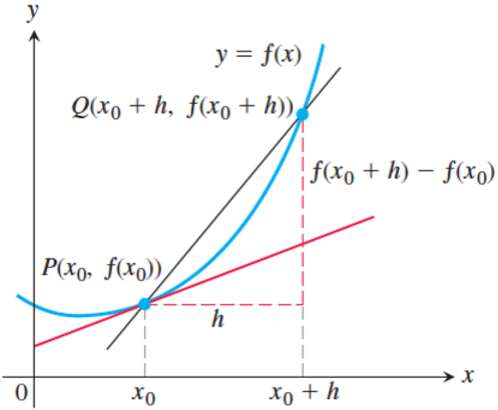
Διάλεξη 7
Παράγωγοι συναρτήσεων

Ανακοινώσεις

1 σετ Ασκήσεων στο *elearn*
Ημερομηνία Παράδοσης: 27/10/2023

Εφαπτομένη



Κλίση καμπύλης

Η κλίση της καμπύλης $y = f(x)$ σημείο $P(x_0, f(x_0))$ ισούται με τον αριθμό

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

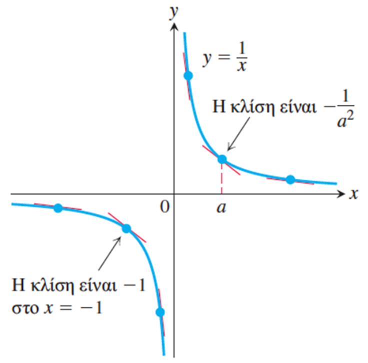
υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

Η εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη στο σημείο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με αυτήν την κλίση.

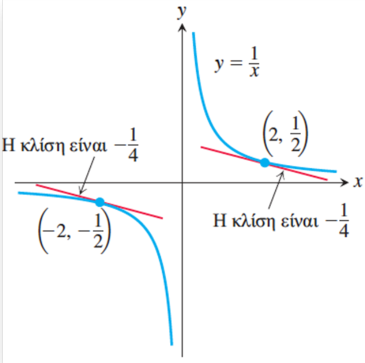
Παράδειγμα

- Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης $y = \frac{1}{x}$ σε ένα τυχαίο σημείο $x = a$ με $a \neq 0$.
- Ποια είναι η κλίση στο σημείο $x = -1$
- Σε ποια σημεία η κλίση ισούται με $-\frac{1}{4}$
- Πως αλλάζει η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(a, \frac{1}{a})$ καθώς το a μεταβάλλεται

Παράδειγμα



y
$y = \frac{1}{x}$
Η κλίση είναι $-\frac{1}{a^2}$
x
0
a
Η κλίση είναι -1
στο $x = -1$



y
$y = \frac{1}{x}$
$\left(2, \frac{1}{2}\right)$
Η κλίση είναι $-\frac{1}{4}$
x
$\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$
Η κλίση είναι $-\frac{1}{4}$

Παράγωγοι

Η παράγωγος μια συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και δίνεται από

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.
Ισοδύναμες διατυπώσεις

- Η κλήση της γραφικής παράστασης $y = f(x)$ στο $x = x_0$
- Η κλήση της εφαπτομένης στην $y = f(x)$ στο $x = x_0$
- Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x στο $x = x_0$
- Η παράγωγος $f'(x)$ στο $x = x_0$

Παράγωγος ως συνάρτηση

Η παράγωγος της $f(x)$ ως προς x, είναι η συνάρτηση $f'(x)$ και η οποία ισούται με

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

- Εναλλακτικά: $f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$
- Επίσης γράφεται και: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$

Διαφορισιμότητα σε διαστήματα

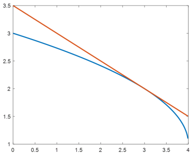
- Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (πεπερασμένο ή άπειρο) αν υπάρχει η παράγωγος της σε κάθε σημείο του διαστήματος
- Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] αν είναι διαφορίσιμη στο (α,β) και υπάρχουν τα όρια
$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ και $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

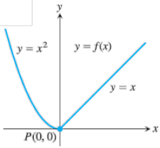
Παραδείγματα

- Να υπολογιστεί η εφαπτομένη της $g(z) = 1 + \sqrt{4 - z}$ στο σημείο P=(3,2)
- Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

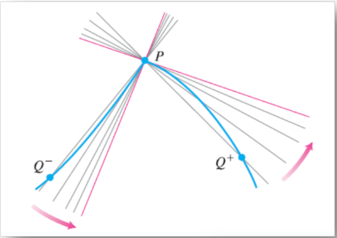
$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$$

