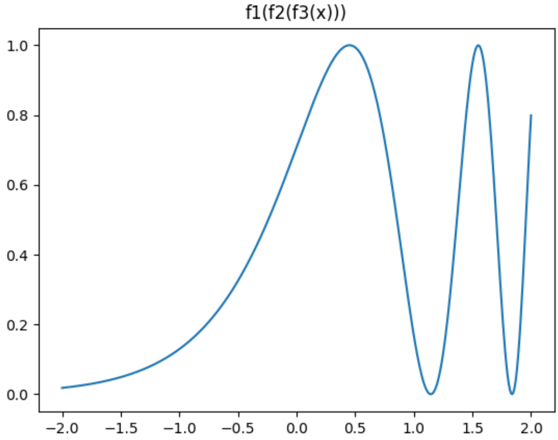
Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης



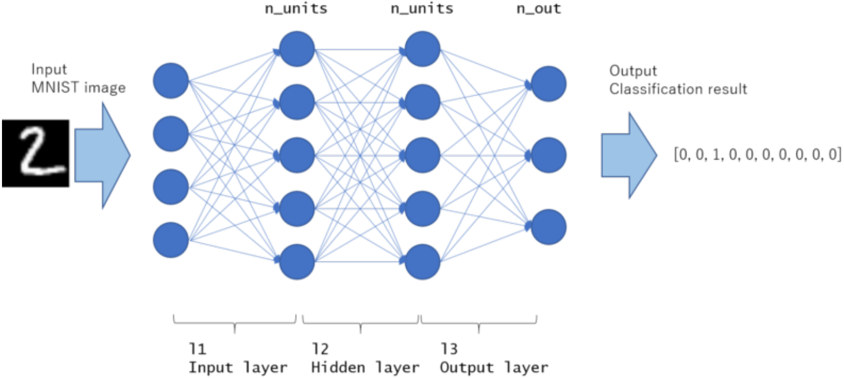
Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης



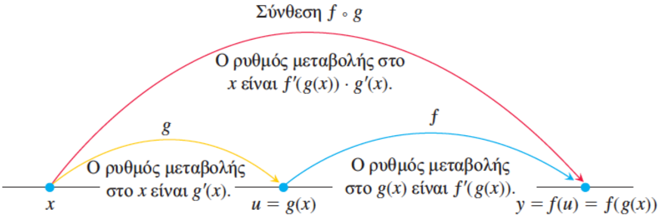
Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης



Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης



Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης



Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

Α η $f(u)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $u = g(x)$ και η $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο x, τότε η σύνθετη συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ είναι διαφορίσιμη στο x, και

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Σε συμβολισμό *Leibniz* , αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

όπου η $\frac{dy}{du}$ υπολογίζεται στο σημείο $u = g(x)$.

Αλυσιδωτή παραγώγιση δυνάμεων

Έστω n πραγματατικός αριθμός και $f(u) = u^n$ μια συνάρτηση δύναμης. Αν η u είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του x, τότε σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγης

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \tag{1}$$

Παραδείγματα

- Να βρεθεί η dy/dx όπου $y = (u/5) + 7$ και $u = 5x - 35$
- Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της $y = x(2x + 1)^4$
- Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία που εφάπτεται της καμπύλης $y = 1/(1 - 2x)^3$ έχει θετική κλίση.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ στο $x = 0$

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Τυπικές μορφές συναρτήσεων είναι οι $y = f(x)$, που εκφράζει ότι η τιμής της y εξαρτάται από τις τιμές του x

Μια άλλη κατηγορία συναρτήσεων είναι οι πεπλεγμένες συναρτήσεις που εκφράζονται από τις εξισώσεις $F(x, y) = 0$.

- $y^5 - y = x$
- $x^2 + y^2 - 25 = 0$

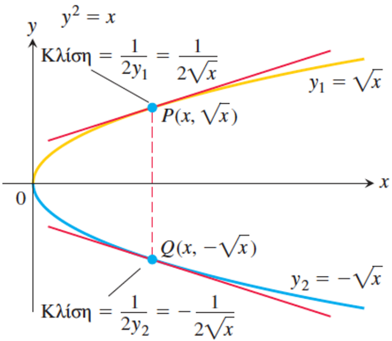
Η παράγωγος μπορεί να βρεθεί χωρίς να λύσουμε τις εξισώσεις ως προς y, μέσω της παραγώγισης πεπλεγμένων συναρτήσεων.