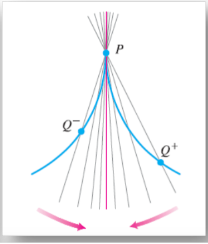
δεν είναι διαφορίσιμη στο $R = (0, 0)$

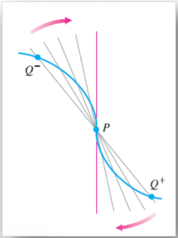


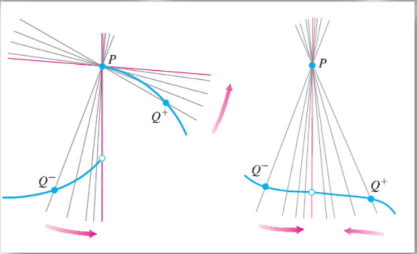


Μη ύπαρξη παραγώγου





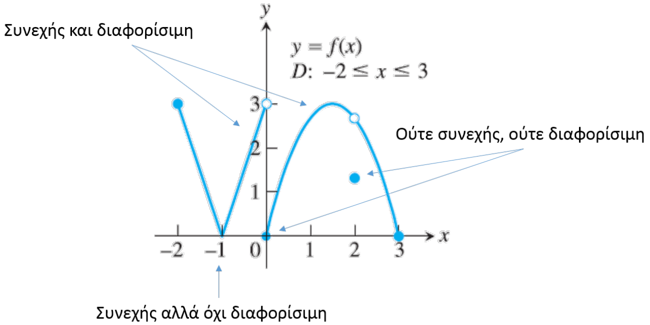




Διαφορισιμότητα και συνέχεια

Αν η $f(x)$ έχει παράγωγο στο $x = c$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = c$

Το αντίστροφο δεν ισχύει



Κανόνες παραγώγισης: άθροισμα

- Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και c μια σταθερά, τότε $\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}$
- Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x, τότε το άθροισμα $f + g$ είναι παραγωγίσιμο σε κάθε σημείο όπου οι f και g είναι και οι δύο παραγωγίσιμες. Σε αυτά τα σημεία

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Κανόνες παραγώγισης: γινόμενο

Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x, τότε και το γινόμενο τους είναι παραγωγίσιμο

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Κανόνες παραγώγισης: πηλίκο

Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x και $g(x) \neq 0$ το πηλίκο τους είναι παραγωγίσιμο

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2(x)}$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Κανόνες παραγώγισης: δυνάμεις

- Αν η f έχει σταθερή τιμή $f(x) = c$, τότε $\frac{df}{dx} = 0$
- Αν n θετικός ακέραιος, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
- και γενικά, n πραγματικός αριθμός, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ για κάθε x που ορίζονται οι x^n και x^{n-1}

Παραδείγματα

- Να βρεθεί η παράγωγος της $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$
- Έχει η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$ οριζόντιες εφαπτομένες
- Να βρεθεί η παράγωγος της $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$
- Οι καμπύλες $y_1 = x^2 + ax + b$ και $y_2 = cx - x^2$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο (1,0). Να βρεθούν τα a, b, c

whiteboard

Να βρεθεί η κλίση $y=\frac{1}{x}$, $x=a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{a-a-h}{a\cdot(a+h)}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{-h}{a\cdot h\cdot(a+h)}\right]=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{a(a+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a\cdot(a+0)}=-\frac{1}{a^2}$$

όχι όριο

$x=-1$ για $\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\frac{1}{(-1)^2}=-1$

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm 2$$

$g(z) = 1 + \sqrt{4-z}$ $\quad\quad P(3,2)$

$$g'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+\sqrt{4-(2+h)}) - (1+\sqrt{4-2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4-(z+h)} - \sqrt{4-z}}{h} \cdot \frac{\sqrt{4-z-h} + \sqrt{4-z}}{\sqrt{4-z-h} + \sqrt{4-z}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{-\cancel{h}}{(\sqrt{4-z-h}) + (\sqrt{4-z})} = -\frac{1}{2\sqrt{4-z}}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad y = ax + b \quad m = -\frac{1}{2\sqrt{4-z}}\Bigg|_{z=3} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-3) \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$y = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 2x+h \qquad \underline{x=0}, \quad \lim_{h\to 0^-} h = \underline{0}$$

$$x=0 \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x+h-\cancel{x}}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} (\;) \neq \lim_{h\to 0^+} (\;) \Rightarrow \nexists \lim_{h\to 0}$$

$$\frac{\partial}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$f(x+h)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x)\cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

$$y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{\partial}{dx}(x^3) + \frac{\partial}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) + \frac{\partial\, -5x}{dx} + \frac{d}{dx}1$$

$$= 3x^2 + \frac{4}{3}2x - 5$$

• $y = x^4 - 2x^2 + 2$ ορισ. εφαπτ.

κλιση $= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$

$4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

$$y = \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \cdot \underbrace{(x^3+3)}_{v(x)}$$

$$\frac{d\,u \cdot v}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \, , \qquad \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

$$dy = (x^2+1)\,3x^2 + (x^3+3)\,2x =$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

$y_2 = Cx - x^2$ περνάει $(1,0)$

$\Rightarrow \quad 0 = C \cdot 1 - 1 \Rightarrow C = 1$ $\qquad y_2 = x - x^2$

① $y_1(x_0) = y_a$

$y_2(x_0) = y_a$

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$

$y_2' = 1 - 2x$

$x = 1: \quad y_2'(1) = -1$

$\frac{dy_1}{dx} = -1 \Rightarrow \quad 2x + a = -1 \Big|_{x=1} \Rightarrow \quad a = -3$

$y_1 = x^2 - 3x + b$ περνά $(1,0)$

$0 = x^2 - 3x + b \Big|_{x=1} \Rightarrow b = 2$

$y_1 = x^2 - 3x + 2$

$a = -3$
$b = 2$
$c = 1$