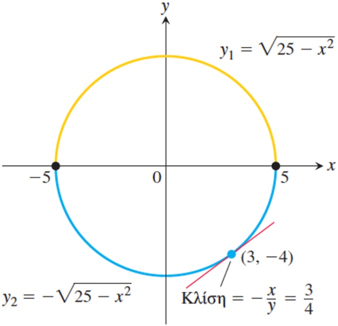
Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

1. Παραγωγίζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ώς προς x, θεωρώντας τη μεταβλητή y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x
2. Συγκεντρώνουμε όλους τους όρους που περιέχουν την παράγωγο dy/dx στο ένα μέλος και επιλύουμε ως προς dy/dx

Παράδειγμα

- Να βρεθεί η dy/dx όπου $y^2 = x$
- Να βρεθεί η κλίση του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο $(3, -4)$

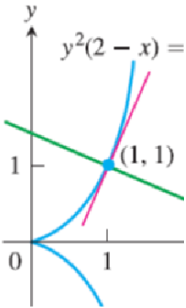




Παράδειγμα

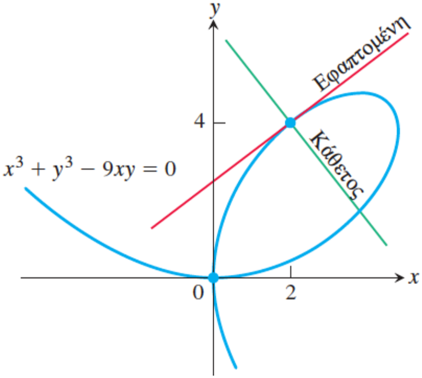
Κισσοειδής του Διοκλή (200 π.Χ.)

- Να βρεθούν η εφαπτομένη και η κάθετη της $y^2(2-x) = x^3$ και στο σημείο (1,1)



Παράδειγμα

- Να δειχθεί ότι το σημείο (2,4) ανήκει στην $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ και να βρεθούν η εφαπτομένη και η κάθετη στο αυτό το σημείο



Παράγωγος ώς ρυμθός μεταβολής

Ο στιγμιαίος ρυμθός μεταβολής της f ως προς x στο x_0 είναι η παράγωγος

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

- Ταχύτητα $u(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$
- Επιτάχυνση $a(t) = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$

Συναφείς ρυθμοί

Ένα αερόστατο που ανυψώνεται κατακόρυφα από επίπεδη περιοχή εντοποίζεται από μια συσκευή *radar* που απέχει $150m$ από το σημείο απογείωσης.
Την στιγμή που η γωνία ανύψωσης είναι $\pi/4$, ο ρυθμος αύξησης αυτής της γωνίας είναι $0,14 rad/min$.
Πόση είναι η ταχύτητα ανύψωσης του αερόστατου;

whiteboard

$$\frac{dy}{dx} \qquad y = \frac{u}{5} + 7 \quad , \quad u = 5x - 35$$

$$y(u(x)) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{5} \quad , \quad \frac{du}{dx} = 5$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = (2x+1)^3 \cdot (10x+1)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \qquad g(x) = 2x+1 \;, \quad h(x) = 10x+1$$

$$y' = g^3 \cdot h \;, \quad y'' = g^3 \cdot \frac{dh}{dx} + h \cdot \frac{dg^3}{dx}$$

$$\frac{dh}{dx} = 10 \;, \quad \frac{dg^3}{dx} = 3 \cdot g^2 \frac{dg}{dx} \;, \quad \frac{dg}{dx} = 2$$

$$= 3 \cdot g^2 \cdot 2$$

$$(2x+1)^2$$

$$y'' = (2x+1)^3 \cdot 10 + (10x+1) \cdot (6g^2)$$

$$= (2x+1)^2 \cdot 16 \cdot (5x+1)$$

$$y = \frac{1}{(1-2x)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{(1-2x)}_{u}^{-3}\right) = -3\cdot(1-2x)^{-4}\cdot\frac{d(1-2x)}{dx}$$

$$= -3(1-2x)^{-4}\cdot(-2) = \frac{6}{(1-2x)^4} > 0$$

$$y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = u^2(x), \quad u(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$y = mx + b$$

Για $x = 0$ $\quad y = \left(\frac{0-1}{0+1}\right)^2 = (-1)^2 = 1 \quad (0,1)$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - 1 = m(x - x_0)$$

$$= -4(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -4x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot u \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{\partial}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot u \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}\Bigg|_{x=0} = -4$$

$\underline{y^2 = x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}$ $\qquad F(x,y) = y^2 - x = 0$

$y_1 = \sqrt{x}$ $\qquad \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Η $y^2 = x$ ορίζει 2 συναρτήσεις

$y_2 = -\sqrt{x}$ $\qquad \dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{dy}{dx}$, $\underline{y^2 = x}$ $\qquad \dfrac{dy^2}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) =$

$\qquad f(x) \Leftrightarrow y(x)$ $\qquad = 2y\dfrac{dy}{dx}$

$y^2(x) = x$ $\qquad \dfrac{dy^2}{dx} = \dfrac{dx}{dx} \Rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}}$

$y = y_1 = \sqrt{x}$ $\qquad \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y = y_2 = -\sqrt{x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y^5 - y = x \qquad \frac{dy}{dx} \qquad y \neq f(x) \qquad \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d(y^5)}{dx} - \frac{\partial(y)}{dx} = \frac{\partial x}{dx} \Leftrightarrow 5y^4\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1$$

$$(5y^4 - 1)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4 - 1}} \quad , y \neq \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

$$\frac{d(y(x)^5)}{dx} = \underline{5y^4(x)}\ \boxed{\frac{dy(x)}{dx}} \qquad \frac{dy}{dx} = y'$$

$x^2 + y^2 = 25$ klin $\frac{dy}{dx}(3,-4)$

$y_1 = \sqrt{25-x^2}$, $y_2 = -\sqrt{25-x^2}$

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right|_{x=3} = \ldots = \frac{3}{4}$$

;n(ns.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25) \Rightarrow$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{3}{4}$$

$$y^2 \cdot (2-x) = x^3 \xrightarrow{\pi\alpha\rho.} \frac{dy^2}{dx} \cdot (2-x) + \frac{d(2-x)}{dx} y^2 = \frac{dx^3}{dx}$$

$$3x^2 \cdot \frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}$$

$$2y \frac{dy}{dx} \cdot (2-x) + (-1) \cdot y^2 = 3x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2}{2y(2-x)} \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,1)} = \frac{3 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 1 \cdot (2-1)} = 2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

εφ. $y - 1 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$

και $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0 \qquad (2,4)$$

$$\frac{dx^3}{dx} + \frac{dy^3}{dx} - 9 \cdot \frac{dxy}{dx} = \frac{\partial 0}{dx} \Rightarrow$$

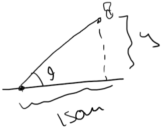
$$3x^2 \frac{dx}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9 \cdot \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx}\right) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9\left(x \frac{dy}{dx} + y\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \frac{4}{5}$$

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x-2) = \ldots$$



$\vartheta = \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0,14 \frac{rad}{min}$

$y(t) = \tan\vartheta(t) \cdot 150$

$y = \tan\vartheta \cdot 150 \iff y(t) = \tan\vartheta(t)\cdot 150$

$\frac{dy}{dt} = \frac{d\tan\vartheta(t)}{dt} \cdot 150 = 150 \cdot \sec^2\vartheta(t) \cdot \frac{d\vartheta(t)}{dt}$

$\sec^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$

$\frac{d\vartheta}{dt} = 0,14 \Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = 150 \cdot 0,14 \cdot 2 = 42 \frac{m}{min}$